Faisceaux pervers en cohomologie étale des schémas

Erwan Biland

Mémoire de DEA réalisé sous la direction d'Anne-Marie Aubert

soutenu le 25 septembre 2002

DEA de Mathématiques
Paris 7
Année 2001-2002

Introduction

Le but de ce mémoire est de présenter la théorie des faisceaux pervers, dans le cadre de la cohomologie étale, en se basant sur le texte de référence de Beilinson, Bernstein et Deligne, [?]. Un exposé de cette théorie, remarquable pour sa clarté, est aussi fait dans les deux livres (qui se font suite) [?] et [?].

Dans un premier temps, on rappelle les notions fondamentales de la topologie étale, exposées par exemple dans [?], et le langage des catégories dérivées, introduit par Verdier dans [?]. On est alors en mesure d'étudier la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux de A-modules sur un k-schéma X, notée $\mathrm{D}(X, A)$. On construit rapidement l'image inverse exceptionnelle et son adjoint à gauche.

On souhaite travailler dans une catégorie de complexes de faisceaux sur un corps, mais les théorèmes qui seront utiles pour la suite nécessite que les faisceaux soient de torsion première à la caractéritique de k. C'est ce qui motive l'introduction de la catégorie triangulée des $\bar{\mathbb{Q}}_l$-complexes constructibles sur le k-schéma X. Sur cette catégorie, on construit le foncteur de dualité de Grothendieck-Verdier.

On peut alors définir la sous-catégorie, autoduale, des faisceaux pervers. Pour l'étudier plus précisément, on montre que c'est le cœur d'une t-structure dite de perversité. En particulier, on en déduit que c'est une catégorie abélienne.

Le cadre des t-structures permet alors de parler de foncteurs t-exacts à droite ou à gauche ; on étudie ce qu'il en est pour les foncteurs associé à un morphisme f de k-schémas, suivant qu'il est quasi-fini, affine, ou lisse.

Enfin, dans le cas où f est quasi-fini, on construit différents foncteurs entre les catégories de faisceaux pervers, dont le prolongement intermédiaire. On est alors en mesure de déterminer les éléments simples de ces catégories, et de montrer que tout faisceau pervers se dévisse en un nombre fini de faisceaux pervers simples.

Je remercie ici ma directrice de DEA, Anne-Marie Aubert, qui m'a proposé ce sujet et m'a aidé à ne pas me perdre dans cette théorie ardue. Je remercie aussi Alberto Arabia, pour son cours à Paris 7 qui m'a permis de découvrir un autre point de vue sur les faisceaux pervers et le prolongement intermédiaire, et pour sa relecture attentive de mon mémoire, qui m'a permis de corriger nombre d'inexactitudes et de mieux comprendre la cohérence de la théorie. Je remercie aussi mon épouse, Émilie, pour sa patience et son aide.

Erwan Biland
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75005 Paris
biland@sequoia.ens.fr

Table des matières

Première partie
Les outils : faisceaux en topologie étale, catégories dérivées

1 topologie étale

1.1 La catégorie des schémas étales au-dessus de X ; localisé strict de X en un point

Soit A un anneau. On dit qu'un A-module M est plat quand le foncteur $- \otimes_A M$ est exact. On dit qu'un morphisme de schémas $f : Y \to X$ est plat si, pour tout point y de Y, l'anneau $\mathcal{O}_{Y,y}$ est plat comme module sur $\mathcal{O}_{X,f(y)}$.

On dit qu'un morphisme $Y \xrightarrow{f} X$ est non-ramifié s'il est localement de type fini et si, pour tout point y de Y, en notant $x = f(y)$ et $\mathfrak{M}_x$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$, l'anneau $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{M}_x\mathcal{O}_{Y,y}$ est un corps, extension finie séparable de $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x$.

Enfin, on appelle morphisme étale de schémas un morphisme plat et non-ramifié. En particulier, toute immersion ouverte est un morphisme étale. Soit X un schéma, n un entier, et Y la réunion disjointe de n copies de X ; alors le morphisme canonique $Y \longrightarrow X$ est un morphisme étale. On dit dans ce cas qu'il est trivial.

Il existe un critère local du caractère étale d'un morphisme : soit $\operatorname{Spec} B \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} A$ un morphisme de schémas affines. Supposons qu'il existe un entier n et des polynômes $P_1, \ldots, P_n \in A[t_1, \ldots, t_n]$ tels que la A-algèbre B soit isomorphe à $A[t_1, \ldots, t_n]/(P_1, \ldots, P_n)$. Alors le morphisme f est étale si et seulement si le déterminant jacobien

$$\det\left(\frac{\partial P_i}{\partial t_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \in \quad A[t_1, \ldots, t_n]$$

s'envoie sur un élément inversible de B.

Le composé de deux morphismes étales reste étale, ainsi que tout changement de base d'un morphisme étale. Il en résulte que la catégorie des schémas étales au-dessus d'un schéma X est filtrante à gauche : étant donnés Y et Y' deux schémas étales au dessus de X, leur produit fibré $Z = Y \times_X Y'$ est canoniquement un schéma étale au-dessus de X, de Y et de Y'.

Soit X un schéma. Remarquons que, pour que tous les morphismes étales au-dessus de X soient triviaux, il faut et il suffit que X soit isomorphe au spectre d'un corps séparablement clos.

Dans ce cadre, un point géométrique de X est un morphisme $\operatorname{Spec} k_s \xrightarrow{\bar{x}} X$, où k_s est un corps séparablement clos. Son image est réduite à un point x (non nécessairement fermé) de X, et k_s est une extension séparablement close du corps résiduel $\kappa(x)$. En fait, la donnée d'un point géométrique d'image x est simplement la donnée d'une extension séparablement close de $\kappa(x)$; ceci prouve qu'il en existe pour tout point x.

On appelle localisé strict du schéma X au point géométrique $\bar{x}$ le schéma

$$X_{\bar{x}} = \varinjlim \left\{ U \xrightarrow{u} X \text{ étale} \quad | \quad \exists \text{ Spec } k_s \xrightarrow{\bar{y}} U \qquad u \circ \bar{y} = \bar{x} \right\}$$

On a un morphisme canonique $X_{\bar{x}} \longrightarrow X$; $X_{\bar{x}}$ possède un unique point fermé x', qui s'envoie sur x par ce morphisme.

$X_{\bar{x}}$ est un schéma strictement local, c'est-à-dire qu'il est isomorphe au spectre d'un anneau local A vérifiant les conditions (équivalentes) suivantes :

(i) Le corps résiduel de A est séparablement clos, et pour toute A-algèbre finie B, B est isomorphe à un produit fini de A-algèbres locales.

(ii) Le corps résiduel de A est séparablement clos, et pour tout schéma étale $Y \xrightarrow{f} X_{\bar{x}}$ muni d'un point géométrique $\bar{y}$ s'envoyant sur $\bar{x}'$, il existe une section de f envoyant $\bar{x}'$ sur $\bar{y}$.

(iii) Tout homomorphisme local $Y \longrightarrow X$, où Y est localisé (classique) d'un schéma étale sur X, est un isomorphisme.

Etant donné un morphisme $Y \xrightarrow{f} X$, on appelle localisé de f en $\bar{x}$ le morphisme canonique $f_{\bar{x}}$ de $Y_{\bar{x}} = Y \times_X X_{\bar{x}}$ dans $X_{\bar{x}}$.

1.2 Préfaisceaux et faisceaux sur X

De même que la topologie de Zariski sur X est la donnée de la catégorie filtrante à gauche des immersions ouvertes dans X, on appelle topologie étale sur X la donnée de la catégorie $\acute{E}t\,(X)$ des schémas étales au-dessus de X. On a également besoin d'une notion de « recouvrement » : on dira qu'une famille $\left(X_i \xrightarrow{u_i} X\right)_{i \in I}$ d'objets de $\acute{E}t\,(X)$ est un recouvrement de X si X est la réunion ensembliste des images des u_i.

On peut alors définir faisceaux et préfaisceaux pour la topologie étale. Soit $\mathcal{A}b$ la catégorie des groupes abéliens. Un préfaisceau de groupes abéliens sur X pour la topologie étale est un foncteur contravariant $\mathcal{F} : \acute{E}t\,(X) \longrightarrow \mathcal{A}b$, qui envoie le schéma vide sur le groupe nul.

Ainsi par exemple, si G est un groupe abélien, on appelle préfaisceau constant de valeur G sur X le préfaisceau qui, à tout schéma étale non vide au-dessus de X, associe le groupe G, et qui, à tout morphisme de schémas étales non vides, associe comme flèche de transition l'identité de G.

$\mathcal{F}$ est un faisceau si, pour tout morphisme étale $U \xrightarrow{u} X$ et tout recouvrement $\left(U_i \xrightarrow{u_i} U\right)_{i \in I}$ de U par des schémas étales, la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}\,(U) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}\,(U_i) \longrightarrow \bigoplus_{i,j \in I} \mathcal{F}\,(U_i \times_U U_j)$$

est exacte. On notera souvent $\Gamma\,(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}\,(U)$ le groupe des sections de $\mathcal{F}$ sur U. On note $\mathcal{A}b\,(X_{\acute{e}t})$ la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X pour la topologie étale.

Soit $\bar{x}$ un point géométrique de X, et $\mathcal{F}$ un faisceau pour la topologie étale. On appelle fibre de $\mathcal{F}$ en $\bar{x}$ le groupe abélien :

$$F_{\bar{x}} = \varinjlim \left\{ \mathcal{F}\left(U \xrightarrow{u} X\right) \quad | \quad U \xrightarrow{u} X \text{ étale} \quad \& \quad \exists\, \bar{y} \quad u \circ \bar{y} = \bar{x} \right\}$$

On appelle support de $\mathcal{F}$ l'adhérence de l'ensemble des points x de X qui sont image d'un point géométrique $\bar{x}$ tel que $F_{\bar{x}} \neq 0$.

Dans toute la suite, quand on parlera de faisceaux ou de préfaisceaux, ce sera pour la topologie étale. On a le résultat fondamental, comme en topologie de Zariski :

Théorème 1 *Soit X un schéma nœthérien, et $\mathcal{F}$ un préfaisceau de groupes abéliens sur X. Il existe un unique faisceau $a\mathcal{F}$ sur X tel que, pour tout faisceau $\mathcal{G} \in \mathcal{A}b\,(X_{ét})$,*

$$\hom_{pref}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \hom_{\mathcal{A}b(X_{ét})}(a\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Ainsi, on définit le faisceau constant de valeur G sur X comme le faisceau associé au préfaisceau constant de valeur G sur X. On dit qu'un faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens sur X est localement constant s'il existe un recouvrement de X par des ouverts U tels que la restriction de $\mathcal{F}$ à U soit un faisceau constant.

On montre aisément que la catégorie des préfaisceaux sur X est abélienne. Le théorème **??** permet d'en déduire qu'à son tour, la catégorie des faisceaux sur X est une catégorie abélienne.

Pour A un anneau, et $\mathcal{M}od_A$ la catégorie des modules sur A, on définit de même la catégorie des faisceaux de A-modules sur X, notée $\mathcal{M}od_A\,(X_{ét})$.

On dit qu'un faisceau $\mathcal{F}$ en groupes abéliens (ou en A-modules) est de torsion si, pour tout schéma étale U et pour toute section $s \in \mathcal{F}(U)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\,s = 0$. On dit qu'il est de l-torsion, pour l un nombre premier, si toutes ses sections sont annulées par une puissance de l. C'est en particulier le cas, pour un faisceau en A-modules, si A est un anneau de l-torsion, par exemple $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ ou une $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$-algèbre.

1.3 Foncteurs entre catégories de faisceaux

On se restreindra désormais à des schémas de type fini sur des corps, et à des morphismes de type fini (sauf quand il s'agira de schémas ou morphismes obtenus par localisation. C'est une hypothèse plus que suffisante pour assurer les propriétés qui seront énoncées.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. On associe à f plusieurs foncteurs entre les catégories de faisceaux sur X et Y.

L'image directe $f_* : \mathcal{M}od_A\,(X_{ét}) \longrightarrow \mathcal{M}od_A\,(Y_{ét})$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et $V \longrightarrow Y$ un morphisme étale, on pose (avec les morphismes de transition évidents) :

$$\Gamma(V, f_*\mathcal{F}) = \Gamma(V \times_Y X, \mathcal{F})\,.$$

Le préfaisceau $f_*\mathcal{F}$ ainsi défini est un faisceau.

Le foncteur f_* possède un adjoint à gauche, l'image inverse $f^* : \mathcal{M}od_A\left(Y_{ét}\right) \longrightarrow \mathcal{M}od_A\left(X_{ét}\right)$. Soit $\mathcal{G}$ un faisceau sur Y et $U \longrightarrow X$ un morphisme étale, on pose

$$\Gamma\left(U, f^*\mathcal{G}\right) = \varinjlim \Gamma\left(V, \mathcal{G}\right),$$

la limite étant prise sur les morphismes étales $V \longrightarrow Y$ tels que $U = V \times_Y X$. $f^*\mathcal{G}$ est un faisceau.
Pour X un sous-schéma de Y, c'est la restriction : on note $f^*\mathcal{G} = \mathcal{G}_{|X}$.

On peut regarder ce que donnent ces deux premiers foncteurs aux niveau des fibres. On garde les mêmes notations. Si $\bar{x}$ est un point géométrique de X, on a $\left(f^*\mathcal{G}\right)_{\bar{x}} = \mathcal{G}_{f(\bar{x})}$. Si $\bar{y}$ est un point géométrique de Y, $Y_{\bar{y}}$ le localisé strict de Y en ce point, et $X_{\bar{y}}$ le produit fibré $X \times_Y Y_{\bar{y}}$, en notant u le morphisme $X_{\bar{y}} \to X$, on a :

$$\left(f_*\mathcal{F}\right)_{\bar{y}} = \Gamma\left(X_{\bar{y}}, u^*\mathcal{F}\right).$$

On a aussi l'image directe à support propre $f_! : \mathcal{M}od_A\left(X_{ét}\right) \longrightarrow \mathcal{M}od_A\left(Y_{ét}\right)$. Avec les notations ci-dessus, on pose :

$$\Gamma\left(V, f_!\mathcal{F}\right) = \left\{\ s \in \Gamma\left(V \times_Y X, \mathcal{F}\right) \quad | \quad \text{Supp }\ (s) \to V \quad \text{est un morphisme propre}\ \right\}.$$

Là encore, ceci définit un faisceau.

Un quatrième foncteur ne peut être défini que si f est l'immersion d'un sous-schéma X dans Y : c'est le foncteur « sections à support dans X », noté (un peu abusivement) $f^! : \mathcal{M}od_A\left(Y_{ét}\right) \longrightarrow \mathcal{M}od_A\left(X_{ét}\right)$. On commence par écrire X comme l'intersection d'un ouvert W et d'un fermé F de Y. Pour $\mathcal{G} \in \mathcal{M}od_A\left(Y_{ét}\right)$ et $U \longrightarrow X$ étale, on choisit un morphisme étale $V \longrightarrow Y$ tel que $U = V \times_Y F$, et on pose :

$$\Gamma\left(U \to X, f^!\mathcal{G}\right) = \left\{\ s \in \Gamma\left(V \to Y, \mathcal{G}\right) \quad | \quad \text{Supp } s \subset V \times_Y X\ \right\}$$

Le terme de droite ne dépend pas des choix de F, W et V. $f^!\mathcal{G}$ est un faisceau sur X. Et le foncteur $f^!$ ainsi construit est adjoint à droite du foncteur $f_!$.

Tous les foncteurs qui viennent d'être définis sont exacts à gauche, et le foncteur image inverse f^* est même exact (comme on peut le voir au niveau des fibres.

Si f est propre, on a $f_! = f_*$, et si X est un ouvert de Y, $f^!$ est égal au foncteur f^*.

Si f est fini, c'est-à-dire propre et à fibres finies, le foncteur $f_* = f_!$ est exact. En effet, si $\bar{y}$ est un point géométrique de Y, le morphisme localisé $X_{\bar{y}} \to Y_{\bar{y}}$ est aussi fini, et donc $X_{\bar{y}} = \prod_{f(\bar{x})=\bar{y}} X_{\bar{x}}$. Donc si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, on a au niveau des fibres :

$$\left(f_*\mathcal{F}\right)_{\bar{y}} = \prod_{f(\bar{x})=\bar{y}} \mathcal{F}_{\bar{x}},$$

ce dont on déduit l'exactitude de f_*.

Pour f et g deux morphismes composables de schémas, on a bien, comme on l'attend, $(g \circ f)_* = g_* f_*$, *etc.*

Pour $U \xrightarrow{f} X$ un schéma étale au-dessus de X et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X, on note $\mathcal{F}_U = f_! f^* \mathcal{F}$.

On peut également définir deux bifoncteurs sur la catégorie des faisceaux de A-modules sur X.

Le foncteur $\mathcal{H}\mathrm{om} : \mathcal{M}od_A(X_{ét}) \times \mathcal{M}od_A(X_{ét}) \longrightarrow \mathcal{M}od_A(X_{ét})$. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux sur X, on pose :

$$\Gamma(U, \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) = \hom\left(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{G}_{|U}\right),$$

ce qui définit un faisceau. Le foncteur $\mathcal{H}\mathrm{om}(-,-)$ est contravariant, exact à droite, en sa première variable et covariant, exact à gauche, en sa deuxième variable.

Le produit tensoriel de faisceaux ; on note $\mathcal{F} \otimes_A \mathcal{G}$ le faisceau associé au préfaisceau

$$U \quad \mapsto \quad \mathcal{F}(U) \otimes_A \mathcal{G}(U) \ .$$

Le foncteur $- \otimes_A -$ est symétrique ; il est covariant et exact à droite en ses deux variables.

Si B est une A-algèbre et $\underline{B}$ le faisceau constant associé, alors le faisceau $\mathcal{F} \otimes_A \underline{B}$ possède naturellement une structure de faisceau de B-modules sur X.

2 Les catégories dérivées

La construction des catégories dérivées d'une catégorie abélienne est faite dans [?].

