Quelques applications du théorème de relèvement

Résumé

Soit Γ l'image d'un lacet γ injectif, de classe $\mathcal{C}^2$, dans le plan $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Jordan assure que l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ possède deux composantes connexes, dont l'une est bornée. L'objet de ce texte est de démontrer que si le déterminant $\det(\gamma', \gamma'')$ ne s'annule pas (ou : si Γ est une courbe $\mathcal{C}^2$ dont la courbure ne s'annule pas), alors la composante connexe bornée est convexe. Au passage, on démontre le théorème de Jordan dans ce cas particulier.

Pour arriver à ce résultat, on rappelle d'abord le théorème de relèvement continu pour un ouvert étoilé. Puis on montre un résultat sur le «nombre de tours» par période de la dérivée d'un lacet γ injectif, de classe $\mathcal{C}^1$ et dont la dérivée ne s'annule pas, alors sa dérivée «ne fait qu'un tour» par période. On en déduit enfin le résultat principal.

1 Le théorème de relèvement continu

1.1 Soit X un espace topologique séparé et $f : X \to \mathbb{C}^*$ une fonction continue. On appelle problème du relèvement de f la question de l'existence et de l'unicité d'une fonction continue $\theta : X \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in X$,

$$f(x) = |f(x)|\, e^{i\theta(x)}. \qquad (*)$$

On dit alors que θ est une solution du problème de relèvement de f. On appelle solution locale de ce problème un couple (Y, θ), avec $Y \subset X$ et $\theta : Y \to \mathbb{R}$ continue, vérifiant l'équation fonctionnelle $(*)$ pour tout $x \in Y$.

1.2 Lemme (unicité) *Supposons X connexe. Soient θ et θ' deux solutions au problème du relèvement de f sur X, qui coïncident en un point x_0 de X. Alors $\theta = \theta'$.*

En effet, la fonction $x \mapsto \theta(x) - \theta'(x)$ est continue sur X et à valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$. Comme X est connexe, elle est donc constante sur X. De plus $\theta(x_0) - \theta'(x_0) = 0$: cette fonction est donc uniformément nulle, et $\theta = \theta'$.

1.3 Lemme (existence de solutions locales) *Soit $x_0 \in X$. Alors il existe un voisinage U de x_0 dans X et une solution locale (U, θ) au problème du relèvement de f.*
De plus, si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, et si f est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$, alors la fonction θ l'est aussi.

Soit B_1 la boule de $\mathbb{C}$ de centre 1 et de rayon 1, et $\log : B_1 \to \mathbb{C}$ la fonction somme de la série entière $\sum (-1)^n \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}$. On sait que log est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie, pour tout $z \in B_1$, $\exp(\log z) = z$.
Soit maintenant $z_0 = f(x_0) \in \mathbb{C}$, B la boule de centre z_0 et de rayon $|z_0|$, et $l_0 \in \mathbb{C}$ tel que $z_0 = \exp(l_0)$. Soit L la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur B par

$$L(z) = l_0 + \log \frac{z}{z_0}.$$

On a $\exp L(z) = z$, et en particulier $\Im m L(z)$ est un argument de z.
Comme f est continue, il existe un voisinage U de x_0 dans X, tel que $f(U) \subset B$. Définissons la fonction θ sur U par $\theta(x) = \Im m L(f(x))$. Alors θ est continue (et de classe $\mathcal{C}^k$ si f l'est), et pour tout $x \in U$, $\theta(x)$ est un argument de $f(x)$. On a donc construit une solution locale au voisinage de x_0.