2.1 La catégorie des complexes sur $\mathcal{A}$

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On appelle complexe d'objets de $\mathcal{A}$ une famille $(K^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, où les K^i sont des objets de $\mathcal{A}$, et les $d^i : K^i \longrightarrow K^{i+1}$ sont des morphismes tels que, pour tout i, $d^{i+1} \circ d^i = 0$. Le i-ème objet de cohomologie de $K^\bullet$ est ce qui mesure le défaut d'exactitude du complexe au degré i :

$$\mathcal{H}^i K^\bullet = {\ker d^i}\big/{\mathrm{im}\ d^{i-1}}.$$

Soient $K^\bullet = (K^i, d_K^i)$ et $L^\bullet = (L^i, d_L^i)$ deux complexes ; un morphisme f de $K^\bullet$ dans $L^\bullet$ est une famille $(f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, où les $f^i : K^i \longrightarrow L^i$ font commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[d, "f^i"] & K^{i+1} \arrow[r, "d_K^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"] & {} \\
{} \arrow[r, "d_L^{i-1}"] & L^i \arrow[r, "d_L^i"] & L^{i+1} \arrow[r, "d_L^{i+1}"] & {}
\end{tikzcd}$$

Le morphisme f induit des morphismes $\mathcal{H}^i f$ entre les objets de cohomologie. On note $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes d'objets de $\mathcal{A}$. C'est une catégorie abélienne. Dans $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, f est un isomorphisme si et seulement si tous les f^i en sont. Les $\mathcal{H}^i : \mathrm{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ sont des δ-foncteurs, c'est-à-dire qu'une suite exacte courte de complexes $0 \longrightarrow K^\bullet \longrightarrow L^\bullet \longrightarrow M^\bullet \longrightarrow 0$ donne lieu à une suite exacte longue en cohomologie (lemme du serpent) :

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}^i K^\bullet \longrightarrow \mathcal{H}^i L^\bullet \longrightarrow \mathcal{H}^i M^\bullet \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}^{i+1} K^\bullet \longrightarrow \cdots$$

On dispose d'une auto-équivalence de catégorie $T : \mathrm{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{C}(\mathcal{A})$, appelée « foncteur de translation », qui à un faisceau $(K^i, d_K^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ associe le faisceau $\left(K[1]^i = K^{i+1}, d_{K[1]}^i = -d^{i+1}\right)_{i\in\mathbb{Z}}$, et qui à un morphisme $(f^i : K^i \to L^i)_i$ associe $(f^{i+1} : K[1]^i \to L[1]^i)_i$. On notera $K[n]^\bullet$ pour $T^n K^\bullet$; un morphisme $K^\bullet \to L[n]^\bullet$ sera appelé morphisme de degré n de $K^\bullet$ dans $L^\bullet$, et noté $K^\bullet \xrightarrow{\ (n)\ } L^\bullet$. Ainsi, par exemple, la différentielle de $K^\bullet$ donne lieu à un morphisme $\left((-1)^i\, d_K^i : K^i \to K[1]^i\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ de degré 1 de $K^\bullet$ dans lui-même.

On appelle triangle la donnée de trois complexes d'objets de $\mathcal{A}$ et de trois flèches comme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} & M^\bullet \arrow[dl, "w\ (1)"'] & \\ K^\bullet \arrow[rr, "u"] & & L^\bullet \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

Soit $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ un morphisme dans $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. On appelle cône de f, et on note $c(f)$, le complexe défini par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} c(f)^i & = & L^i \oplus K^{i+1} \\ & & \\ d_{c(f)}^i & = & \begin{pmatrix} d_L^i & f^{i+1} \\ 0 & -d_K^{i+1} \end{pmatrix} \ : \ L^i \oplus K^{i+1} \longrightarrow L^{i+1} \oplus K^{i+2} \end{array}\right. .$$

On a canoniquement un triangle

$$\begin{tikzcd} & c(f) \arrow[dl, "w\ (1)"'] & \\ K^\bullet \arrow[rr, "f"] & & L^\bullet \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

où v et w sont définis par :

$$v^i = \begin{pmatrix} Id_{L^i} & 0 \end{pmatrix} : L^i \longrightarrow L^i \oplus K^{i+1} \qquad \text{et} \qquad w^i = \begin{pmatrix} 0 \\ -Id_{K^{i+1}} \end{pmatrix} : L^i \oplus K^{i+1} \longrightarrow K^{i+1} \ .$$

Comme on a en fait une suite exacte $0 \longrightarrow L^\bullet \longrightarrow c(f) \longrightarrow K[1]^\bullet \longrightarrow 0$, ce triangle donne lieu à une suite exacte longue des objets de cohomologie :

$$\cdots \xrightarrow{-\mathcal{H}^{-1}w} \mathcal{H}^0 K^\bullet \xrightarrow{\mathcal{H}^0 f} \mathcal{H}^0 L^\bullet \xrightarrow{\mathcal{H}^0 v} \mathcal{H}^0 c(f) \xrightarrow{\mathcal{H}^0 w} \mathcal{H}^1 K^\bullet \xrightarrow{-\mathcal{H}^1 f} \cdots$$

On appelle complexe double d'objets de $\mathcal{A}$ un complexe de complexes d'objets de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire une famille $(K^{p,q}, d_h^{p,q}, d_v^{p,q})$, où les $K^{p,q}$ sont des objets de $\mathcal{A}$, les $d_h^{p,q}$ (différentielle horizontale) des morphismes $K^{p,q} \to K^{p,q+1}$ tels que $d_h^{p,q+1} \circ d_h^{p,q} = 0$, et les $d_v^{p,q}$ (différentielle verticale) des morphismes $K^{p,q} \to K^{p+1,q}$ tels que $d_v^{p+1,q} \circ d_v^{p,q} = 0$. Un tel complexe peut se représenter sous la forme :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K^{p+1,q-1} \arrow[r, "d_h"] & K^{p+1,q} \arrow[r, "d_h"] & K^{p+1,q+1} \arrow[r, "d_h"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & K^{p,q-1} \arrow[u, "d_v"] \arrow[r, "d_h^{p,q-1}"] & K^{p,q} \arrow[u, "d_v^{p,q}"] \arrow[r, "d_h^{p,q}"] & K^{p,q+1} \arrow[u, "d_v"] \arrow[r, "d_h"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & K^{p-1,q-1} \arrow[u, "d_v"] \arrow[r, "d_h"] & K^{p-1,q} \arrow[u, "d_v^{p-1,q}"] \arrow[r, "d_h"] & K^{p-1,q+1} \arrow[u, "d_v"] \arrow[r, "d_h"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

A ce complexe double $K^{\bullet\bullet}$ on peut associer canoniquement un complexe simple $K^\bullet = (K^i, d^i)$ défini par :

$$K^i = \prod_{p+q=i} K^{p+q} \quad ; \quad d^i = \sum_{p+q=i} (d_h^{p,q} + (-1)^p\, d_v^{p,q}) : \prod_{p+q=i} K^{p+q} \to \prod_{p+q=i+1} K^{p+q}$$

2.2 La catégorie des complexes à homotopie près

Une homotopie a de $K^\bullet$ dans $L^\bullet$ est une famille de morphismes $(a^i : K^i \to L^{i-1})_{i\in\mathbb{Z}}$. On dit que deux morphismes de complexes $f, g : K^\bullet \rightrightarrows L^\bullet$ sont homotopes, et on écrit $f \sim g$, s'il existe une homotopie a telle que :

$$\forall i \in \mathbb{Z} \quad g^i - f^i = d_L^{i-1} \circ a^i + a^{i+1} \circ d_K^i \ .$$

La relation d'homotopie, notée $\sim$, est compatible à l'addition et à la composition. On dit que $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ est une équivalence d'homotopie s'il existe $g : L^\bullet \longrightarrow K^\bullet$ tel que $g \circ f$ soit homotope à l'identité de $K^\bullet$, et $f \circ g$ à l'identité de $L^\bullet$.

On définit alors $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, la catégorie des «complexes de $\mathcal{A}$ à homotopie près» : ses objets sont ceux de $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, et, étant donnés deux objets $K^\bullet$ et $G^\bullet$, on pose

$$\hom_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(K^\bullet, G^\bullet) = \hom_{\mathrm{C}(\mathcal{A})}(K^\bullet, G^\bullet)/\!\sim.$$

On a naturellement un foncteur $\mathrm{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{K}(\mathcal{A})$. Les isomorphismes de $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ sont les morphismes qui proviennent par ce foncteur des équivalences d'homotopie de $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Deux morphismes homotopes induisent les mêmes morphismes entre groupes de cohomologie, donc les foncteurs $\mathcal{H}^i$ sont naturellement définis sur $\mathrm{K}(\mathcal{A})$.

Dans $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, on dispose toujours du foncteur de translation T. On dira qu'un triangle de $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ est distingué s'il est isomorphe dans cette catégorie au triangle du cône d'un morphisme :

$$\begin{tikzcd}
 & c(f) \arrow[dl, "w"', "1"] & \\
K^\bullet \arrow[rr, "f"] & & L^\bullet \arrow[ul, "v"']
\end{tikzcd}$$

Dans la suite, un complexe, considéré comme objet de $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, sera en général noté $K^\bullet$. Mais s'il est considéré comme objet de $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, ou de la catégorie $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ qui va être définie, on le notera simplement K. En effet, deux complexes $K^\bullet$ et $L^\bullet$ pevent être isomorphes dans $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ sans que les K^i soient isomorphes aux L^i.

2.3 Catégories triangulées

Dans [**?**], Jean-Louis Verdier montre que, munie du foncteur T et de la famille des triangles distingués, $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ est une catégorie triangulée.

Une catégorie triangulée $\mathcal{D}$ est une catégorie additive, munie d'une auto-équivalence de catégorie T, et d'une famille de triangles distingués $K \longrightarrow L \longrightarrow M \xrightarrow{1}$ vérifiant les axiomes :

(tr 1) *Tout triangle de $\mathcal{D}$ isomorphe à un triangle distingué est distingué. Pour tout $K \in \mathcal{D}$, le triangle $K \xrightarrow{Id_K} K \longrightarrow 0 \xrightarrow{1}$ est distingué. Tout morphisme $K \xrightarrow{u} L$ est contenu dans un triangle distingué $K \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \xrightarrow[1]{w}$.*

(tr 2) *Un triangle $K \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \xrightarrow[1]{w}$ de $\mathcal{D}$ est distingué si et seulement si le triangle $L \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} K[1] \xrightarrow[1]{-u[1]}$ l'est.*

(tr 3) *Tout diagramme commutatif de la forme :*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & L \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[r, "w"] & K[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
K' \arrow[r, "u'"] & L' \arrow[r, "v'"] & M' \arrow[r, "w'"] & K'[1]
\end{tikzcd}$$

(où les lignes sont des triangles distingués) se complète en un morphisme de triangles :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & L \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[r, "w"] \arrow[d, dotted, "h"] & K[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
K' \arrow[r, "u'"] & L' \arrow[r, "v'"] & M' \arrow[r, "w'"] & K'[1]
\end{tikzcd}$$

(tr 4) *Pour tout diagramme*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr] \arrow[dr] & & M \arrow[dd] \\
& L \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[l, phantom, "\star"] \arrow[r, phantom, "\star"] & \\
M' \arrow[uu, "1"] & & K' \arrow[ul, "1"] \arrow[ll, "1"]
\end{tikzcd}$$

(où les triangles marqués ↻ sont commutatifs et ceux marqués ⋆ sont distingués), il existe L' et des morphismes complétant le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr] & & M \arrow[dl] \arrow[dd] \\
& L' \arrow[ul, "1"] \arrow[dr] \arrow[u, phantom, "\star"] \arrow[d, phantom, "\star"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
M' \arrow[uu, "1"] \arrow[ur] & & K' \arrow[ll, "1"]
\end{tikzcd}$$

(où les flèches du pourtour sont les mêmes que précédemment). La juxtaposition de ces deux diagrammes est appelée « diagramme de l'octaèdre ».

Soit $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ un foncteur entre catégories triangulées ; on dira qu'il est triangulé s'il est additif et s'il envoie triangles distingués sur triangles distingués. Soit K, L, M trois objets de $\mathcal{D}$ triangulée ; on dit que L est une extension (triangulée) de M par K s'il existe, dans $\mathcal{D}$, un triangle distingué $K \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \xrightarrow[1]{w}$.

Si on a un tel triangle distingué, et un objet N de $\mathcal{D}$, on a deux longues suites exactes des groupes d'homomorphismes :

$$\cdots \longrightarrow \hom(N, K[i]) \xrightarrow{u[i]\circ -} \hom(N, L[i]) \xrightarrow{v[i]\circ -} \hom(N, M[i]) \xrightarrow{w[i]\circ -} \hom(N, K[i+1]) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \hom(M[i], N) \xrightarrow{-\circ u[i]} \hom(L[i], N) \xrightarrow{-\circ v[i]} \hom(K[i], N) \xrightarrow{-\circ w[i]} \hom(M[i+1], N) \longrightarrow \cdots$$

Démonstration

On se contentera de montrer que la première suite est exacte, les deux preuves étant similaires. En vertu de l'axiome *(tr 2)*, il suffit de prouver que la suite

$$\hom(N, K) \xrightarrow{u\circ -} \hom(N, L) \xrightarrow{v\circ -} \hom(N, M)$$

est exacte.

Soit donc $f : N \longrightarrow K$ et $g = u \circ f$. Par l'axiome *(tr 1)*, on a un triangle distingué $N \xrightarrow{Id} N \longrightarrow 0 \xrightarrow[1]{}$. L'axiome *(tr 3)* montre alors qu'on peut compléter le diagramme ci-dessous en un morphisme de triangles :

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \arrow[r, "1"] \arrow[d, dotted] & {} \\
K \arrow[r, "u"] & L \arrow[r, "v"] & M \arrow[r, "w", "1"'] & {}
\end{tikzcd} .$$

Le deuxième carré étant commutatif, on a donc $v \circ g = 0$. Ceci prouve que $v \circ u = 0$.

Soit maintenant $g : N \longrightarrow L$ tel que $v \circ g = 0$. De même que précédemment, on peut compléter le diagramme suivant en un morphisme de triangles :

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "Id"] \arrow[d, dotted, "f"] & N \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \arrow[r, "1"] \arrow[d] & {} \\
K \arrow[r, "u"] & L \arrow[r, "v"] & M \arrow[r, "w", "1"'] & {}
\end{tikzcd} .$$

Le morphisme f obtenu vérifie $u \circ f = g$. Ceci prouve que la suite est exacte.

Pour en revenir à $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, si on a un triangle distingué $K \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} (1)$, on a une suite exacte longue des objets de cohomologie, comme on l'a vu pour le triangle associé au cône d'un morphisme.

2.4 La catégorie dérivée de $\mathcal{A}$

Soit $K \xrightarrow{f} L$ un morphisme dans $\mathrm{K}(\mathcal{A})$. On dit que f est un quasi-isomorphisme si, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le morphisme induit $\mathcal{H}^i f$ est un isomorphisme. En particulier, les équivalences d'homotopies sont des quasi-isomorphismes.

L'ensemble des quasi-isomorphismes de la catégorie $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ est un système multiplicatif saturé, c'est-à-dire qu'il vérifie les propriétés suivantes :

(sm 1) *Le morphisme identité de tout objet est un quasi-isomorphisme, et la composée de deux quasi-isomorphismes est un quasi-isomorphisme.*

(sm 2) *Si s est un quasi-isomorphisme, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $s[n]$ est un quasi-isomorphisme. Si on a un morphisme de triangles distingués :*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, "s"] & L \arrow[r] \arrow[d, "t"] & M \arrow[r] \arrow[d, "u"] & (1) \\ K' \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & (1) \end{tikzcd},$$

et si s et t sont des quasi-isomorphismes, alors u est un quasi-isomorphisme.

(sm 3) *Si on a deux morphismes f et g de L dans M, on a équivalence entre les deux propriétés :*

(i) Il existe K et un quasi-isomorphisme $K \xrightarrow{s} L$ tel que $f \circ s = g \circ s$;

(ii) Il existe N et un quasi-isomorphisme $M \xrightarrow{t} N$ tel que $t \circ f = t \circ g$.

(sm 4) *Si on des morphismes $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} N$ tels que $g \circ f$ et $h \circ g$ soient des quasi-isomorphismes, alors g est un quasi-isomorphisme.*

Verdier en déduit qu'il existe une catégorie triangulée $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ et un foncteur triangulé $Q : \mathrm{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{D}(\mathcal{A})$, uniques (au sens où ils peuvent l'être...), tels que l'image par Q d'un quasi-isomorphisme de $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ soit un isomorphisme de $\mathrm{D}(\mathcal{A})$, et qu'on ait la propriété universelle suivante :

Pour toute catégorie triangulée $\mathcal{D}$ et tout foncteur triangulé F de $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{D}$ qui transforme les quasi-isomorphismes en isomorphismes, il existe un foncteur $\tilde{F}$, unique à unique transformation naturelle près, faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"] & \mathcal{D} \\ \mathrm{D}(\mathcal{A}) \arrow[ur, dotted, "\tilde{F}"'] & \end{tikzcd}.$$

De plus, par construction, on sait que $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ a la même classe d'objets que $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, c'est à dire la classe des complexes d'objets de $\mathcal{A}$, et qu'un triangle de $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ est distingué si et seulement si il est isomorphe dans $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ à l'image par Q d'un triangle distingué de $\mathrm{K}(\mathcal{A})$. On sait aussi que tout morphisme $K \longrightarrow L$ de $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ s'écrit, de façon non unique, sous une des deux formes suivantes :

(a) $Q(f)\,Q(s)^{-1}$, *où* $f : M \longrightarrow L$ *est un morphisme quelconque et* $s : M \longrightarrow K$ *un quasi-isomorphisme ;*

(b) $Q(s)^{-1}Q(f)$, *où* $s : L \longrightarrow M$ *est un quasi-isomorphisme et* $f : K \longrightarrow M$ *un morphisme quelconque.*

Soit K un complexe ; on dit qu'il est cohomologiquement borné à gauche s'il existe un entier n tel que, pour tout $i \leqslant n$, le groupe de cohomologie $\mathcal{H}^i K$ est nul. On note $\mathrm{C}^+(\mathcal{A})$ (resp. $\mathrm{K}^+(\mathcal{A})$, resp. $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, resp. $\mathrm{D}(\mathcal{A})$) dont les objets sont les complexes cohomologiquement bornés à gauche. On définit de même les sous-catégories de complexes bornés à droite, notées avec b en exposant, et de complexes bornés (c'est-à-dire bornés à gauche et à droite), notés avec b en exposant. Les catégories $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$, $\mathrm{D}^-(\mathcal{A})$ et $\mathrm{D}^b(\mathcal{A})$ sont des sous-catégories triangulées de $\mathrm{D}(\mathcal{A})$, stables par extensions triangulées.

Soit A un objet de $\mathcal{A}$. On lui associe naturellement le complexe valant A en degré 0, et nul en tout autre degré, avec des différentielles toutes nulles. On a ainsi un foncteur de la catégorie $\mathcal{A}$ dans sa catégorie dérivée $\mathrm{D}(\mathcal{A})$, qui est une équivalence de catégories entre $\mathcal{A}$ et son image, sous-catégorie pleine de $\mathrm{D}(\mathcal{A})$. Dans la suite, on identifiera toujours un objet de $\mathcal{A}$ et son image dans $\mathrm{D}(\mathcal{A})$. Soit une suite exacte $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{A}$. Alors il existe, dans $\mathrm{D}(\mathcal{A})$, un unique morphisme $\delta : C \longrightarrow A[1]$ donnant lieu à un triangle distingué :

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\delta"', "1" description] & \\ A \arrow[rr, "f"] & & B \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

2.5 Résolutions injectives et projectives

Le terme résolution sert souvent à désigner un quasi-isomorphisme : on dira selon le cas que c'est une résolution du complexe de départ ou d'arrivée.

Un élément I de $\mathcal{A}$ est dit injectif si le foncteur $\hom(-, I)$ est exact à gauche. On note $\mathrm{I}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie de $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ formée des complexes dont tous les termes sont injectifs (on a bien sûr les sous-catégories I^+, I^-, I^b). Cette catégorie s'envoie, via le foncteur Q, dans $\mathrm{D}(\mathcal{A})$.

On dit que $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'objets injectifs si tout objet de $\mathcal{A}$ se plonge dans un objet injectif. Si la catégorie $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'injectifs, la sous-catégorie $\mathrm{I}^+(\mathcal{A})$ est équivalente à la catégorie $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$.

Démonstration

Soit A est un objet de $\mathcal{A}$; on appelle résolution injective de A une suite exacte

$$O \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$$

où tous les I^p sont injectifs. Si la catégorie $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs, on peut construire une telle résolution par récurrence, en plongeant A dans un injectif I^0, puis I^0/A dans un injectif I^1, *etc.*

Soit $K^\bullet$ un complexe, borné à gauche, d'objets de $\mathcal{A}$; on appelle résolution injective de $K^\bullet$ un quasi-isomorphisme $K^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$, où $I^\bullet$ est un complexe d'objets injectifs de $\mathcal{A}$. On peut perfectionner la construction précédente pour obtenir un complexe double $I^{\bullet\bullet}$, dont les termes sont injectifs, et tel que, dans la figure $(*)$ (où on a supposé K cohomologiquement nul en degré inférieur à 0),

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & I^{1,0} \arrow[u, "d_v^{1,0}"] \arrow[r, "d_h^{1,0}"] & I^{1,1} \arrow[u, "d_v^{1,1}"] \arrow[r, "d_h^{1,1}"] & I^{1,2} \arrow[u, "d_v^{1,2}"] \arrow[r, "d_h^{1,2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & I^{0,0} \arrow[u, "d_v^{0,0}"] \arrow[r, "d_h^{0,0}"] & I^{0,1} \arrow[u, "d_v^{0,1}"] \arrow[r, "d_h^{0,1}"] & I^{0,2} \arrow[u, "d_v^{0,2}"] \arrow[r, "d_h^{0,2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & K^0 \arrow[u, "\varepsilon^0"] \arrow[r, "d^0"] & K^1 \arrow[u, "\varepsilon^1"] \arrow[r, "d^1"] & K^2 \arrow[u, "\varepsilon^2"] \arrow[r, "d^2"] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

les colonnes soient des résolutions des objets K^i, et que de plus, en notant $\mathcal{H}_h^{\bullet\bullet}I$ l'homologie issue de la différentielle horizontale d_h, les suites

$$O \longrightarrow \mathcal{H}^q K \longrightarrow \mathcal{H}_h^{0,q} I \xrightarrow{d_v} \mathcal{H}_h^{1,q} I \xrightarrow{d_v} \mathcal{H}_h^{2,q} I \xrightarrow{d_v} \cdots$$

soient des résolutions injectives des objets de cohomologie $\mathcal{H}^q K$. Cette construction est appelée résolution simultanée.

Soit alors $I^\bullet$ le complexe simple associé au complexe double $I^{\bullet\bullet}$. Ses termes sont injectifs, et on a canoniquement un morphisme de complexes $K^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$, qui est un quasi-isomorphisme.

Ainsi tout objet de $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$ est isomorphe en catégorie dérivée à l'image par Q d'un objet de $\mathrm{I}^+(\mathcal{A})$.

De plus, si on se donne, en catégorie dérivée, un morphisme $g : I \to J$, où I et J sont deux complexes à termes injectifs, cohomologiquement bornés à gauche, on peut le représenter sous la forme $g = Q(f)\,Q(s)^{-1}$, où s est un quasi-isomorphisme

$$I \xleftarrow{s} M \xrightarrow{f} J\ .$$

On montre alors que le morphisme g se relève directement en un morphisme unique « à homotopie près » dans $\mathrm{K}(\mathcal{A})$.

Ceci termine la démonstration.

On a de même la notion de résolution projective, qui est un quasi-isomorphisme $P^\bullet \longrightarrow K^\bullet$, avec $P^\bullet$ un complexe dont les objets sont projectifs (un objet P de $\mathcal{A}$ est dit projectif si le foncteur $\hom(P, -)$ est exact à droite). On dit que $\mathcal{A}$ possède suffisament de projectifs si tout objet est quotient d'un projectif. Quand c'est le cas, tout complexe borné à droite possède une résolution projective.

2.6 Foncteurs dérivés

On supposera désormais que $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'injectifs. On se donne F un foncteur additif de $\mathcal{A}$ dans une autre catégorie abélienne $\mathcal{B}$.

Le foncteur F se prolonge naturellement sur la catégorie $\mathrm{I}^+(\mathcal{A})$. Et puisque la catégorie $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$ est équivalente à $\mathrm{I}^+(\mathcal{A})$, on peut y prolonger F en un foncteur « dérivé à droite » RF.

En pratique, étant donné un complexe K, cohomologiquement borné à gauche, on s'en donne une résolution injective I, et on pose :

$$RF(K) = F(I) \ .$$

On a ainsi défini un foncteur triangulé de $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$ dans $\mathrm{D}^+(\mathcal{B})$

Pour un objet A de $\mathcal{A}$, on notera $R^iF(A)$ l'objet $\mathcal{H}^i(RF(A))$. Si F est exact à gauche, on a $R^0F(A) = F(A)$.

On dit qu'un objet de $\mathcal{A}$ est F-acyclique si, pour tout $i > 0$, son image par R^iF est nulle. Si le foncteur F est exact à gauche, il peut se calculer à l'aide des objets acycliques. Soit en effet K est un complexe d'objets de $\mathcal{A}$ cohomologiquement borné à gauche, on appelle résolution F-acyclique de K un quasi-isomorphisme $K \xrightarrow{\varepsilon} L$, où L est un complexe à termes F-acycliques ; on a alors :

$$RF(K) = F(L) \ .$$

On dit que le foncteur F est de dimension cohomologique finie s'il existe un entier naturel n tel que, pour $i > n$ et tout $A \in \mathcal{A}$, $R^iF(A) = 0$.

Si la catégorie $\mathcal{A}$ possède suffisament de projectifs, on peut de même définir le foncteur dérivé gauche de F, noté

$$LF : \mathrm{D}^-(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{D}^-(\mathcal{B}) .$$

On pose $L^iF(A) = \mathcal{H}^{-i}(LF(A))$. Si F est exact à droite, on $L^0F = F$, et LF se calcule au moyen de résolutions F-(gauche)-acycliques. En pratique, on manquera souvent de projectifs, et on cherchera à les remplacer par une classe d'objets acycliques convenable.

2.7 Suites spectrales

On reprend l'article [?].

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Une suite spectrale à valeurs dans $\mathcal{A}$ est la donnée :

(1) pour $r \geqslant 0$, de complexes $\left(E_r^{p,q}\right)_{p,q\in\mathbb{Z}}$ d'objets de $\mathcal{A}$ avec différentielles $d_r^{p,q}$ de degré $(r,-r+1)$, tels que

(i) on ait des isomorphismes

$$E_{r+1}^{p,q} \xrightarrow{\sim} \ker d_r^{p,q} \big/ \operatorname{im}\, d_r^{p-r,q+r-1} \ ;$$

(ii) pour tout couple (p,q), on ait, pour $r \gg 0$, $d_r^{p,q} = 0$ et $d_r^{p-r,q+r-1} = 0$, si bien que $E_r^{p,q}$ est stationnaire de limite $E_\infty^{p,q}$;

(2) d'une famille $\left(E^n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'objets de $\mathcal{A}$, munis de filtrations $E^n = E_{-\infty}^n \supset \ldots \supset E_p^n \supset E_{p+1}^n \supset \ldots \supset E_\infty^n = 0$ (stationnaires en $-\infty$ et ∞), tels qu'on ait des isomorphismes

$$E_\infty^{p,q} \xrightarrow{\sim} E_p^{p+q} \big/ E_{p+1}^{p+q} \ .$$

Notons, d'après cette définition, que si, pour un entier n donné et un certain $r \geqslant 1$, il existe un seul couple d'entiers p et q de somme n tel que $E_r^{p,q}$ soit non nul, alors E^n est isomorphe à $E_\infty^{p,q}$.

La suite spectrale associée à un double complexe

Soit $\left(A^{pq}\right)_{p,q\in\mathbb{Z}}$ un double complexe d'objets de $\mathcal{A}$, borné inférieurement en p et q. Soit $\left(B^n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ le complexe simple associé. On le munit de la filtration $B_p^n = \bigoplus_{i\geqslant p} A^{i,n-i} \supset B_{p+1}^n$, qui est compatible à la différentielle ($d\left(B_p^n\right) \subset B_p^{n+1}$).

Il existe une suite spectrale dont les premiers termes sont

- $E_1^{pq} = \ker d_h^{p,q} \big/ \operatorname{im}\, d_h^{p,q-1}$, avec la différentielle de degré $(1,0)$ induite par d_v et notée ${}'d_v$;
- $E_2^{pq} = \ker {}'d_v^{p,q} \big/ \operatorname{im}\, {}'d_v^{p-1,q}$;

et dont l'aboutissement est

- $E^n = \mathcal{H}^n\left(B^\bullet\right)$, avec la filtration induite par celle de $B^\bullet$.

Cette suite spectrale est à la base de la construction de la suite spectrale d'un foncteur dérivé. Si $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ est un foncteur additif et exact à gauche, alors, pour $K \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ on a une suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = R^pF\left(\mathcal{H}^qK\right) \quad \Rightarrow \quad E^{p+q} = \mathcal{H}^{p+q}\left(RF\,K\right) \ .$$

Ceci permet d'étudier la composition de deux foncteurs dérivés. Si on a trois catégories abéliennes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et deux foncteurs $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ additifs, exacts à gauches ; si de plus l'image par F d'un objet injectif de $\mathcal{A}$ est un objet G-acyclique de $\mathcal{B}$, alors :

$$R\left(G\circ F\right) = RG \circ RF \ .$$

Remarquons, comme une conséquence de ces suites spectrales, que si un foncteur F, additif et exact à gauche, est de dimension cohomologique finie, alors son foncteur dérivé droit transforme les complexes cohomologiquement bornés en complexes cohomologiquement bornés. On a donc un foncteur

$$RF : \mathrm{D}^b(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{D}^b(\mathcal{B}).$$

3 La catégorie dérivée de $\mathcal{M}od_A(X)$

3.1 La catégorie $\mathrm{D}(X, A)$ et les foncteurs dérivés

Désormais k désigne un corps, et X est un schéma de type fini sur k, muni de la topologie étale. On se donne un nombre premier l, premier à la caractéristique de k, et un anneau A de l-torsion, c'est-à-dire en pratique une $\mathbb{Z}/_{l^n\mathbb{Z}}$-algèbre. Ainsi les faisceaux envisagés seront-ils de l-torsion.

On note $\mathrm{D}(X, A)$ la catégorie dérivée de la catégorie $\mathcal{M}od_A(X_{ét})$ des faisceaux de A-modules sur X.

On dit qu'un faisceau $\mathcal{F}$ sur X est injectif si c'est un objet injectif de $\mathcal{M}od_A(X_{ét})$. La catégorie $\mathcal{M}od_A(X_{ét})$ possède suffisamment d'injectif, ce qui permet de définir des foncteurs dérivés à droite. Pour f un morphisme de schémas, comme le foncteur f_* possède un adjoint à gauche qui est un foncteur exact, il transforme les faisceaux injectifs en faisceaux injectifs.

On notera $H^i(X, -)$ le i-ème foncteur dérivé droit $R^i\Gamma(X, -)$. On appellera dimension cohomologique de X la dimension cohomologique du foncteur $\Gamma(X, -)$, et on dira qu'un faisceau sur X est acyclique s'il est $\Gamma(X, -)$-acyclique.

Soit Y un autre k-schéma de type fini et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de type fini. Le foncteur f^*, qui est exact, se prolonge directement à $\mathrm{D}(X, A)$ en un foncteur que l'on notera f^* ou Rf^* pour rappeler qu'on est en catégorie dérivée. On a par ailleurs le foncteur dérivé à droite Rf_* de $\mathrm{D}^+(X, A)$ dans $\mathrm{D}^+(Y, A)$. Rf^* est adjoint à gauche de Rf_*.

Si on étudie ce dernier foncteur au niveau des fibres, en se référant aux notations de **??**, obtient, pour $\bar{y}$ un point géométrique de Y et $X_{\bar{y}} \xrightarrow{u} X$ le morphisme obtenu par changement de base de $Y_{\bar{Y}} \longrightarrow Y$, et pour $\mathcal{F}$ un faisceau de A-modules sur X :

$$\left(R^i f_* \mathcal{F}\right)_{\bar{y}} = H^i\left(X_{\bar{y}}, u^* \mathcal{F}\right)$$

3.2 Faisceaux et résolutions flasques

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X, et $\mathcal{U} = (U_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ un recouvrement fini de X par des schémas étales. On appelle complexe de Čech de $\mathcal{F}$ associé au recouvrement $\mathcal{U}$ le complexe de A-modules nul en degrés négatifs, et défini comme suit. Pour $p \geqslant 0$, on pose

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{1 \leqslant j_0 < \ldots < j_p \leqslant n} \mathcal{F}\left(U_{j_0} \times_X \ldots \times_X U_{j_p}\right).$$

Et, pour $s = \left(s_{j_0,\ldots,j_p}\right)_{1\leqslant j_0<\ldots<j_p\leqslant n}$ un élément de $\check{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, on définit sa différentielle $d^p s \in \check{C}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ par :

$$[d^p s]_{j_0,\ldots,j_{p+1}} = \sum_{\alpha=1}^{p+1} \left(s_{j_0,\ldots,\hat{j_\alpha},\ldots,j_p}\right)_{|U_{j_0}\times_X\ldots\times_X U_{j_{p+1}}}.$$

On appelle alors p-ième module de cohomologie de Čech de $\mathcal{F}$ pour le recouvrement $\mathcal{U}$, et on note $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, le p-ième module de cohomologie de ce complexe.

Il est déjà clair que $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$. On montre que, pour tout p, la limite inductive sur tous les recouvrements $\mathcal{U}$ des $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ est égale à $H^p(X,\mathcal{F})$ (foncteur de cohomologie défini précédemment).

On dit qu'un faisceau F de A-modules sur X est flasque si, pour tout schéma U étale au-dessus de X, tout recouvrement fini $\mathcal{U}$ de U par des schémas étales, et tout $p > 0$, le module de cohomologie de Čech $\check{H}^p\left(U, F_{|U}\right)$ est nul. Tout faisceau injectif est flasque.

Etant donné un faisceau F quelconque, il se plonge canoniquement dans un faisceau flasque $C^0(F)$ défini, pour U un schéma étale au-dessus de X, par :

$$\Gamma\left(U, C^0(F)\right) = \prod_{x\in U} F_{\bar{x}} \quad \text{(où } \bar{x} \text{ est un point géométrique au}-\text{dessus de } x \text{).}$$

On peut continuer en plongeant $C^0(F)/F$ dans le faisceau $C^1(F) = C^0\left(C^0(F)/F\right)$, *etc.* On obtient ainsi une résolution flasque canonique du faisceau F, la résolution de Godement :

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow C^0(F) \longrightarrow C^1(F) \longrightarrow C^2(F) \longrightarrow \cdots$$

Les foncteurs C^p ainsi définis sont exacts, ainsi que les foncteurs $\Gamma(U, C^p(-))$, pour U étale au-dessus de X.

Un faisceau flasque est f_*-acyclique, et son image par f_* est flasque.

3.3 La suite spectrale de Leray

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de type fini et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X ; on a une suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_*\mathcal{F}) \quad \Rightarrow \quad E^{p+q} = H^{p+q}(X,\mathcal{F})$$

Démonstration

Soit $I^\bullet$ une résolution injective de $\mathcal{F}$; son image par f_* est un complexe de faisceaux injectifs sur Y. Considérons le complexe double $K^{\bullet\bullet}$ défini par $K^{p,q} = \Gamma(Y, C^p(f_* I^q))$. Calculons la suite spectrale qui lui est associée. Puisque le foncteur $\Gamma(X, C^p(-))$ est exact, on a :

$$E_1^{p,q} = \Gamma(Y, C^p(\mathcal{H}^q(f_* I^\bullet))) = \Gamma(Y, C^p(R^q f_*\mathcal{F}))$$

Et puisque $C^\bullet$ fournit une résolution f_*-acyclique, on a :

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_*\mathcal{F})$$

Considérons maintenant le complexe « transposé » défini par $L^{p,q} = K^{q,p}$. La suite spectrale qui lui est associé (notée $'E$) a bien sûr le même aboutissement E^{p+q} (à la filtration près). Calculons la :

$$'E_1^{p,q} = H^q(Y, f_*I^p)$$

Mais comme les f_*I^p sont injectifs, donc acycliques, on a $'E_1^{p,q} = 0$ dès que q est non nul. En présentant les suites spectrales, on a remarqué que ceci implique $E^p =' E_\infty^{p,0} =' E_2^{p,0}$. Or on a $'E_1^{p,0} = \Gamma(Y, f_*I^p) = \Gamma(X, I^p)$, d'où $'E_2^{p,0} = H^p(X, \mathcal{F})$.