1.4 Lemme (relèvement global sur un segment) *Supposons $X = [0, 1]$, et soit θ_0 un argument de $f(0)$. Alors il existe une unique solution θ sur $[0, 1]$ au problème du relèvement de f, telle que $\theta(0) = \theta_0$.*

Montrons d'abord que si (I, θ) et (J, ξ) sont deux solutions locales sur des sous-intervalles I et J de $[0, 1]$ d'intersection non vide, alors il existe une solution locale sur $J \cup K$. Soit en effet $x_0 \in I \cap J$; on a $\theta(x_0) - \xi(x_0) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Posons, pour $x \in J$, $\xi'(x) = \xi(x) - \xi(x_0) + \theta(x_0)$. Le couple (J, ξ') est une solution locale. Les fonctions θ

et ξ' coïncident en x_0, donc sur tout l'intervalle $J \cap K$ (d'après la proposition d'unicité). Par recollement, on obtient donc une solution locale sur $J \cup K$.
Ceci nous autorise à parler du plus grand intervalle $I \subset [0,1]$ (pour la relation d'inclusion) sur lequel existe une solution locale θ. Si $I \subsetneq [0,1]$, soit x_0 un point de sa frontière dans $[0,1]$. Il existe alors une solution locale (J, ξ), où J est un voisinage de x_0 dans $[0,1]$. Mais alors $I \cap J \neq \varnothing$, donc il existe une solution locale sur l'intervalle $I \cup J$, qui contient strictement I : contradiction.
Ainsi $I = [0,1]$, et θ est une solution globale. Quitte à remplacer θ par $\theta - \theta(0) + \theta_0$, on obtient le résultat recherché. L'unicité est déjà démontrée.

1.5 Théorème (relèvement sur un ensemble étoilé) *Si X est une partie de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geqslant 1$, on dit que X est étoilée à partir du point $\Omega \in \mathbb{R}^n$ si $\Omega \in X$, et si pour tout $P \in X$, le segment $[\Omega P]$ est contenu dans X.*
Supposons que X est une partie de $\mathbb{R}^n$ étoilée à partir du point Ω. Soit θ_0 un argument de $f(\Omega)$. Alors il existe une unique solution θ au problème du relèvement de f sur X telle que $\theta(\Omega) = \theta_0$.
De plus, si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$, alors la fonction θ l'est aussi.

Soit P un point de X ; pour $t \in [0,1]$, on pose $\gamma_P(t) = (1-t)\Omega + tP$. γ_P est un chemin continu de Ω à P dans X. De plus, si P et Q sont deux points de X, on a, pour tout $t \in [0,1]$, $\|\gamma_P(t) - \gamma_Q(t)\| \leqslant \|P - Q\|$.
Soit $f_P = f \circ \gamma_P$. Un argument de $f_P(0) = f(\Omega)$ est θ_0. Soit donc θ_P l'unique solution sur $[0,1]$ au problème du relèvement de f_P telle que $\theta_P(0) = \theta_0$. Posons $\theta(P) = \theta_P(1)$: c'est un argument de $f_P(1) = f(P)$. Il reste à montrer que la fonction θ ainsi définie sur X est continue.
On va en fait montrer qu'elle est uniformément continue sur tout compact étoilé contenu dans X. Supposons donc que X est compact. Fixons un réel $\varepsilon \in]0, \pi[$.
Alors $f(X)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}^*$. En particulier, il existe $m > 0$ qui minore $|f|$.
Or, si z_1, z_2 sont des nombres complexes de modules supérieurs à m, et θ_1, θ_2 des arguments de ces nombres complexes, on voit facilement que, pour $\varepsilon > 0$,

$$|z_1 - z_2| < \frac{2m}{\pi}\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \theta_1 - \theta_2 \in]-\varepsilon, \varepsilon[+ 2\pi\mathbb{Z}$$

D'autre part, par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur X. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\|P - Q\| < \alpha \ \Rightarrow \ |f(P) - f(Q)| < \frac{2m}{\pi}\epsilon$.
Si P et Q sont des points de X tels que $\|P - Q\| < \alpha$, alors, pour tout $t \in [0,1]$, $\|\gamma_P(t) - \gamma_Q(t)\| < \alpha$, donc $f_P(t) - f_Q(t) < \varepsilon$. On en déduit, pour tout $t \in [0,1]$, que $\theta_P - \theta_Q$ est une application continue de $[0,1]$ dans $]-\varepsilon, \varepsilon[+ 2\pi\mathbb{Z}$, nulle en $t = 0$. Comme $\varepsilon < \pi$, cette fonction est donc à valeurs dans l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$. En particulier $|\theta(P) - \theta(Q)| = |\theta_P(1) - \theta_Q(1)| < \varepsilon$. La fonction θ est uniformément continue sur X, et le théorème suit.