Ceci prouve l'existence de la suite spectrale de Leray.

3.4 Le théorème de changement de base pour un morphisme propre

Théorème 2 *Soit un carré cartésien de schémas*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

et $\mathcal{F}$ un faisceau de A-modules sur X. Alors si f est propre, et $\mathcal{F}$ de torsion (par exemple si l'anneau A est de torsion), on a un isomorphisme naturel

$$R^i f'_*(v^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} u^*\left(R^i f_*\mathcal{F}\right).$$

Ce théorème est démontré par Artin dans [?], t.3.

3.5 Questions de dimension cohomologique

Nous donnons ces deux résultats sans démonstration. Le premier est démontré dans [?], p.94 ; le second dans [?], à l'annexe D.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas de type fini sur un corps k. Si on suppose que la dimension des fibres de f est majorée par un entier d, alors la dimension cohomologique du foncteur $f_!$ est inférieure à $2d$, ce qui servira pour la construction du foncteur $f^!$.

Dans tous les cas, la dimension cohomologique du foncteur f_* est finie, ce qui signifie que Rf_* respecte les catégories dérivées bornées.

3.6 Les bifoncteurs dérivés $R\mathcal{H}\mathrm{om}$ et $\overset{L}{\otimes}$

On peut construire un « foncteur dérivé à droite » du bifoncteur $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{A}b(X_{\acute{e}t})}(-,-)$. Etant donnés deux complexes de faisceaux $K^\bullet$ et $L^\bullet$, considéré dans $\mathrm{C}(\mathcal{M}od_A(X_{\acute{e}t}))$, on étend le foncteur $\mathcal{H}\mathrm{om}$ en un foncteur $\mathcal{H}\mathrm{om}^\bullet$, en posant :

$$[\mathcal{H}\mathrm{om}(K^\bullet, L^\bullet)]^n = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}\mathrm{om}\left(K^i, L^{i+n}\right)$$

Remarquons que si le complexe $K^\bullet$ est borné à droite et le complexe $L^\bullet$ borné à droite, le terme de droite de cette définition est en fait un produit fini.

Maintenant, considérant K et L comme des éléments de la catégorie dérivée, et supposant L cohomologiquement borné à gauche, on se donne une résolution injective I de L, et on pose :

$$R\mathcal{H}\text{om}\,(K, L) = \mathcal{H}\text{om}\,(K, I)$$

Si de plus K est cohomologiquement borné à droite, on peut se ramener, à quasi-isomorphisme près, au cas précédent où le foncteur est défini par un produit fini. Ceci sera utile dans la suite pour montrer que le foncteur $R\mathcal{H}\text{om}$ préserve la sous-catégorie des complexes constructibles. On considérera donc qu'on a défini un foncteur

$$R\mathcal{H}\text{om}\,(-,-) : \mathrm{D}^-\,(X, A)^{op} \times \mathrm{D}^+\,(X, A) \longrightarrow \mathrm{D}\,(X, A)\,.$$

Si F et G sont des faisceaux de A-modules sur X, on pose, pour un entier p :

$$Ext^p\,(F, G) = \mathcal{H}^p\,(R\,\mathrm{hom}\,(F, G))\,.$$

On a donc une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = Ext^p\,(K, \mathcal{H}^q L) \quad \rightsquigarrow \quad E^n = \mathcal{H}^n\,(R\mathcal{H}\text{om}\,(K, L))\;\;.$$

Il est plus délicat de définir le foncteur dérivé à gauche du bifoncteur $- \otimes -$, qui est exact à droite en ses deux variables. En effet, la catégorie $\mathcal{M}od_A\,(X_{ét})$ n'a en général pas suffisamment de projectifs. On appelle A-faisceau plat sur X un faisceau dont toutes les fibres aux points géométriques de X sont des A-modules plats. Tout faisceau de A-modules sur X peut s'écrire comme quotient d'un tel faisceau. On utilisera, comme on l'a indiqué précédemment, la classe des faisceau plats comme classe d'objets acycliques.

Etant donné deux complexes de faisceaux de A-modules K et L, cohomologiquement bornés à droite, on se donne une résolution P de K par un complexe à termes plats. On pose :

$$K \overset{L}{\otimes}_A L = P \otimes_A L$$

Si F et G sont des faisceaux de A-modules sur X, on pose pour $p \in \mathbb{N}$

$$Tor_p^A\,(F, G) = \mathcal{H}^{-p}\left(F \overset{L}{\otimes}_A G\right).$$

On dit que K est de Tor-dimension finie si le foncteur $K \otimes_A -$ est de dimension cohomologique finie.

3.7 Le foncteur image inverse exceptionnelle

On se donne maintenant un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ entre deux schémas de type fini sur un corps k. Soit d le maximum de la dimension des fibres de f. On sait que $f_!$ est de dimension cohomologique inférieure à $2d$. Un faisceau F sur X est dit f-mou si, pour tout schéma U étale au-dessus de X, le faisceau F_U est $f_!$-acyclique. Puisque $f_!$ est de dimension cohomologique finie, tout faisceau de A-modules sur X admet une résolution f-molle finie.

Soit L un complexe de faisceaux de A-modules sur Y, et I une résolution injective de L. Soit K une résolution finie du faisceau constant A sur X par des faisceaux f-mous. On définit le complexe « image inverse exceptionnelle » de L, noté $f^!L$, par (U étale au dessus de X) :

$$\Gamma\left(U, \left(f^!L\right)^p\right) = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \hom\left(\left(f_!K_U\right)^i, I^{i+p}\right).$$

On obtient ainsi un complexe de préfaisceaux qui est en fait un complexe de faisceaux flasques, ne dépendant pas, à isomorphisme canonique près, du choix de K.

Le foncteur $f^!$ ainsi défini possède un adjoint à gauche, que l'on note $Rf_!$. Attention, ce foncteur n'est pas en général le foncteur dérivé droit du foncteur $f_!$ que l'on vient d'utiliser, que l'on préfèrera noter $R\left(f_!\right)$. Ces deux foncteurs coïncident par exemple sur les complexes concentrés en un seul degré, où leur faisceau de cohomologie est constant de type fini.

Dans le cas particulier où f est l'immersion d'un sous-schéma X de Y, cependant, $f^!$ est le dérivé droit du foncteur des sections à support dans X, et $Rf_!$ est le dérivé droit de $f_!$. Si f est un morphisme fini, on a aussi $Rf_! = Rf_* = R\left(f_!\right)$.

La propriété d'adjonction, si on l'écrit pour tout schéma étale au-dessus de X, donne un isomorphisme canonique :

$$Rf_*\, R\mathcal{H}\mathrm{om}\left(K, f^!L\right) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}\mathrm{om}\left(Rf_!K, L\right) \ .$$

Dans le cas où f est l'immersion d'un sous-schéma, on avait déjà construit un foncteur $f^! : \mathcal{M}od_A\left(Y_{ét}\right) \longrightarrow \mathcal{M}od_A\left(X_{ét}\right)$, adjoint à droite de $f_!$. Par unicité de l'adjoint, le foncteur ici construit est son dérivé à droite. Par contre, si on n'est pas dans ce cas, le foncteur $f^!$ n'est en général pas un foncteur dérivé.

3.8 Etude des immersions ouvertes

Soit X un schéma de type fini sur un corps k, $U \xrightarrow{j} X$ l'immersion d'un ouvert de X, et $F \xrightarrow{i} X$ l'immersion du fermé complémentaire. On va étudier plus en détail dans cette situation les objets qui viennent d'être définis.

Comme les foncteurs « image inverse exceptionnelle » associés à i et j sont les dérivés droits des foncteurs « sections à support dans ... » associés, on notera les derniers $i^!$ et $j^!$, et les premiers $Ri^!$ et $Rj^!$. Le morphisme i est propre, donc $i_* = i_!$ (foncteur exact) ; j est une immersion ouverte, donc $j^! = j^*$ (foncteur exact). Les foncteurs i^* et $j_!$ (appelé prolongement par 0 en dehors de U) sont également exacts.

On a donc, en catégories dérivées, les foncteurs :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}\left(F, A\right) \arrow[r, "Ri_*=Ri_!"] & \mathrm{D}\left(X, A\right) \arrow[l, bend right=60, "Ri^!"'] \arrow[l, bend left=60, "Ri^*"] \arrow[r, "Rj^!=Rj^*"] & \mathrm{D}\left(U, A\right) \arrow[l, bend right=60, "Rj_*"'] \arrow[l, bend left=60, "Rj_!"]
\end{tikzcd}$$

On n'utilisera plus les notations $Rj^!$ et $Ri_!$, mais seulement Rj^* et Ri_*.

Parmi eux, on a quatre couples de foncteurs adjoints : (Ri^*, Ri_*), $\left(Ri_*, Ri^!\right)$, (Rj^*, Rj_*), $(Rj_!, Rj^*)$.

Si K est un complexe de faisceaux de A-modules sur U, on en déduit des morphismes d'adjonction, dont on montre par calcul explicite que ce sont des isomorphismes :

$$Rj^*Rj_*K \xrightarrow{\sim} K \xrightarrow{\sim} Rj^*Rj_!K$$

(ce qu'on exprime en disant que Rj_*K et $Rj_!K$ sont des prolongements de K à X).

Si K est un complexe de faisceaux de A-modules sur F, on a de même des isomorphismes :

$$Ri^*Ri_*K \xrightarrow{\sim} K \xrightarrow{\sim} Ri^!Ri_*K \ .$$

Ceci prouve que les foncteurs j_*, $j_!$ et i_* sont pleinement fidèles. Par le calcul, on montre aussi $Rj^*Ri_* = 0$, d'où on déduit par adjonction $Ri^*Rj_! = Ri^!Rj_* = 0$.

Si K est un A-complexe sur X, les morphismes d'adjonction se complètent en triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
& Ri_*Ri^*K \arrow[dl, "1"'] & \\
Rj_!Rj^*K \arrow[rr] & & K \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& Rj_*Rj^*K \arrow[dl, "1"'] & \\
Ri_*Ri^!K \arrow[rr] & & K \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

(la propriété pour un triangle d'être distingué étant au niveau des germes, il suffit de le vérifier pour leurs restrictions à U et F ; c'est alors une conséquence des égalités calculées précédemment).

Deuxième partie
Les faisceaux pervers dans $D_c^b\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$

4 La catégorie des $\bar{\mathbb{Q}}_l$-complexes constructibles sur X

A partir de maintenant, k est un corps fixé, dont k_s est une clôture séparable, et $\bar{k}$ une clôture algébrique. On supposera que k est un corps fini, ou une clôture algébrique d'un corps fini. L'entier l est un nombre premier, premier à la caractéristique de k. X est un k-schéma de type fini.

4.1 $\bar{\mathbb{Q}}_l$ et les corps locaux

Soit $\mathbb{Z}_l = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers l-adiques. C'est un anneau intègre. Son corps des fractions $\mathbb{Q}_l$ est de caractéristique nulle ; c'est un corps de valuation discrète pour la valuation v_l, de corps résiduel $\mathbb{F}_l$.

Soit L un corps de valuation discrète, de caractéristique nulle, dont le corps résiduel est une extension finie de $\mathbb{F}_l$; alors L est une extension finie de $\mathbb{Q}_l$, et réciproquement. On note alors Λ l'anneau des entiers de L, c'est-à-dire la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans L. On note $\mathfrak{M}$ son idéal maximal, et κ son corps résiduel. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\mathfrak{M}^i/\mathfrak{M}^{i+1} \simeq \kappa$. De plus Λ est limite projective des $\Lambda/\mathfrak{M}^i$, $i \in \mathbb{N}$.

Une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_l$ de $\mathbb{Q}_l$ est réunion filtrante des tels L.

4.2 κ-faisceaux et κ-complexes $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructibles

Soit κ le corps $\mathbb{F}_l$, ou plus généralement une extension finie de $\mathbb{F}_l$. On définit la notion de κ-faisceau constructible pour se ramener à des objets plus faciles à étudier ; dans la pratique on est toujours dans cette situation, ou on s'y ramène.

Pour cela, on se donne une stratification $\mathcal{S}$ de X, c'est-à-dire une partition finie de X en sous-schémas localement fermés et connexes S, qu'on appelle les strates. De plus, on exige que pour tout S, la réduite de $S \times_k \bar{k}$ soit lisse (S essentiellement lisse), et que l'adhérence d'une strate soit réunion de strates (dans la suite, on notera souvent s l'immersion d'une strate S dans X, sans rappeler la notation s'il n'y a pas d'ambiguité).

Sur chaque strate S de $\mathcal{S}$, on se donne une famille finie $\mathcal{L}(S)$ d'éléments irréductibles de la catégorie des faisceaux localement constants de type fini[1] de κ-modules sur S. On demande que le système $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ vérifie l'hypothèse :

> *(H) Pour tout $S \in \mathcal{S}$, dont on notera s l'inclusion dans X, pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(S)$, pour tout $q \in \mathbb{N}$, et pour toute strate T contenue dans l'adhérence de S, le faisceau $(R^q s_* \mathcal{F})_{|T}$ est extension successive finie de faisceaux de $\mathcal{L}(T)$.*

[1] L'hypothèse «de type fini» est peut-être inutile, s'il existe un théorème assurant que tout élément irréductible de la catégorie des faisceaux localements constant est de type fini.

Si c'est le cas, on l'appellera (H)-système (c'est une terminologie personnelle).

Un faisceau $\mathcal{F}$ de κ-modules sur X est dit $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible si pour toute strate S de $\mathcal{S}$, $s^*\mathcal{F}$ est localement constant sur S, et s'il existe une filtration finie $0=\mathcal{G}_0\subset\mathcal{G}_1\subset\ldots\subset\mathcal{G}_n=s^*\mathcal{F}$ telle que, pour tout i, $1\leqslant i\leqslant n$, le faisceau ${\mathcal{G}_i}/{\mathcal{G}_{i-1}}$ soit isomorphe à un élément de $\mathcal{L}(S)$.

Etant donnés deux systèmes $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ et $(\mathcal{S}',\mathcal{L}')$, on dit que $(\mathcal{S}',\mathcal{L}')$ raffine $(\mathcal{S},\mathcal{L})$, et on note $(\mathcal{S}',\mathcal{L}')\prec(\mathcal{S},\mathcal{L})$ si, pour toute strate S de $\mathcal{S}$:

(a) *S est réunion de strates de $\mathcal{S}'$;*

(b) *en notant $(\mathcal{S}'_S,\mathcal{L}'_S)$ la restriction de $(\mathcal{S}',\mathcal{L}')$ à S, pour tout faisceau $\mathcal{F}\in\mathcal{L}(S)$, $\mathcal{F}$ est $(\mathcal{S}'_S,\mathcal{L}'_S)$-constructible.*

On sait que, même si $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ ne vérifie pas l'hypothèse *(H)*, il existe $(\mathcal{S}',\mathcal{L}')$ qui le raffine et qui vérifie *(H)*. C'est un résultat très puissant. On en déduit que, étant donnés deux *(H)*-systèmes $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ et $(\mathcal{S}',\mathcal{L}')$, il en existe un troisième, $(\mathcal{S}'',\mathcal{L}'')$, qui les raffine tous les deux.

On dit qu'un complexe K de κ-faisceaux sur X est $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible s'il est cohomologiquement borné et si ses faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^iK$ sont $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructibles.

Si $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ est un *(H)*système, et si U et V sont deux sous-schémas localement fermés de X, réunions de strates, avec $U\subset V$ et j l'inclusion de U dans V, et q un entier, les foncteurs Rj_*, Rj^*, $Rj_!$, $Rj^!$ envoient complexes constructibles sur complexes constructibles.

Démonstration

étape 1. Remarquons tout d'abord que la catégorie des faisceaux $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructibles sur X est une sous-catégorie abélienne, stable par extensions, de la catégorie $\mathcal{M}od_\kappa(X_{ét})$.

Par conséquent la sous-catégorie des complexes $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructibles sur X, qui est stable par translation, est aussi stable par extensions (triangulées).

Soit en effet un triangle distingué $K'\longrightarrow K\longrightarrow K''\xrightarrow{(1)}$, avec K' et K'' constructibles. K est alors cohomologiquement borné, et on a une longue suite exacte de cohomologie :

$$\mathcal{H}^{q-1}K''\longrightarrow\mathcal{H}^qK'\longrightarrow\mathcal{H}^qK\longrightarrow\mathcal{H}^qK''\longrightarrow\mathcal{H}^{q+1}K'$$

Elle montre que le faisceau $\mathcal{H}^qK$ est extension du noyau d'un morphisme de faisceaux constructibles par le quotient d'un morphisme de faisceaux constructibles, donc est lui aussi constructible, ce qu'il fallait démontrer.

(dans le cours de la démonstration, «constructible» signifiera «$(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible»)

étape 2. Le fait que V soit un sous-schéma de X ne change rien au problème, on peut donc supposer $V=X$. Pour une strate S de X, on notera s son immersion dans X et (s'il y a lieu) s_U son immersion dans U.

Soit donc K un complexe constructible sur X, et $q\in\mathbb{N}$. Comme j^* est exact, $\mathcal{H}^qRj^*K=j^*\mathcal{H}^qK$. Si S est une strate contenue dans U, alors $s_U^*\left(\mathcal{H}^q\,Rj^*K\right)\simeq s^*\left(\mathcal{H}^qK\right)$. Le complexe Rj^*K sur U est donc constructible.

Soit maintenant K un complexe constructible sur U, et $q \in \mathbb{N}$. Comme j^*, $j_!$ est exact, donc $H^q Rj_! K = j_! H^q K$. Soit S une strate de X : ou bien S est contenue dans U, auquel cas $s^* j_! H^q K = s_U^* H^q K$ est constructible ; ou bien S est contenu dans le complémentaire de U, auquel cas $s^* j_! H^q K = 0$. Le complexe $Rj_! K$ sur X est donc bien constructible.

étape 3. Traitons maintenant le cas de $Rj_* K$. Comme j_* est de dimension cohomologique finie, c'est un complexe cohomologiquement borné.

Supposons d'abord que U est réduit à une strate, et que K est égal à un faisceau $\mathcal{F}$ placé en degré 0. $\mathcal{F}$ est constructible, il existe donc une filtration $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_k = \mathcal{F}$, dont les quotients successifs sont dans $\mathcal{L}(U)$. Montrons par récurrence sur k que $Rj_* K$ est constructible.

Si $k = 1$, c'est l'hypothèse *(H)*. Supposons que c'est démontré aux ordres inférieurs à $k-1$, et appelons K' (resp. K'') le complexe égal en degré 0 à $\mathcal{F}_{k-1}$ (resp. $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{k-1}$). Ce sont des complexes constructibles, et par hypothèse de récurrence, $Rj_* K'$ et $Rj_* K''$ sont constructibles. On a une suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{F}_{k-1} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}_{k-1} \longrightarrow$ dont on déduit un triangle distingué $K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \xrightarrow{1}$. Son image par Rj_* est encore distinguée, ce qui permet de conclure.

Grâce à la suite spectrale

$$R^p j_* \left(\mathcal{H}^q K\right) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q} \left(Rj_* K\right),$$

on en déduit le résultat pour K quelconque.

Supposons maintenant que U est réunion de n strates, et supposons avoir prouvé le résultat pour un sous-schéma réunion d'au plus $n-1$ strates. Soit S une strate ouverte de U, T son complémentaire dans U, et s, t leurs immersions respectives dans U. T est réunion de $n-1$ strates. Par hypothèse de récurrence, $Rs_* Rs^* K$ est constructible. De plus, comme Rs^* est adjoint à gauche de Rs_*, on a canoniquement un morphisme $K \longrightarrow Rs_* Rs^* K$ Soit donc L le cône de ce morphisme. Puisque la catégorie des constructibles est stable par extension et translation, L est constructible. Par application du foncteur triangulé Rs^*, on obtient un triangle distingué :

$$Rs^* K \longrightarrow Rs^* Rs_* Rs^* K \longrightarrow Rs^* L \xrightarrow{1} \quad .$$

Comme la flèche de gauche est un isomorphisme, on en déduit que la restriction de L à S est nulle. Alors, du triangle distingué

$$Rs_! Rs^* L \longrightarrow L \longrightarrow Rt_* Rt^* L \xrightarrow{1} \quad ,$$

on déduit $L = Rt_* Rt^* L$. Par hypothèse de récurrence, et puisque T est réunion de $n-1$ strates, $Rj_* L = R\left(j \circ t\right)_* \left(Rt^* L\right)$ est donc constructible. Par hypothèse de récurrence, $Rj_* \left(Rs_* Rs^* K\right) = R\left(j \circ s\right)_* \left(Rs^* K\right)$ l'est aussi. Grâce à la stabilité par extension, et comme l'image par Rj_* du triangle distingué

$$K \longrightarrow Rs_* Rs^* K \longrightarrow L \xrightarrow{1}$$

est distinguée, on en déduit que $Rj_* K$ est constructible.

étape 4. Il reste à traiter le cas de $Rj^!$. Commençons par observer que j se factorise comme la composée d'une immersion ouverte et d'une immersion fermée : il suffit donc de faire la preuve dans ces deux situations. Si c'est une immersion ouverte, $j^! = j^*$, donc la preuve est déjà faite. Si c'est une immersion fermée, soit k l'immersion de l'ouvert complémentaire. Pour K un complexe constructible sur X, on a un triangle distingué

$$Rj_*Rj^!K \longrightarrow K \longrightarrow Rk_*Rk^*K \xrightarrow{(1)} .$$

Le résultat précédent montre que Rk_*Rk^*K est constructible. Grâce à la stabilité par extensions, $Rj_*Rj^!$ l'est aussi, donc $Rj^!K = Rj^*\left(Rj_*Rj^!K\right)$ aussi.

4.3 Λ-complexes $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructibles : la catégorie $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$

Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_l$, et $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ un *(H)*-système. On utilisera les notations introduites à la section ??. On appelle Λ-complexe $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible une famille $K = (K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) *pour tout n, K_n est un élément de $\mathrm{D}\left(X, {}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^n}\right)$ cohomologiquement borné et de Tor-dimension finie.*

(ii) *Pour tout $m \leqslant n$, $K_n \overset{L}{\otimes}_{\Lambda/\mathfrak{M}^n} {}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^m} = K_m$*

(iii) *pour tout n, pour tout p, $\mathcal{H}^pK_n$ est un ${}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^n}$-faisceau $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible sur X.* [2]

On notera souvent $K_n = K \overset{L}{\otimes}_{\Lambda} {}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^n}$.

Soient $K = (K_n)$ et $K' = (K'_n)$ deux Λ-complexes $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructibles. On pose

$$\hom_{\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)}(K,K') = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \hom_{\mathrm{D}^b\left(X,\Lambda/\mathfrak{M}^n\right)}(K_n,K'_n).$$

Pour $i\in\mathbb{Z}$, on définit le i-ème « faisceau » de cohomologie de K, noté $\mathcal{H}^iK$, comme étant le système projectif $(\mathcal{H}^iK_n)$, qui vit dans la catégorie limite projective des $\mathcal{M}od_{\Lambda/\mathfrak{M}^n}(X_{\acute{e}t})$.

Supposons maintenant que L'' est une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ contenant L et $(\mathcal{S}'',\mathcal{L}'')$ un *(H)*-système raffinant $(\mathcal{S},\mathcal{L})$. Alors on a canoniquement un foncteur pleinement fidèle, noté $-\overset{L}{\otimes}_{\Lambda}\Lambda''$, de $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$ dans $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S}'',\mathcal{L}'')}(X,\Lambda'')$.

4.4 $\bar{\mathbb{Q}}_l$-complexes constructibles

Pour finir, un $\bar{\mathbb{Q}}_l$-complexe constructible sur X est la donnée :

(i) *d'une extension finie L de $\mathbb{Q}_l$, d'anneau des entiers Λ et de corps résiduel κ ;*

[2]Un ${}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^n}$-faisceau $\mathcal{F}$ sur X est dit $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible si, pour tout $m<n$, ${}^{\mathfrak{M}^m\mathcal{F}}\!/\!_{\mathfrak{M}^{m+1}\mathcal{F}}$ est un κ-faisceau $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible.

(ii) d'un (H)*-système* $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ *;*

(iii) d'un Λ*-complexe* $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$*-constructible.*

On note $\mathrm{D}_c^b\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$ la catégorie des $\bar{\mathbb{Q}}_l$-complexes constructibles sur X, avec les morphismes définis comme suit : si $\left(L, (\mathcal{S}, \mathcal{L}), K = (K_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ et $\left(L', (\mathcal{S}', \mathcal{L}'), K' = (K'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ sont deux tels complexes, on se donne :

(i) L'' une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ contenant L et L' comme sous-extensions, Λ'' son anneau des entiers et κ'' son corps résiduel ;

(ii) $(\mathcal{S}'', \mathcal{L}'')$ un *(H)*-système raffinant $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ et $(\mathcal{S}', \mathcal{L}')$;

(iii) $K \overset{L}{\otimes}_\Lambda \Lambda'' := \left(K_n \overset{L}{\otimes}_{\Lambda/\mathfrak{m}^n} \Lambda''/\mathfrak{m}''^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $K' \overset{L}{\otimes}_{\Lambda'} \Lambda'' = \left(K'_n \overset{L}{\otimes}_{\Lambda'/\mathfrak{m}'^n} \Lambda''/\mathfrak{m}''^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$;

et on pose alors :

$$\hom_{\mathrm{D}_c^b\left(X,\bar{\mathbb{Q}}_l\right)}(K, K') = \hom_{\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S}'',\mathcal{L}'')}(X,\Lambda'')}\left(K \overset{L}{\otimes}_\Lambda \Lambda'', K' \overset{L}{\otimes}_{\Lambda'} \Lambda''\right) \otimes_{\Lambda''} \bar{\mathbb{Q}}_l$$

Toutes les constructions qui ont été faites sur $\mathrm{D}(X, A)$, avec ici $A = \Lambda/\mathfrak{m}^n$, peuvent se prolonger sur la catégorie $\mathrm{D}_c^b\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$.

$\mathrm{D}_c^b\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$ est ainsi muni d'une structure de catégorie triangulée, sur laquelle on peut définir les six foncteurs Rf_*, Rf^*, $Rf_!$, $f^!$, $R\mathcal{H}\mathrm{om}$, $\overset{L}{\otimes}$, et les foncteurs $\mathcal{H}^i$, sans perdre leurs propriétés (adjonction, *etc.*).

4.5 Dualité de Grothendieck-Verdier

On définit sur $\mathrm{D}_b^c\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$ un dernier foncteur, contravariant, appelé foncteur de dualité de Grothendieck-Verdier.

X est un k-schéma. Soit donc $c_X : X \longrightarrow \mathrm{Spec}\ k$ la projection canonique. On appelle complexe dualisant de X le complexe $\mathbb{D}_X = c_X^! \bar{\mathbb{Q}}_l$ image inverse exceptionnelle par c_X du faisceau constant $\bar{\mathbb{Q}}_l$ sur Spec k. Pour K un $\bar{\mathbb{Q}}_l$-complexe constructible sur X, on définit alors son dual

$$\mathcal{D}_X K = R\mathcal{H}\mathrm{om}\left(K, \mathbb{D}_X\right).$$

Deligne (dans [SGA 4½]) a montré que le foncteur de dualité de Grothendieck-Verdier est une auto-équivalence de catégorie de la catégorie $\mathrm{D}_c^b\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$, et même vérifie :

$$\mathcal{D}_X\mathcal{D}_X \simeq Id_{\mathrm{D}_c^b\left(X,\bar{\mathbb{Q}}_l\right)}$$

De ce théorème et de l'isomorphisme du paragraphe , on déduit que la dualité de Verdier échange Rf_* et $Rf_!$, Rf^* et $f^!$.

Si X est un schéma essentiellement lisse de dimension d sur k, le complexe dualisant de X est quasi-isomorphe à un faisceau $\mathcal{F}$ placé en degré $-d$, tel que $\mathcal{F}$ soit localement isomorphe au faisceau constant $\bar{\mathbb{Q}}_l$.

5 Faisceaux pervers et t-structure de perversité

Soit K un $\bar{\mathbb{Q}}_l$-complexe constructible sur X ; il est dit pervers si il vérifie, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout point géométrique $\bar{x}$ de X, d'image x :

$$i > \dim x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{H}^i K_{\bar{x}} = 0 \\ \mathcal{H}^i \left(\mathcal{D}_X K\right)_{\bar{x}} = 0 \end{cases}$$

La catégorie des faisceaux pervers sur X est notée $\mathcal{M}\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$. Il est déjà clair que la dualité de Verdier induit une auto-équivalence de catégorie de $\mathcal{M}\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$.

Cette catégorie en elle-même ne nous fournit pas beaucoup d'objets à étudier ; pour mieux la comprendre nous allons introduire la t-structure de perversité.

5.1 t-structures

Soit $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée. Une t-structure (le t signifie « troncature ») sur $\mathcal{D}$ est la donnée de deux sous-catégories strictement pleines[3] $\mathcal{D}^{\leqslant 0}$ et $\mathcal{D}^{\geqslant 0}$ de $\mathcal{D}$ vérifiant les propriétés suivantes (pour $n \in \mathbb{N}$, on a posé $\mathcal{D}^{\leqslant n} = \mathcal{D}^{\leqslant 0}[-n]$ et $\mathcal{D}^{\geqslant n} = \mathcal{D}^{\geqslant 0}[-n]$) :

(t 1) $K \in \mathcal{D}^{\leqslant 0}$ et $L \in \mathcal{D}^{\geqslant 1} \quad \Rightarrow \quad \hom(K, L) = 0$ *;*

(t 2) $\mathcal{D}^{\leqslant 0} \subset \mathcal{D}^{\leqslant 1}$ *et* $\mathcal{D}^{\geqslant 1} \subset \mathcal{D}^{\geqslant 0}$ *;*

(t 3) Il existe deux foncteurs $\tau_{\leqslant 0} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}^{\leqslant 0}$ *et* $\tau_{\geqslant 1} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}^{\geqslant 1}$ *donnant lieu, pour tout* $K \in \mathcal{D}$*, à un triangle distingué :*

$$\tau_{\leqslant 0} K \longrightarrow K \longrightarrow \tau_{\geqslant 1} K \xrightarrow{1} \quad .$$

La t-structure est dite non-dégénérée si

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^{\leqslant n} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^{\geqslant n} = \{0\}$$

(ce qu'on supposera ici).

Les foncteurs $\tau_{\leqslant 0}$ et $\tau_{\geqslant 1}$ sont appelés foncteurs de troncature. On dispose bien sûr de leurs translatés : pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\tau_{\leqslant n} = T^{-n}\, \tau_{\leqslant 0}\, T^n : \mathcal{D} \to \mathcal{D}^{\leqslant n} \quad \text{et} \quad \tau_{\geqslant n} = T^{-(n-1)}\, \tau_{\geqslant 1}\, T^{n-1} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}^{\geqslant n}$$

Les foncteurs $\tau_{\leqslant n}$ et $\tau_{\geqslant n}$ sont respectivement adjoint à droite de l'inclusion de $\mathcal{D}^{\leqslant n}$ dans $\mathcal{D}$, et adjoint à gauche de l'inclusion de $\mathcal{D}^{\geqslant n}$ dans $\mathcal{D}$. Tout triangle distingué

$$K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \xrightarrow{1} \quad ,$$

[3] On dit qu'une sous-catégorie $\mathcal{A}$ d'une catégorie $\mathcal{B}$ est strictement pleine si (i) pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{A}$, $\hom_{\mathcal{A}}(X, Y) = \hom_{\mathcal{B}}(X, Y)$; (ii) tout objet de $\mathcal{B}$ isomorphe à un objet de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$.

avec $K' \in \mathcal{D}^{\leqslant n}$ et $K'' \in \mathcal{D}^{\geqslant n+1}$, est canoniquement isomorphe au triangle

$$\tau_{\leqslant n}K \longrightarrow K \longrightarrow \tau_{\geqslant n+1}K \xrightarrow{1} \quad .$$

Ce résultat est fort : il prouve que l'existence des foncteurs de troncature assure leur unicité.

Ce dernier triangle montre alors qu'on a les équivalences :

$$\begin{array}{lllllll} K \in \mathcal{D}^{\leqslant n} & \Leftrightarrow & K = \tau_{\leqslant n}K & \Leftrightarrow & \tau_{\geqslant n+1} = 0 & \Leftrightarrow & \forall L \in \mathcal{D}^{\geqslant n+1} \quad \hom(K, L) = 0 \\ K \in \mathcal{D}^{\geqslant n} & \Leftrightarrow & K = \tau_{\geqslant n}K & \Leftrightarrow & \tau_{\leqslant n-1} = 0 & \Leftrightarrow & \forall L \in \mathcal{D}^{\leqslant n-1} \quad \hom(L, K) = 0 \end{array}$$

On appelle cœur de la t-structure la sous-catégorie pleine $\mathcal{C} = \mathcal{D}^{\leqslant 0} \cap \mathcal{D}^{\geqslant 0}$. Le cœur d'une t-structure est une sous-catégorie abélienne admissible de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire une sous-catégorie abélienne telle que :

Pour toute suite exacte courte dans $\mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 \quad ,$$

il existe dans $\mathcal{D}$ un triangle distingué

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{1} \quad .$$

Le cœur $\mathcal{C}$ est de plus stable par extension (triangulée).

Démonstration

étape 1. Commençons par remarquer que $\mathcal{D}^{\leqslant n}$ est stable par extension, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Soit en effet un triangle distingué $K \longrightarrow L \longrightarrow M \xrightarrow{1}$, avec K et M dans $\mathcal{D}^{\leqslant n}$. Pour tout objet N de $\mathcal{D}^{\geqslant n+1}$, on a la suite exacte

$$\hom(M, N) \longrightarrow \hom(L, N) \longrightarrow \hom(K, N) \ .$$

Les termes de gauche et de droite sont nuls, donc celui du milieu aussi. Ceci implique $L \in \mathcal{D}^{\leqslant n}$.

De même, $\mathcal{D}^{\geqslant n}$ est stable par extensions. Ceci prouve que le cœur $\mathcal{C}$ est une catégorie additive, stable par extensions.

étape 2. Montrons maintenant l'existence dans $\mathcal{C}$ de noyaux et de conoyaux. Soit donc $f : K \longrightarrow L$ un morphisme entre objets de $\mathcal{C}$, et S son cône. On a donc un triangle distingué

$$L \longrightarrow S \longrightarrow K[1] \xrightarrow{1} \ . \quad (1)$$

Comme L et $K[1]$ sont dans $\mathcal{D}^{\leqslant 0} \cap \mathcal{D}^{\geqslant -1}$, on en déduit que S y est aussi. Posons donc

$$A = (\tau_{\leqslant -1}S)[-1] \quad et \quad B = \tau_{\geqslant 0}S.$$

A et B sont deux éléments du cœur de la t-structure. Ecrivons maintenant, pour N un objet de $\mathcal{C}$, la première suite exacte longue des groupes d'homomorphismes associée à (1) :

$$\hom(N, L[-1]) \longrightarrow \hom(N, S[-1]) \longrightarrow \hom(N, K) \longrightarrow \hom(N, L)\ .$$

D'après les axiomes des t-structures, on a $\hom(N, L[-1]) = 0$ et $\hom(N, S[-1]) = \hom(N, \tau_{\leqslant 0}(S[-1])) = \hom(N, A)$. On obtient donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \hom(N, A) \longrightarrow \hom(N, K) \xrightarrow{f\circ -} \hom(N, L)\ ,$$

qui prouve que A est un noyau de f dans $\mathcal{C}$.