2 Le nombre de tours des lacets

2.1 On appelle lacet dans $\mathbb{C}$ une fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et 1-périodique. On dit que le lacet γ est injectif si sa restriction à une période $[t, t+1[$ est injective.
Supposons de plus γ de classe $\mathcal{C}^1$, et tel que sa dérivée γ' ne s'annule pas. Alors, d'après le théorème du relèvement, il existe une fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma'(t) = |\gamma'(t)| e^{i\theta(t)}$. La fonction $t \mapsto \theta(t+1) - \theta(t)$ est une fonction continue à valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$: elle est donc constante, de valeur $2k\pi$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. On appelle l'entier k le nombre de tours de γ' par période. Pour étudier ce nombre de tours, commençons par un lemme.

2.2 Lemme (intersection de deux chemins) *Soient $A < B < C < D$ des nombres réels, et $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im m(z) \geqslant 0\}$ un des demi-plans fermés de $\mathbb{C}$ de frontière $\mathbb{R}$. Soient $f, g : [0,1] \to H$ deux chemins continus tels que*

$$f(0) = A, \ g(0) = B, \ f(1) = C, \ g(1) = D.$$

Alors les chemins f et g se coupent : il existe $(s,t) \in [0,1]^2$ tel que $f(s) = g(t)$.

On va procéder par l'absurde. Supposons que f et g ne se coupent pas, et posons, pour $(s,t) \in [0,1]^2$, $\phi(s,t) = g(t) - f(s)$. Ceci définit une fonction $\phi : [0,1]^2 \to \mathbb{C}^*$ continue. Un argument de $\phi(0,0) = B - A$, qui est un réel

positif, est 0. D'après le théorème du relèvement, il existe donc une application continue $\theta : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(s,t) = |\phi(s,t)|e^{i\theta(s,t)}$, et $\theta(0,0) = 0$.
Notons $H^* = H \setminus \{0\}$, et $\bar{H}^* = \bar{H} \setminus \{0\}$ son conjugué. Pour $t \in [0,1]$, on a $\phi(0,t) = g(t) - A \in H^*$, donc $\theta(0,t) \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi,(2k+1)\pi]$. Or [0,1] est connexe, $t \mapsto \theta(0,t)$ est continue et $\theta(0,0) = 0$: donc $\theta(0,t) \in [0,\pi]$ pour tout $t \in [0,1]$. En particulier, $\phi(0,1) = D - A > 0$, donc $\theta(0,1) = 0$. De même, pour $s \in [0,1]$, on a $\phi(s,1) = D - f(s) \in \bar{H}^*$ donc, par le même raisonnement, $\theta(s,1) \in [-\pi,0]$. Comme $\phi(1,1) = D - C > 0$, on en déduit $\theta(1,1) = 0$.
Pour $s \in [0,1]$, on a $\phi(s,0) = B - f(s) \in \bar{H}^*$, donc $\theta(s,0) \in [-\pi,0]$. Or $\phi(1,0) = B - C < 0$, donc $\theta(1,0) = -\pi$.
Pour $t \in [0,1]$, on a $\phi(1,t) = g(t) - C \in H^*$, et $\theta(1,0) = -\pi$, donc $\theta(1,t) \in [-2\pi,\pi]$. Comme $\phi(1,1) = D - C > 0$, on en conclut $\theta(1,1) = -2\pi$.
Mais alors $\theta(1,1) = 0 = -2\pi$: contradiction ! Et il est prouvé que les chemins f et g se coupent.