En écrivant la deuxième suite exacte longue des groupes d'homomorphismes, on prouve de même que B est un conoyau de f dans $\mathcal{C}$.

étape 3. Il reste à montrer que ,dans $\mathcal{C}$, l'image est égale à la coimage. Pour cela soit I complétant le diagramme de l'octaèdre que nous fournissent les constructions déjà effectuées :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr] \arrow[rr, phantom, "(1)"', shift right=3ex] & & L \arrow[dl] \arrow[dd] \\
& S \arrow[ul, "1"'] \arrow[dr] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
A[1] \arrow[uu, "1"] \arrow[ur] \arrow[rr, phantom, "(2)", shift left=3ex] & & B \arrow[ll, "1"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"', shift right=3ex] & & L \arrow[dd] \\
& I \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[l, phantom, "(3)"] \arrow[r, phantom, "(4)"] & \\
A[1] \arrow[uu, "1"] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft", shift left=3ex] & & B \arrow[ll, "1"] \arrow[ul, "1"]
\end{tikzcd}$$

Dans le triangle (3), K et $A[1]$ sont dans $\mathcal{D}^{\leqslant 0}$, donc I aussi. Ainsi, si on considère le triangle (4), on a $I = \tau_{\leqslant 0}(c(L \to B)[-1])$, ce qu'on reconnaît comme le noyau du morphisme $L \to B$, c'est-à-dire la coimage de f.

Ceci prouve que I est dans $\mathcal{C}$. Considérant de nouveau le triangle (3), on voit alors que $I = \tau_{\geqslant 0} c(A \to K)$; c'est donc aussi l'image de f.

étape 4. Il est facile alors de prouver que $\mathcal{C}$ est admissible : si on a une suite exacte courte dans $\mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0\ \ ,$$

c'est donc que $\ker f = 0$, et $M = \operatorname{coker} f$ est alors égal au cône de f dans $\mathcal{D}$. On a donc un triangle distingué

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{1}\quad .$$

Si on a une t-structure sur $\mathcal{D}$, avec des foncteurs de troncature $\tau_{\leqslant n}$ et $\tau_{\geqslant n}$, on peut les composer dans n'importe quel ordre : étant donné $a \leqslant b$ et un objet K de $\mathcal{D}$, il existe un unique morphisme faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqslant b} K \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] & \tau_{\geqslant a} \\
\tau_{\geqslant a}\tau_{\leqslant b} \arrow[rr, dotted] & & \tau_{\leqslant b}\tau_{\geqslant a} \arrow[u]
\end{tikzcd}\qquad ,$$

et c'est un isomorphisme. Le foncteur composé $\tau_{\leqslant b}\tau_{\geqslant a}$ se note alors $\tau_{[a,b]}$. Pour $a = b = 0$, on a un foncteur de $\mathcal{D}$ dans le cœur $\mathcal{C}$ de la t-structure, que l'on note ${}^t\mathcal{H}^0$, et pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose ${}^t\mathcal{H}^n = {}^t\mathcal{H}^0 \circ T^{-n}$.

Le foncteur ${}^t\mathcal{H}^0$ est cohomologique, c'est à dire qu'un triangle distingué de $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] & L \arrow[r, "g"] & M \arrow[r, "1"] & {} \end{tikzcd}$$

donne lieu dans $\mathcal{C}$ à une suite exacte ${}^t\mathcal{H}^0K \xrightarrow{{}^t\mathcal{H}^0f} {}^t\mathcal{H}^0L \xrightarrow{{}^t\mathcal{H}^0g} {}^t\mathcal{H}^0M$, donc à une longue suite exacte de t-cohomologie

$$\cdots \longrightarrow {}^t\mathcal{H}^0K \longrightarrow {}^t\mathcal{H}^0L \longrightarrow {}^t\mathcal{H}^0M \longrightarrow {}^t\mathcal{H}^1K \longrightarrow \cdots$$

Soit F un foncteur entre deux catégories triangulées $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ munies chacune d'une t-structure ; on dit que F est t-exact à droite s'il envoie $\mathcal{D}^{\leqslant 0}$ dans $\mathcal{D}'^{\leqslant 0}$, et t-exact à gauche s'il envoie $\mathcal{D}^{\geqslant 0}$ dans $\mathcal{D}'^{\geqslant 0}$.

5.2 Recollement de t-structures

Les hypothèses du théorème se réfèrent bien sûr à la situation décrite au paragraphe **??**.

Théorème 3 (de recollement) *Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_U$ et $\mathcal{D}_F$ trois catégories triangulées, entre lesquels on a des foncteurs :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_F \arrow[r, "i_*=i_!"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend right=60, "i^!"'] \arrow[l, bend left=60, "i^*"] \arrow[r, "j^!=j^*"] & \mathcal{D}_U \arrow[l, bend right=60, "j_*"'] \arrow[l, bend left=60, "j_!"] \end{tikzcd}$$

et vérifiant les conditions :

(a) Tous ces foncteurs sont triangulés ;

(b) (i^*, i_*), $(i_!, i^!)$, $(j_!, j^!)$ et (j^*, j_*) sont des couples de foncteurs adjoints ;

(c) $j^*i_* \left(= j^!i_!\right) = 0$;

(d) pour tout $K \in \mathcal{D}$, il existe des triangles distingués :

$$\begin{tikzcd} & i_*i^*K \arrow[dl, "1"'] & \\ j_!j^!K \arrow[rr] & & K \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & j_*j^*K \arrow[dl, "1"'] & \\ i_!i^!K \arrow[rr] & & K \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

(e) Les foncteurs $i_* = i_!$, j_* et $j_!$ sont pleinement fidèles.

Soient $\left(\mathcal{D}_U^{\leqslant 0}, \mathcal{D}_U^{\geqslant 0}\right)$ *et* $\left(\mathcal{D}_F^{\leqslant 0}, \mathcal{D}_F^{\geqslant 0}\right)$ *des t-structures sur* $\mathcal{D}_U$ *et* $\mathcal{D}_F$.
Alors, en posant :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}^{\leqslant 0} & = & \left\{\; K \in \mathcal{D} \quad | \quad j^*K \in \mathcal{D}_U^{\leqslant 0} \quad \text{et} \quad i^*K \in \mathcal{D}_F^{\leqslant 0} \;\right\} \\ \mathcal{D}^{\geqslant 0} & = & \left\{\; K \in \mathcal{D} \quad | \quad j^!K \in \mathcal{D}_U^{\geqslant 0} \quad \text{et} \quad i^!K \in \mathcal{D}_F^{\geqslant 0} \;\right\} \end{array} \quad ,$$

on obtient une t-structure sur $\mathcal{D}$.

De plus, si les t-structures sur $\mathcal{D}_U$ *et* $\mathcal{D}_F$ *étaient non-dégénérées, alors la t-structure obtenue sur* $\mathcal{D}$ *est aussi non-dégénérée.*

Démonstration

Il est clair que $\mathcal{D}^{\leqslant 0}$ et $\mathcal{D}^{\geqslant 0}$ sont des sous-catégories strictement pleines de $\mathcal{D}$. Il reste à montrer qu'elles vérifient les trois axiomes des t-structures.

1. Soit $K \in \mathcal{D}^{\leqslant 0}$ et $L \in \mathcal{D}^{\geqslant 1}$. Le premier triangle distingué de l'hypothèse (d) du théorème fournit une longue suite exacte :

$$\longrightarrow \hom\left(i_*i^*K, L\right) \longrightarrow \hom\left(K, L\right) \longrightarrow \hom\left(j_!j^!K, L\right) \longrightarrow \cdots$$

   Or, par adjonction, on a $\hom\left(i_*i^*K, L\right) = \hom\left(i^*K, i^!L\right)$. Et comme, par hypothèse, $i^*K \in \mathcal{D}_F^{\leqslant 0}$ et $i^!L \in \mathcal{D}_F^{\geqslant 0}$, ce dernier terme est nul. Par le même raisonnement, $\hom\left(j_!j^!K, L\right) = \hom\left(j^!K, j^!L\right) = 0$, on en déduit $\hom\left(K, L\right) = 0$.
2. Il est clair que $\mathcal{D}^{\leqslant 0} \subset \mathcal{D}^{\leqslant 1}$ et $\mathcal{D}^{\geqslant 0} \supset \mathcal{D}^{\geqslant 1}$.
3. Soit X un objet de $\mathcal{D}$. D'après la définition des catégories triangulées, on sait qu'il existe $Y \in \mathcal{D}$ complétant le triangle distingué $Y \longrightarrow X \longrightarrow j_*\tau_{\geqslant 1}j^*X \xrightarrow{(1)}$, puis $A \in \mathcal{D}$ complétant le triangle distingué $A \longrightarrow Y \longrightarrow i_*\tau_{\geqslant 1}i^*Y \xrightarrow{(1)}$, et enfin $B \in \mathcal{D}$ complétant le diagramme de l'octaèdre :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \arrow[dd] \\ & Y \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[l, phantom, "\star"] \arrow[r, phantom, "\star"] & \\ i_*\tau_{\geqslant 1}i^*Y \arrow[uu, "(1)"] & & j_*\tau_{\geqslant 1}j^*X \arrow[ll, "(1)"] \arrow[ul, "(1)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr] & & X \arrow[dd] \arrow[dl] \\ & B \arrow[ul, "(1)"] \arrow[dr] \arrow[u, phantom, "\star"] \arrow[d, phantom, "\star"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ i_*\tau_{\geqslant 1}i^*Y \arrow[uu, "(1)"] \arrow[ur] & & j_*\tau_{\geqslant 1}j^*X \arrow[ll, "(1)"] \end{tikzcd}$$

   Les objets construits sont bien définis à isomorphisme canonique près. Pour prouver qu'on a ainsi construit les foncteurs de troncature, il reste à vérifier $A \in \mathcal{D}^{\leqslant 0}$ et $B \in \mathcal{D}^{\geqslant 1}$. Pour cela, on applique les foncteurs (exacts) j^*, i^* et $i^!$ aux triangles distingués ci-dessus.
   Ainsi, par exemple, on a $j^*i_* = 0$ et $j^*j_* \simeq Id_{\mathcal{D}_U}$ (car j^* est adjoint à droite du foncteur pleinement fidèle j_*). L'image par j^* du triangle distingué $i_*\tau_{\geqslant 1}i^*Y \longrightarrow B \longrightarrow j_*\tau_{\geqslant 1}j^*X$ est donc isomorphe à un triangle distingué $0 \longrightarrow j^*B \longrightarrow \tau_{\geqslant 1}j^*X \xrightarrow{(1)}$, dont l'existence prouve $j^*B \in \mathcal{D}^{\geqslant 1}$. Les autres résultats s'obtiennent de la même manière.

5.3 La t-structure naturelle sur $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ sa catégorie dérivée ; on définit une t-structure, dite naturelle, sur $\mathrm{D}(\mathcal{A})$, en posant :

$$\begin{cases} \mathrm{D}(\mathcal{A})^{\leqslant 0} = \{\ K \in \mathrm{D}(\mathcal{A}) \quad | \quad \forall i > 0 \quad \mathcal{H}^i K = 0\ \} \\ \mathrm{D}(\mathcal{A})^{\geqslant 0} = \{\ K \in \mathrm{D}(\mathcal{A}) \quad | \quad \forall i < 0 \quad \mathcal{H}^i K = 0\ \} \end{cases},$$

avec les foncteurs de troncature :

$$\begin{cases} \tau_{\leqslant 0} K = (\ \longrightarrow K^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} K^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} \ker d^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow\ ) \\ \tau_{\geqslant 0} K = (\ \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{coker} d^{-1} \xrightarrow{d^0} K^1 \xrightarrow{d^1} K^2 \longrightarrow\ ) \end{cases}$$

Le cœur de cette t-structure naturelle est $\mathcal{A}$, et on a pour tout n ${}^t\mathcal{H}^n = \mathcal{H}^n$.

Ceci nous fournit la t-structure naturelle sur $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}\left(X, \Lambda/\mathfrak{M}^n\right)$.

Il est beaucoup plus difficile de définir une t-structure naturelle sur $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$. On pose bien sûr

$$\mathrm{D}^{\leqslant 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) = \left\{\ K \in \mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) \quad | \quad \forall i > 0 \quad \mathcal{H}^i K = 0\ \right\},$$

et le foncteur de plongement de $\mathrm{D}^{\leqslant 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$ dans $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$ possède bien un adjoint à droit $\tau_{\leqslant 0}$. Malheureusement, on ne peut pas le construire aussi simplement que pour une catégorie dérivée. Deligne le fait dans [?], p. 149.

Il est clair en tout cas que le foncteur canonique de plongement $\mathrm{D}^{\leqslant 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) \to \mathrm{D}^{\leqslant 0}_{(\mathcal{S}',\mathcal{L}')}(X,\Lambda')$, pour $\Lambda \subset \Lambda'$ et $(\mathcal{S}',\mathcal{L}') \prec (\mathcal{S},\mathcal{L})$, est t-exact.

5.4 La t-structure de perversité sur $D^b_c\left(X,\bar{\mathbb{Q}}_l\right)$

On veut définir la t-structure de perversité sur $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$ par recollement. Soit donc U un ouvert de X, réunion de strates, et F le fermé complémentaire ; notons j l'inclusion de U dans X et i celle de F. Il nous faut vérifier que les foncteurs Ri^*, $Ri_* = Ri_!$, $i^!$, $Rj_!$, $j^! = Rj^*$ et Rj_* vérifient les hypothèses du théorème **??**.

A présent, nous pouvons définir la t-structure $\left({}^p\mathrm{D}^{\leqslant 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda), {}^p\mathrm{D}^{\geqslant 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)\right)$, appelée t-structure de perversité, par récurrence sur le nombre de strates de $\mathcal{S}$.

S'il y en a une seule, cela signifie que $X \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, \bar{k}$ est lisse et connexe. Soit donc d sa dimension. On dispose de la t-structure naturelle $\mathrm{D}^{\leqslant 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$ construite au paragraphe précédent. On définit la t-structure de perversité comme étant la translatée de d de la t-structure naturelle :

$${}^p\mathrm{D}^{\leqslant 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) = \mathrm{D}^{\leqslant -d}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) \quad , \quad {}^p\mathrm{D}^{\geqslant 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) = \mathrm{D}^{\geqslant -d}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda).$$

Puisque S est lisse, la dualité de Grothendieck-Verdier envoie ${}^p\mathrm{D}^{\leqslant 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$ sur ${}^p\mathrm{D}^{\leqslant 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$, et réciproquement.

S'il y a deux strates, ce sont un ouvert U et un fermé F. On peut donc appliquer le théorème **??**, et définir la t-structure de perversité par recollement à partir des t-structures de perversité sur U et F.

S'il y en a plus, on choisit un ouvert U de X, réunion de strates, et on note F le fermé complémentaire. Comme U et F contiennent moins de strates que X, on peut définir la t-structure perverse sur X à partir de celles sur U et F. Le résultat obtenu ne dépend pas du choix de U, car on a en fait (en notant s l'inclusion d'une strate S dans X) :

$$ {}^p\mathrm{D}^{\leqslant 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) = \left\{ \; K \in \mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) \quad | \quad \forall S \in \mathcal{S} \quad s^*K \in \mathrm{D}^{\leqslant -\dim S}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) \; \right\}, $$

$$ {}^p\mathrm{D}^{\geqslant 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) = \left\{ \; K \in \mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) \quad | \quad \forall S \in \mathcal{S} \quad s^!K \in \mathrm{D}^{\geqslant -\dim S}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) \; \right\}. $$

Le foncteur canonique de plongement $\mathrm{D}^{\leqslant 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda) \to \mathrm{D}^{\leqslant 0}_{(\mathcal{S}',\mathcal{L}')}(X,\Lambda')$, est t-exact pour la t-structure de perversité. On définit donc la t-structure de perversité sur $\mathrm{D}^b_c\left(X,\bar{\mathbb{Q}}_l\right)$ comme la limite inductive de t-structures de perversité sur les $\mathrm{D}^{\leqslant 0}_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}(X,\Lambda)$. La dualité de Grothendieck Verdier l'envoie sur la t-structure opposée. Son cœur est constitué des $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux pervers.

Ceci prouve que la catégorie des faisceaux pervers est une sous-catégorie abélienne admissible, stable par extension, de la catégorie des $\bar{\mathbb{Q}}_l$-complexes constructibles.

Dans la suite, tout objet faisant référence à la t-structure de perversité sera noté avec t en exposant à gauche, tandis que les objets faisant référence à la t-structure naturelle seront notés avec 0 en exposant à gauche.

Troisième partie
Premiers résultats

6 Indications sur l'amplitude cohomologique de certains foncteurs

Dans la démonstration des théorèmes qui vont suivre, on utilisera une notation introduite par Artin dans [?]. Si $\bar{x}$ est un point géométrique de X, on note $d(\bar{x})$ la dimension de l'adhérence de son image dans X. Pour L une extension finie de $\mathbb{Q}_l$, $n \geqslant 1$ un entier, et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible de ${}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^n}$-modules sur X, on pose :

$$d(\mathcal{F}) = \max \ \{ \ d(\bar{x}) \quad | \quad \mathcal{F}_{\bar{x}} \neq 0 \ \} = \dim (\operatorname{supp} \mathcal{F})$$

Avec cette notation, pour $K \in \mathrm{D}^b_c\left(X, {}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^n}\right)$, l'énoncé « $K \in {}^p\mathrm{D}^{\leqslant 0}_c\left(X, {}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^n}\right)$ » équivaut à « pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $d\left(\mathcal{H}^i K\right) \leqslant -i$ ».

6.1 Foncteurs associés aux morphismes quasi-finis

Théorème 4 *Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme quasi-fini, les foncteurs $Rf_!$ et Rf^* entre $\mathrm{D}^b_c\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$ et $\mathrm{D}^b_c\left(Y, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$ sont t-exacts à droite. ([?], p. 68)*

Démonstration

Remarquons tout d'abord que cet énoncé équivaut à : pour tout L, pour tout $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$, pour tout n, les foncteurs $Rf_!$ et Rf^* entre $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}\left(X, {}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^n}\right)$ et $\mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}\left(Y, {}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^n}\right)$ sont t-exacts à droite.

L'idée de la démonstration est d'utiliser l'exactitude des foncteurs $f_! : \mathcal{A}b\left(X_{\acute{e}t}\right) \longrightarrow \mathcal{A}b\left(Y_{\acute{e}t}\right)$ et $f^* : \mathcal{A}b\left(Y_{\acute{e}t}\right) \longrightarrow \mathcal{A}b\left(X_{\acute{e}t}\right)$, lesquelles découlent du « main theorem » de Zariski. En effet, celui-ci énonce que le morphisme f se factorise comme la composée d'un morphisme propre et d'une immersion ouverte. Dans ces deux cas, on a vu que le foncteur « image directe à support propre » et le foncteur « image inverse » sont exacts ; c'est donc aussi le cas de $f_!$ et f^*, et de plus on a ici $Rf_! = R\left(f_!\right)$.

Soit alors $K \in \mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}\left(Y, {}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^n}\right)$; on a, pour $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^i Rf^* K = f^*\left(\mathcal{H}^i K\right)$. On a $d\left(\mathcal{H}^i K\right) \leqslant -i$; montrons que $d\left(f^* \mathcal{H}^i K\right) \leqslant -i$.

Soit $\bar{x}$ un point géométrique de X. On a $\left(f^* \mathcal{H}^i K\right)_{\bar{y}} = \left(\mathcal{H}^i K\right)_{f(\bar{x})}$, et $d\left(f\left(\bar{x}\right)\right) \leqslant d\left(\bar{x}\right)$. Ceci implique $d\left(f^* \mathcal{H}^i K\right) \leqslant d\left(\mathcal{H}^i K\right)$, d'où le résultat.

On procède de la même manière pour $f_!$.

Par adjonction, Rf_* et $f^!$ sont t-exacts à gauche.

6.2 Foncteurs associés aux morphismes affines

Théorème 5 *Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme affine, $Rf_* : \mathrm{D}^b_c\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right) \to \mathrm{D}^b_c\left(Y, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$ est t-exact à droite. ([?], p. 102)*

De même que précédemment, on se ramène à $Rf_* : \mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}\left(X, {}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^n}\right) \to \mathrm{D}^b_{(\mathcal{S},\mathcal{L})}\left(Y, {}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^n}\right)$. Puis, grâce à la suite spectrale

$$R^p f_* \left(\mathcal{H}^q K\right) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^{p+q}\left(Rf_* K\right),$$

on montre qu'il suffit de démontrer le théorème d'Artin, qu'on énonce pour un entier naturel d fixé :

Théorème 6 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme affine de k-schémas de type fini et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible de ${}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^n}$-modules sur X tel que $d(\mathcal{F}) \leqslant d$. Alors $d\left(R^q f_* \mathcal{F}\right) \leqslant d - q$. ([?], t.3, p. 159)*

Dans [?], ce théorème est en fait énoncé et prouvé pour $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens de l-torsion.

Démonstration

étape 1. On se donne d'abord une version locale du théorème précédent :

Théorème 7 *Soit Y' un schéma localisé strict d'un k-schéma de type fini, et soit $f' : X' \longrightarrow Y'$ un morphisme affine de type fini. Si $\mathcal{F}'$ est un faisceau constructible de ${}^{\Lambda}\!/\!_{\mathfrak{M}^n}$-modules sur X' tel que $d(\mathcal{F}') \leqslant d$, alors $H^q\left(X', \mathcal{F}'\right) = 0$ pour $q > d$.*

Prouvons que c'en est un corollaire. Il nous faut essentiellement montrer que la situation décrite par les hypothèses du théorème **??** provient par localisation de la situation du théorème **??**.

Soit donc Y un k-schéma dont Y' est le localisé strict au point géométrique $\bar{y}$, d'image y. Quitte à se restreindre à un ouvert de Y, on peut le supposer affine.

On peut supposer le point y fermé : en effet, posons $Y = \mathrm{Spec}\ B$, et soit $Z = \mathrm{Spec}\ C$ l'adhérence du point y dans Y. C est une k-algèbre de type fini, donc il existe des éléments $c_1, \ldots, c_k$ induisant un morphisme fini $k\left[x_1, \ldots, x_k\right] \longrightarrow C$ avec $k = \dim Z$ (lemme de normalisation de Noether). En relevant dans B les c_i, on obtient un morphisme $k\left[x_1, \ldots, x_k\right] \longrightarrow B$. On remplace alors Y par $Y_0 = \mathrm{Spec}\ \left(B \otimes k\left(x_1, \ldots, x_k\right)\right)$, et y par un point fermé y_0 de Y_0 au dessus de y.

Ensuite, grâce à des théorèmes sur les limites inductives, on peut supposer qu'il existe un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ tel que $X' = X \times_Y Y_{\bar{y}}$, et que $\mathcal{F}'$ provient d'un faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X, tel que $d(F) \leqslant d$.

Alors on utilise le calcul fait précédemment sur les fibres :

$$H^q\left(X', \mathcal{F}'\right) = \left(R^q f_* \mathcal{F}\right)_{\bar{y}},$$

et ceci prouve le résultat.

étape 2. Pour montrer la réciproque, on utilise le lemme suivant :

Lemme 1 *soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de k-schémas, x un point de X, y son image par f et y_0 une spécialistion de y. Choisissons un point géométrique $\bar{y}_0$ d'image y_0, et soit $f' : X' \longrightarrow Y'$ le localisé de f en $\bar{y}_0$. Alors si x' est un point de X' au dessus de x, on a $d(x') = d(x) - d(y_0)$.*

(c'est clair en utilisant la définition de la dimension en termes de degré de transcendance)

Supposons alors que le théorème **??** est vrai. Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème **??**, et choisissons $y \in Y$, image d'un point géométrique $\bar{y}$. Soit $f' : X' \longrightarrow Y'$ le localisé strict de f en $\bar{y}$, et $\mathcal{F}'$ le faisceau (constructible) induit par $\mathcal{F}$ sur X'. Alors, d'après le lemme, on a $d(\mathcal{F}') \leqslant d - d(y)$, donc, pour $q \in \mathbb{N}$,

$$H^q\left(X', \mathcal{F}'\right) = 0 \quad \text{dès que} \quad q > d - d(y).$$

Et comme on a $H^q(X', F') = (R^q f_* F)_{\bar{y}}$, on en déduit $d(R^q f_* F) \leqslant d - q$.

étape 3. On va maintenant démontrer ces deux théorèmes équivalents par récurrence forte sur d. Commençons par l'initialisation, pour $d = 0$ et $d = 1$.

A l'ordre $d = 0$, on va prouver le théorème **??**. Soit X' et Y' comme dans l'énoncé, et $\mathcal{F}'$ un faisceau constructible sur X tel que $d(\mathcal{F}') \leqslant 0$. Alors $\mathcal{F}'$ est un faisceau à support fini sur X'. Il est donc flasque, donc acyclique : $H^q(X', \mathcal{F}') = 0$ pour $q > 0$.

A l'ordre $d = 1$, on va prouver le théorème **??**. Soit $f : X \longrightarrow Y$, et $\mathcal{F}$ sur X tel que $d(\mathcal{F}) \leqslant 1$. Comme $\mathcal{F}$ est constructible, en choisissant une stratification adaptée on montre que le support de $\mathcal{F}$ est contenu dans un sous-schéma fermé de X de dimension $\leqslant 1$. Comme une immersion fermée est un morphisme affine, on peut donc remplacer X par ce sous-schéma et supposer $\dim X \leqslant 1$.

Pour $q = 0$, le support de $f_*\mathcal{F}$ est inclus dans l'adhérence de l'image de f, donc $d(f_*\mathcal{F}) \leqslant 1$. Pour $q = 1$, on utilise le fait que, puisque X est de dimension 1, il existe une partie finie Z de Y telle que f est un morphisme fini au dessus de $Y - Z$. Or on a vu que si f est fini, f_* est exact, d'où, pour $\bar{y}$ un point géométrique de $Y - Z$, $\left(R^1 f_*\mathcal{F}\right)_{\bar{y}} = 0$. Donc Supp $\left(R^1 f_*\mathcal{F}\right) \subset Z$, et $d\left(R^1 f_*\mathcal{F}\right) \leqslant 0$. Pour $q > 1$, le raisonnement qui précède montre qu'on peut se ramener au cas où Y est le spectre de k et X un schéma affine de dimension 1. Il suffit alors de montrer $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$. Ce serait le cas si k était séparablement clos, grâce à un résultat de [?] (p. 41), qui dit que la dimension cohomologique d'un schéma affine de dimension 1 sur un corps séparablement clos (pour un faisceau de torsion première à la caractéristique résiduelle, ce qui est le cas ici) est au plus 1. En tensorisant X par la clôture séparable $\bar{k}$ de k, on obtient donc le résultat.

étape 4. A partir de maintenant, $d \geqslant 2$ est fixé, et on suppose le théorème **??** vrai pour tout $d' \leqslant d - 1$. On va ramener la démonstration au cas $X' = \mathbb{A}^1_{Y'}$.

On a vu que X' se plonge en une immersion fermée dans $\mathbb{A}^n_{Y'}$. Si on considère le faisceau $\mathcal{G}'$ image directe de $\mathcal{F}'$ dans $\mathbb{A}^n_{Y'}$, on voit que $d(\mathcal{G}') = d(\mathcal{F}')$, et $H^q\left(\mathbb{A}^n_{Y'}, \mathcal{G}'\right) = H^q(X', \mathcal{F}')$. On peut donc maintenant supposer $X' = \mathbb{A}^n_{Y'}$.

On va maintenant démontrer par récurrence que le résultat pour n quelconque découle du résultat pour $n = 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$, et supposons avoir établi le résultat pour tout $n \leqslant N$. Soit $\mathcal{F}'$ un faisceau de torsion sur $\mathbb{A}^N_{Y'}$ tel que $d(\mathcal{F}') \leqslant d$. Le morphisme f' se factorise comme suit :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^N_{Y'} \arrow[r, "g'"] \arrow[dr, "f'"'] & \mathbb{A}^{N-1}_{Y'} \arrow[d, "h'"] \\ & Y' \end{tikzcd}$$

Ainsi $\mathbb{A}^N_{Y'}$ est isomorphe à l'espace affine de dimension 1 au-dessus de $\mathbb{A}^{N-1}_{Y'}$. Soit $\bar{z}$ un point géométrique de $\mathbb{A}^{N-1}_{Y'}$ d'image z, et Z' le localisé strict de $\mathbb{A}^{N-1}_{Y'}$ en $\bar{z}$. Le localisé $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{F}'$ au-dessus de $\bar{z}$ est un faisceau sur $\mathbb{A}^1_{Z'}$ vérifiant $d(\mathcal{G}') \leqslant d - d(z)$. Comme Z' est clairement le localisé d'un k-schéma algébrique, on en déduit, par l'hypothèse de récurrence, $H^q\left(\mathbb{A}^1_{Z'}, \mathcal{G}'\right) = 0$ pour $q > d - d(z)$. Comme $H^q\left(\mathbb{A}^1_{Z'}, \mathcal{G}'\right) = \left(R^q g'_* \mathcal{F}'\right)_{\bar{z}}$, on a $d\left(R^q g'_* \mathcal{F}'\right) \leqslant d - q$.

On applique à présent l'hypothèse de récurrence à h', et on a, pour $p > d - q$,

$$H^p\left(\mathbb{A}^{N-1}_{Y'}, R^q g'_* \mathcal{F}'\right) = 0.$$

L'objet qui vient d'être écrit est le terme $E_2^{p,q}$ de la suite spectrale de Leray (cf **??**), qui conduit à $E^{p+q} = H^{p+q}\left(\mathbb{A}^N_{Y'}, \mathcal{F}'\right)$. $E_2^{p,q} = 0$ pour $p + q > d$, donc $E^{p+q} = 0$, ce qui fait franchir l'étape de la récurrence.

étape 5. On va maintenant démontrer que le lemme suivant, énoncé à l'ordre d, est une conséquence du théorème **??**, énoncé à tous ordres $d' \leqslant d - 1$ par l'hypothèse de récurrence.

Lemme 2 *Soit X' un schéma strictement local, localisé strict d'un k-schéma algébrique. Soit x' son point fermé, et f' une section globale du faisceau structural, s'annulant en x'. On note U' l'ouvert complémentaire de l'ensemble des zéros de f'. Si la dimension de X' est majorée par d, alors la dimension cohomologique de U' (pour les faisceaux constructibles en $\Lambda/\mathfrak{M}^n$-modules) est au plus d.*

Par hypothèse de récurrence, on peut supposer la preuve déjà faite pour $d' \leqslant d - 1$. Soit $\mathcal{F}'$ un faisceau (constructibles en $\Lambda/\mathfrak{M}^n$-modules) sur U'. Comme plus haut, on peut supposer que X' est le localisé en un point fermé x d'un schéma affine X de dimension inférieure à d, que f' provient d'une section globale f de $\mathcal{O}_X$, et que $\mathcal{F}'$ est le localisé d'un faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur le complémentaire U des zéros de f.

Montrons que le morphisme $U' \longrightarrow U$ se factorise par un schéma U'' de dimension cohomologique au plus d.

f nous fournit un morphisme $X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$. Soit $\bar{q}$ un point géométrique de $\mathbb{A}^1_k$ d'image l'origine q. Posons

$$X'' = X \times_{\mathbb{A}^1_k} \left(\mathbb{A}^1_k\right)_{\bar{q}}.$$

On a $\dim X'' \leqslant d$. Comme f' s'annule en x', donc f en x, le morphisme $X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ envoie x sur q. Par conséquent, le morphisme $X' \longrightarrow X$ se factorise par X''.

On pose alors $U'' = X'' \times_X U$. On a bien la factorisation :

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] \arrow[dr] & U'' \arrow[d] \\ & U \end{tikzcd}$$

Nous pouvons maintenant observer que $\left(\mathbb{A}^1_k\right)_{\bar{q}}$ ne possède que deux points, correspondant au point q et à la fibre générique Q de $\mathbb{A}^1_k$. Par définition du morphisme $X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$, on a $U = X \times_{\mathbb{A}^1_k} \left(\mathbb{A}^1_k - \{q\}\right)$, donc $U'' = X'' \times_{\mathbb{A}^1_k} \{Q\}$. Mais, par construction, tous les points fermés de X'' s'envoient sur q. On a donc $\dim U'' \leqslant \dim X'' - 1 \leqslant d - 1$.
Soit $\bar{U''} = U'' \times_k \bar{k}$, qui est de type fini et de dimension $\leqslant d-1$. Par hypothèse de récurrence, on peut alors appliquer le théorème **??** au morphisme affine $\bar{U''} \longrightarrow \operatorname{Spec} \bar{k}$ et à tout faisceau (constructible *etc.*..) sur $\bar{U''}$, ce qui montre que $\bar{U''}$ est de dimension cohomologique inférieure à $d-1$. Par un argument utilisant la cohomologie des groupes de Galois et la suite spectrale de Hochscild-Serre (voir [?], t.3, p.167), on en déduit que la dimension cohomologique de U'' est au plus d.
On en conclut que, pour $q > d$, le morphisme canonique $H^q(U, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(U', \mathcal{F}')$ est nul.
Revenons maintenant à la situation de départ : X' est la limite projective des schémas étales X_i au-dessus de X où x se relève. En notant U_i l'ouvert associé (sur le modèle de U), on sait que $H^q(U', \mathcal{F}')$ est la limite inductive des $H^q(U_i, \mathcal{F})$. Or, pour $q > d$, tous les morphismes $H^q(U_i, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(U', \mathcal{F}')$ sont nuls, donc $H^q(U', \mathcal{F}') = 0$, ce qui démontre le lemme **??**.

étape 6. A l'aide du lemme **??**, on peut maintenant passer à la démonstration du théorème **??** à l'ordre d.
Soit Y' un localisé strict d'un k-schéma algébrique, et $\mathcal{F}'$ un faisceau constructible sur $\mathbb{A}^1_{Y'}$, tel que $d(\mathcal{F}') \leqslant d$. On se donne le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^1_{Y'} \arrow[r, "i'"] \arrow[dr, "f'"] & \mathbb{P}^1_{Y'} \arrow[d, "g'"] \\ & Y' \end{tikzcd}$$

L'idée est d'utiliser la suite spectrale de Leray :

$$E_2^{p,q} = H^p\left(\mathbb{P}^1_{Y'}, R^q i'_* \mathcal{F}'\right) = 0 \Rightarrow E^{p+q} = H^{p+q}\left(\mathbb{A}^1_{Y'}, \mathcal{F}'\right).$$

Si on prouve que les termes $E_2^{p,q}$ sont nuls pour $p + q > d$, l'aboutissement $H^n\left(\mathbb{A}^1_{Y'}, F'\right)$ sera nul pour $n > d$, et on aura franchi l'étape de la récurrence.
On note $\mathbb{P}^1_{Y'} = \mathbb{A}^1_{Y'} \cup Y'_\infty$. Pour $q > 0$, le support de $R^q i'_* \mathcal{F}'$ est inclus dans Y'_∞, qui est un anneau strictement local, donc de dimension cohomologique nulle. On a donc, pour $p > 0$ et $q > 0$, $H^p\left(\mathbb{P}^1_{Y'}, R^q i'_* \mathcal{F}'\right) = 0$.