2.3 Théorème (Nombre de tours d'un lacet injectif) *Soit γ un lacet injectif, de classe $\mathcal{C}^1$ et dont la dérivée ne s'annule pas. Alors sa dérivée γ' fait exactement un tour par période (dans un sens ou dans l'autre).*

Soit θ une solution au problème du relèvement de γ' sur $\mathbb{R}$, $\theta_0 = \theta(0)$ et $\theta_1 = \theta(1)$. On va montrer que $\theta_1 - \theta_0 = \pm 2\pi$.
Posons, pour $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(s,t) = \begin{cases} \frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{\sin(t-s)\pi} & \text{si } s-t \notin \mathbb{Z} \\ (-1)^{t-s}\gamma'(t) & \text{si } s-t \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
On vérifie que la fonction ϕ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et ne s'annule pas. De plus, θ_0 est un argument de $\phi(0,0) = \gamma'(0)$. Il existe donc une fonction $\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\phi(s,t) = |\phi(s,t)|e^{i\xi(s,t)}$, et $\xi(0,0) = \theta_0$.
Par unicité du relèvement, on a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\xi(t,t) = \theta(t)$. D'autre part, pour $t \in [0,1]$, $\phi(t,1) = -\phi(0,t)$. Par unicité du relèvement, on en déduit $\xi(t,1) = \xi(0,t) + \xi(0,1) - \xi(0,0)$. En particulier $\xi(1,1) = \xi(0,1) + \xi(0,1) - \xi(0,0)$, d'où $\theta_1 - \theta_0 = 2(\xi(0,1) - \theta_0)$. Il reste à montrer que $\xi(0,1) - \theta_0 = \pm\pi$. Comme $\phi(0,1) = -\gamma'(0)$, on sait déjà qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\xi(0,1) - \theta_0 = (2k+1)\pi$.
Considérons la fonction $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $r(s,t) = |\phi(s,t)|\sin(t-s)\pi$. Pour $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\gamma(t) - \gamma(s) = r(s,t)e^{i\xi(s,t)}.$$

On a $r(0,0) = r(0,1) = 0$ et, pour $t \in [0,1]$, $r(0,t) \geqslant 0$. Posons $f(t) = \xi(0,t) + i\,r(0,t)$; la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ est un chemin continu dans le demi-plan H. On pose $A = f(0) = \theta_0$ et $C = f(1) = \theta_0 + (2k+1)\pi$.
Raisonnons par l'absurde en supposant $2k+1 > 2$. On pose alors $g = f + 2\pi : [0,1] \to H$; soient $B = g(0) = 2\pi$ et $D = g(1) = 2k + 3\pi$. On a bien $A < B < C < D$, donc, d'après le lemme, les chemins f et g se coupent : il existe $(s,t) \in [0,1]^2$ tel que $f(t) = g(s) = f(s) + 2\pi$. Comme $f(t) \neq f(s)$, on a $t \neq s$; et comme $|f(s) - f(t)| \neq (2k+1)\pi$, on n'a pas $\{s,t\} = \{0,1\}$. Mais, par ailleurs,

$$\gamma(t) - \gamma(0) = r(0,t)e^{i\xi(0,t)} = r(0,s)e^{i\xi(0,s)} = \gamma(s) - \gamma(0).$$

Ceci contredit l'injectivité du chemin γ. Ainsi $2k+1 \leqslant 2$. De même, $2k+1 \geqslant -2$, donc $\xi(0,1) - \theta_0 = \pm\pi$, ce qu'il fallait démontrer.

3 Lacet délimitant un domaine convexe

3.1 En gardant les notations du paragraphe précédent, je dirai que le lacet γ est strictement convexe si la fonction θ est strictement monotone.
On rappelle que la courbure d'un lacet γ, de classe $\mathcal{C}^2$, en $t \in \mathbb{R}$ est le réel $\det(\gamma'(t), \gamma''(t))$. Supposons que la courbure de γ ne s'annule pas. Sa dérivée γ', de classe $\mathcal{C}^1$, ne s'annule donc pas non plus ; par le théorème de relèvement, la solution θ du problème du relèvement de γ' sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors :

$$\gamma''(t) = \left(\frac{d}{dt}|\gamma'(t)| + i|\gamma'(t)|\theta'(t)\right)e^{i\theta(t)},$$

d'où $\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) = |\gamma'(t)|^2\theta'(t)$. La dérivée θ' de θ ne s'annule pas, et la fonction θ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Le lacet γ est donc strictement convexe.

3.2 Lemme *Soit γ un lacet injectif strictement convexe et Δ une droite du plan complexe. Alors γ rencontre Δ au plus deux fois par périodes, et une seule si Δ est tangente à γ.*

Par une isométrie directe, on se ramène au cas où Δ est l'axe des réels. Quitte à remplacer γ par son conjugué, on peut supposer sa courbure positive, et donc la fonction θ strictement croissante.
On note $\gamma = x+iy$, où x et y sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que y' ne peut pas s'annuler plus de deux fois par période. Supposons qu'il existe a, b, c dans $\mathbb{R}$, avec $a < b < c < a+1$, tels que $y'(a) = y'(b) = y'(c) = 0$. Alors $\theta(a)$, $\theta(b)$ et $\theta(c)$ sont dans $\pi\mathbb{Z}$. Si, par exemple, θ est strictement croissante, on a

$$\theta(a+1) > \theta(c) \geqslant \theta(b) + \pi \geqslant \theta(a) + 2\pi,$$

ce qui contredit le résultat précédent sur les lacets injectifs.
Par le théorème de Rolle, il est alors classique que y ne peut s'annuler plus de deux fois par période, et que, si elle s'annule deux fois, sa dérivée ne peut pas s'annuler en ces points.

3.3 Théorème *Soit γ un lacet injectif strictement convexe, et Γ son image dans $\mathbb{C}$. Alors l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ possède deux composantes connexes, de frontière Γ, dont l'une est strictement convexe et bornée.*

Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tels que $s < t < s+1$, $A = \gamma(s)$ et $B = \gamma(t)$, et $P \in]AB[$. Par une isométrie, ramenons nous au cas où la droite (AB) est l'axe des réels, $P = 0$ et $B < 0 < A$. Notons, comme précédemment, $\gamma = x + iy$. Comme on l'a montré précédemment, y ne s'annule pas sur les intervalles $]s,t[$ et $]t,s+1[$, et $y'(t) \neq 0$. Quitte à remplacer γ par son conjugué, supposons $y'(t) < 0$: alors y est positive sur $]s,t[$ et négative sur $]t,s+1[$.
En particulier, γ est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, et 0 est un argument de $\gamma(s) = A$. Soit donc ξ la solution au problème du relèvement de γ telle que $\xi(s) = 0$. Sur $[s,t]$, γ est à valeurs dans H^*, et $\gamma(t) = B < 0$, donc $\xi(t) = \pi$ et, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\xi([s,t]) = [0,\pi]$. De même $\xi(s+1) = 2\pi$ et $\xi(]t,s+1[) = [\pi, 2\pi]$. La fonction ξ est donc surjective de $[s,s+1]$ sur $[0,2\pi]$. Comme Γ ne peut couper une droite que deux fois, ξ est également injective ; elle est donc strictement croissante.
Soit maintenant $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $\rho(\theta) = |\gamma(\xi^{-1}(\theta))|$; c'est une fonction continue 2π-périodique. On a clairement :

$$\Gamma = \{r\, e^{i\theta} \mid r = \rho(\theta)\}.$$

Il est clair aussi que $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a deux composantes connexes

$$X = \{r\, e^{i\theta} \mid r < \rho(\theta)\} \quad \text{et} \quad Y = \{r\, e^{i\theta} \mid r > \rho(\theta)\},$$

que leur frontière est Γ et que X est bornée et étoilée par rapport à P.
Il reste à montrer que X est convexe. Soient Q un point de X. Par définition, la droite (PQ) coupe Γ en deux points C et D situés de part et du segment $[PQ]$. Le point Q est donc sur $]CD[$. D'après le raisonnement précédent, la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ qui contient le point Q est bornée : c'est donc X. Elle est de plus étoilée par rapport à Q. L'ensemble X est étoilé par rapport à tous ses points ; il est donc convexe, ce qu'il fallait démontrer.

3.4 Remarque On pourrait bien sûr démontrer le résultat équivalent en ôtant tous les «strictement».