Soit maintenant y le point fermé de Y', image d'un point géométrique $\bar{y}$, et considérons le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1_{\bar{k}} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h'"'] & \mathbb{P}^1_{Y'} \arrow[d, "g'"] \\ \operatorname{Spec} \bar{k} \arrow[r, "\bar{y}"] & Y' \end{tikzcd}$$

où le morphisme g' est propre. On peut donc appliquer le théorème de changement de base pour un morphisme propre, et, en prenant les sections globales, on obtient des isomorphismes entre

$$\Gamma\left(\operatorname{Spec} \bar{k}, R^p h'_*\left(i_*\mathcal{F}'_{|\mathbb{P}^1_{\bar{k}}}\right)\right) \quad \text{et} \quad \left(R^p g'_*\left(i_*\mathcal{F}'\right)\right)_{\bar{y}}.$$

Or on sait que, puisque Spec $\bar{k}$ est de dimension cohomologique nulle,

$$H^p\left(\mathbb{P}^1_{\bar{k}}, i_*\mathcal{F}'_{|\mathbb{P}^1_{\bar{k}}}\right) = \Gamma\left(\operatorname{Spec} \bar{k}, R^p h'_*\left(i_*\mathcal{F}'_{|\mathbb{P}^1_{\bar{k}}}\right)\right),$$

et que, comme Y' est un schéma strictement local,

$$\left(R^p g'_*\left(i_*\mathcal{F}'\right)\right)_{\bar{y}} = \Gamma\left(Y', R^p g'_*\left(i_*\mathcal{F}'\right)\right) = H^p\left(\mathbb{P}^1_{Y'}, i_*\mathcal{F}'\right).$$

Ainsi, du fait que $\mathbb{P}^1_{\bar{k}}$ est de dimension cohomologique 2, on déduit, pour $p > d \geqslant 2$,

$$H^p\left(\mathbb{P}^1_{Y'}, i_*\mathcal{F}'\right) = H^p\left(\mathbb{P}^1_{\bar{k}}, i_*\mathcal{F}'_{|\mathbb{P}^1_{\bar{k}}}\right) = 0$$

On veut maintenant prouver que $H^0\left(\mathbb{P}^1_{Y'}, R^q i_*\mathcal{F}'\right) = 0$ pour $q > d$. On a vu, pour $q > 0$, que $R^q i_*\mathcal{F}'$ est concentré en Y'_∞. Soit y_∞ le point au-dessus de y dans Y'_∞ (c'est-à-dire le point fermé de l'anneau strictement local Y'_∞), et $\bar{y_\infty}$ un point géométrique d'image y_∞ ; on a donc :

$$H^0\left(\mathbb{P}^1_{Y'}, R^q i_*\mathcal{F}'\right) = H^0\left(\mathbb{Y}'_\infty, R^q i_*\mathcal{F}'\right) = \left(R^q i_*\mathcal{F}'\right)_{\bar{y_\infty}}$$

On a supposé $d(F) \leqslant d$, et $\mathcal{F}'$ est constructible ; il existe donc un sous-schéma fermé X' de $\mathbb{A}^1_{Y'}$, de dimension au plus d, contenant le support de $\mathcal{F}'$. Soit $\bar{X}'$ son adhérence dans $\mathbb{P}^1_{Y'}$, et $\bar{X}'_{\bar{y_\infty}}$ son localisé au point $\bar{y_\infty}$. Posons enfin

$$U = \bar{X}'_{\bar{y_\infty}} \times_{\mathbb{P}^1_{Y'}} \mathbb{A}^1_{Y'}.$$

C'est un ouvert principal, ne contenant pas le point fermé, du schéma localisé strict $\bar{X}'_{\bar{y_\infty}}$ de dimension $\leqslant d$, on peut donc lui appliquer le lemme **??**. C'est aussi un sous-schéma de $\mathbb{A}^1_{Y'}$. D'après [**?**], t.2, p.386, on a

$$\left(R^q i_*\left(F'_{|X'}\right)\right)_{\bar{y_\infty}} = H^q\left(U, F'_{|U}\right).$$

Le dernier terme est nul si $q > d$, d'où le résultat.

Par adjonction et dualité de Grothendieck-Verdier, Rf^* et $Rf_!$ sont t-exacts à gauche, et $f^!$ est t-exact à droite.

On tire des deux résultats qui viennent d'être démontrés le corollaire suivant :

Théorème 8 *Soit U un ouvert affine de X, et j son inclusion dans X, alors les foncteurs Rj_*, j^*, $Rj_!$ et $j^!$ sont t-exacts.*

6.3 Foncteurs associés aux morphismes lisses

Théorème 9 *Si $f : X \longrightarrow Y$ est lisse de dimension relative d, $Rf^*[d]$ est t-exact et pleinement fidèle. ([?], p. 109)*

7 Prolongement intermédiaire et faisceaux pervers simples

7.1 Quelques foncteurs entre catégories de faisceaux pervers

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme quasi-fini. Alors, d'après le théorème **??**, si K est un faisceau pervers sur X, Rf_*K est dans ${}^p\mathrm{D}_c^{\geqslant 0}\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$. Le complexe ${}^p\tau_{\leqslant 0}\left(Rf_*K\right)$ est donc un faisceau pervers. On définit ainsi le foncteur ${}^pf_* : \mathcal{M}\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right) \longrightarrow \mathcal{M}\left(Y, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$, qui envoie faisceaux pervers sur faisceaux pervers. On a un morphisme naturel ${}^pf_*K \longrightarrow Rf_*K$. De même, on pose :

$$ {}^pf^* = {}^p\tau_{\geqslant 0} Rf^* \quad , \quad {}^pf_! = {}^p\tau_{\geqslant 0} Rf_! \quad , \quad {}^pf^! = {}^p\tau_{\leqslant 0} f^! \quad . $$

Ces définitions sont clairement compatibles avec la composition.

On remarque alors que, parce Rf_* et $f^!$ sont t-exacts à gauche, les foncteurs ${}^pf_*$ et ${}^pf^!$ (entre les catégories abéliennes des faisceaux pervers) sont exacts à gauche ; de même ${}^pf^*$ et ${}^pf_!$ sont exacts à droite.

Démonstration

Soit dans $\mathcal{M}\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$ une suite exacte $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$; on a donc dans $\mathrm{D}_c^b\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$ un triangle distingué $K \longrightarrow L \longrightarrow M \xrightarrow{(1)}$.

L'image par Rf_* de ce triangle donne lieu à une longue suite exacte de cohomologie perverse

$$ \cdots \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^{-1} Rf_*M \longrightarrow {}^pf_*K \longrightarrow {}^pf_*L \longrightarrow {}^pf_*M \longrightarrow \cdots $$

Comme Rf_* est t-exact à gauche, ${}^p\mathcal{H}^{-1}Rf_*M = 0$, ce qui prouve que ${}^pf_*$ est exact à gauche.

La démonstration est la même pour les trois autres foncteurs.

On a toujours un morphisme naturel $Rf_!K \longrightarrow Rf_*K$. Comme Rf_*K est dans ${}^p\mathrm{D}^{\geqslant 0}$, ce morphisme se factorise par ${}^pf_!K$; et comme ${}^pf_!K$ est dans ${}^p\mathrm{D}^{\leqslant 0}$, le morphisme ${}^pf_!K \longrightarrow Rf_*K$ se factorise par ${}^pf_*K$. On est alors en mesure de définir un nouveau foncteur, noté $f_{!*}$, qui à un faisceau pervers sur X associe un faisceau pervers sur Y. On pose :

$$ f_{!*}K = \mathrm{im}\ \left({}^pf_!K \longrightarrow {}^pf_*K\right). $$

Si g et f sont deux morphismes quasi-finis composables, on a $(gf)_{!*} = g_{!*}f_{!*}$.

Démonstration

Soient des morphismes quasi-finis $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, et K un faisceau pervers sur X.

Considérons le diagramme de complexes sur Y

$$ {}^pf_!K \twoheadrightarrow f_{!*}K \hookrightarrow {}^pf_*K $$

qui fournit sur Z le diagramme

$$^{p}(gf)_{!}K \longrightarrow {}^{p}g_{!}f_{!*}K \twoheadrightarrow g_{!*}f_{!*}K \hookrightarrow {}^{p}g_{*}f_{!*}K \longrightarrow {}^{p}(gf)_{*}K \quad .$$

Comme la flèche de gauche est l'image d'un épimorphisme par le foncteur $^{p}g_{!}$, qui est exact à droite, c'est un épimorphisme. De même la flèche de droite, image d'un monomorphisme par $^{p}g_{*}$, est un monomorphisme. On a donc $g_{!*}f_{!*}K = (gf)_{!*}K$.

7.2 Le prolongement intermédiaire

Soient U un ouvert de X et F le fermé complémentaire. Soient j l'immersion de U dans X, et i celle de F. On a $Rj^{*} = j^{!}$, donc ce foncteur est t-exact à gauche et à droite : il envoie faisceaux pervers sur faisceaux pervers et commute aux foncteurs de troncature. On le notera désormais j^{*}. De même pour $Ri_{*} = Ri_{!}$, qu'on notera i_{*}.

Ainsi on a pour l'instant un foncteur de restriction des faisceaux pervers de X vers les faisceaux pervers de U. Par contre, on a trois foncteurs de prolongement des faisceaux pervers de U à X, qui sont $^{p}j_{*}$, $^{p}j_{!}$ et $j_{!*}$, que l'on appelle prolongement intermédiaire.

Ces foncteurs établissent trois équivalences de catégories :

$$\begin{aligned}
{}^{p}j_{*} : \mathcal{M}\left(U,\bar{\mathbb{Q}}_l\right) &\longrightarrow \left\{ \ K \in \mathcal{M}\left(X,\bar{\mathbb{Q}}_l\right) \quad | \quad Ri^{!}K = 0 \ \right\} \\
{}^{p}j_{!} : \mathcal{M}\left(U,\bar{\mathbb{Q}}_l\right) &\longrightarrow \left\{ \ K \in \mathcal{M}\left(X,\bar{\mathbb{Q}}_l\right) \quad | \quad Ri^{*}K = 0 \ \right\} \\
{}^{p}j_{!*} : \mathcal{M}\left(U,\bar{\mathbb{Q}}_l\right) &\longrightarrow \left\{ \ K \in \mathcal{M}\left(X,\bar{\mathbb{Q}}_l\right) \quad | \quad {}^{p}i^{!}K = {}^{p}i^{*}K = 0 \ \right\}
\end{aligned}$$

Démonstration

Les deux premières équivalences de catégories découlent immédiatement des résultats énumérés au paragraphe **??**.

Soit $K \in \mathcal{M}\left(X,\bar{\mathbb{Q}}_l\right)$ et $L = j^{*}K$. On a canoniquement des morphismes d'adjonction

$$Rj_{!}L \longrightarrow K \longrightarrow Rj_{*}L$$

donnant lieu à des morphismes dans $\mathcal{M}\left(X,\bar{\mathbb{Q}}_l\right)$

$$^{p}j_{!}L \longrightarrow K \longrightarrow {}^{p}j_{*}L \quad .$$

On a $K = j_{!*}L$ si et seulement si la première flèche est un épimorphisme, et la deuxième un monomorphisme.

Considérons maintenant les triangles distingués

$$Rj_{!}L \longrightarrow K \longrightarrow i_{*}Ri^{*}K \xrightarrow{1}$$

$$i_{*}Ri^{!}K \longrightarrow K \longrightarrow Rj_{*}L \xrightarrow{1}$$

qui donnent lieu à deux longues suites exactes de cohomologie perverse

$$\cdots \longrightarrow {}^{p}j_{!}L \longrightarrow K \longrightarrow i_{*}{}^{p}i^{*}K \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow i_{*}{}^{p}i^{!}K \longrightarrow K \longrightarrow {}^{p}j_{*}L \longrightarrow \cdots$$

(on a utilisé $Rj_!L \in {}^p\mathrm{D}_c^{\leqslant 0}$ et $Rj_*L \in {}^p\mathrm{D}_c^{\geqslant 0}$, et la t-exactitude de i_*).

De ces suites exactes, et de la pleine fidélité de i_*, on déduit l'équivalence

$$K = j_{!*}L \quad \Leftrightarrow \quad {}^p i^* K = 0 \text{ et } {}^p i^! K = 0$$

qui fournit le résultat désiré.

Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier où X est irréductible de dimension d, muni d'un *(H)*-système $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$, et où U est la strate ouverte (donc de dimension d) de $\mathcal{S}$.

Pour $i \leqslant d$, notons S_i la réunion des strates de dimension i, $F_i = S_0 \cup \ldots \cup S_i$ (fermé), et $U_i = S_d \cup \ldots \cup S_i = X - F_{i-1}$. On a donc une filtration de X par des ouverts

$$U = U_d \overset{j_d}{\hookrightarrow} U_{d-1} \overset{j_{d-1}}{\hookrightarrow} \cdots \overset{j_2}{\hookrightarrow} U_1 \overset{j_1}{\hookrightarrow} U_0 = X$$

On a alors une méthode simple de calcul du prolongement intermédiaire pour les faisceaux pervers $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructibles sur U :

$$j_{!*} = {}^0\tau_{\leqslant -1} Rj_{1*} \, {}^0\tau_{\leqslant -2} Rj_{2*} \, \ldots \, {}^0\tau_{\leqslant -d} Rj_{d*}$$

Démonstration

Il suffit de prouver, pour $1 \leqslant i \leqslant d$, que $j_{i!*} = {}^0\tau_{\leqslant -i} Rj_{i*}$.

Pour cela on notera (attention, ces notations ne valent que pour la durée de la démonstration) $X = U_{i-1}$; $U = U_i$, ouvert de X, réunion de strates de dimensions supérieures à i ; $j = j_i$ son inclusion dans X ; $F = S_{i-1}$ le fermé complémentaire, essentiellement lisse de dimension $i-1$; k son inclusion dans X. On remarquera que, pour les complexes $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructibles sur F, ${}^p\tau_{\leqslant n} = {}^0\tau_{\leqslant n-(i-1)}$ et ${}^p\tau_{\geqslant n} = {}^0\tau_{\geqslant n-(i-1)}$.

Soit donc L un faisceau pervers $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructible sur U, et $K = {}^0\tau_{\leqslant -i} Rj_*L$. Tout d'abord, comme le foncteur j^* est exact, on a :

$$j^*K = {}^0\tau_{\leqslant -i} j^* Rj_* L = {}^0\tau_{\leqslant -i} L \ .$$

Et comme toutes les strates de U sont de dimension supérieure à i, on en déduit $j^*K = L$.

Puisque le foncteur k^* est exact, on a d'autre part :

$${}^p\tau_{\geqslant 0} Rk^* K = {}^p\tau_{\geqslant 0} Rk^* \left({}^0\tau_{\geqslant -i} Rj_* L\right) = {}^0\tau_{\geqslant -i+1} {}^0\tau_{\leqslant -i} Rk^* Rj_* L = 0$$

Enfin, à partir des deux triangles distingués du paragraphe **??**, ici (1) et (2) (après rotation suivant l'axiome *(tr 2)*), on construit un diagramme de l'octaèdre :

$$\begin{tikzcd}
Rj_!L \arrow[rrrr] \arrow[ddrr] & & & & Rj_*L \arrow[dddd] \\
& & \circlearrowright & & \\
& (1) & K \arrow[uurr] \arrow[ddll] & (2) & \\
& & \circlearrowright & & \\
k_*Rk^*K \arrow[uuuu, "1"] & & & & k_*Rk^!K[1] \arrow[llll, "1"] \arrow[uull, "1"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Rj_!L \arrow[rrrr] & & & & Rj_*L \arrow[dddd] \arrow[ddll] \\
& & (3) & & \\
& \circlearrowright & M \arrow[uull, "1"'] \arrow[ddrr] & \circlearrowright & \\
& & (4) & & \\
k_*Rk^*K \arrow[uuuu, "1"] \arrow[uurr] & & & & k_*Rk^!K[1] \arrow[llll, "1"]
\end{tikzcd}$$

(où les triangles distingués sont numérotés).

Dans le triangle (4), en identifiant $Rj_!L$ à $Rj_!j^*(Rj_*L)$, et en se référant toujours aux triangles du paragraphe **??**, on voit que $M = Rk_*Rk^*(Rj_*L)$. Mais alors, en appliquant le foncteur triangulé Rk^* au triangle (4), on obtient un triangle distingué

$$Rk^*K \longrightarrow Rk^*Rj_*L \longrightarrow Rk^!K[1] \xrightarrow{1} \quad ,$$

qui fournit une suite exacte longue

$${}^p\mathcal{H}^{q-1}(Rk^*K) \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^{q-1}(Rk^*Rj_*L) \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^q\left(Rk^!K\right) \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^q(Rk^*K) \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^q(Rk^*Rj_*L) \ .$$

Si on la calcule, en utilisant l'exactitude de k^* et l'égalité ${}^p\tau_{\geqslant 0}Rk^*K = 0$, (et en notant $N = Rk^*Rj_*L$) on obtient :

$${}^0\mathcal{H}^{q-i}\left({}^0\tau_{\leqslant -i}N\right) \longrightarrow {}^0\mathcal{H}^{q-i}N \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^q\left(Rk^!K\right) \longrightarrow {}^0\mathcal{H}^{q+1-i}\left({}^0\tau_{\leqslant -i}N\right) \longrightarrow {}^0\mathcal{H}^{q+1-i}N \ .$$

Pour $q \leqslant -1$, les flèches de gauche et de droite sont des isomorphismes ; pour $q = 0$, celle de gauche en est un et ${}^0\mathcal{H}^{0+1-i}\left({}^0\tau_{\leqslant -i}N\right) = 0$. Dans tous ces cas, ${}^p\mathcal{H}^q\left(Rk^!K\right) = 0$, donc on a ${}^p\tau_{\leqslant 0}Rk^!K = 0$

Ainsi K est un faisceau pervers sur X, et c'est le prolongement intermédiaire de L.

7.3 Eléments simples de la catégorie des faisceaux pervers

Plaçons-nous de nouveau dans le cas général $X = U \cup F$. Notons d'abord, pour un faisceau pervers K sur X, les suites exactes longues de cohomologie perverse associées aux triangles exacts du paragraphe **??** :

$$0 \longrightarrow i_*{}^pi^!K \longrightarrow K \longrightarrow {}^pj_*j^*K \qquad (1)$$

$${}^pj_!j^*K \longrightarrow K \longrightarrow i_*{}^pi^*K \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

Si L est un élément simple de la catégorie des faisceaux pervers sur F, alors son prolongement intermédiaire $i_{!*}L = i_*L$ est encore simple.

Démonstration

Supposons avoir dans $\mathcal{M}\left(X, \bar{\mathbb{Q}}_l\right)$ une suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow i_*L \longrightarrow M \longrightarrow 0 \ .$$

Puisque $j^*i_* = 0$, elle s'envoie par le foncteur t-exact j^* sur la suite exacte :

$$0 \longrightarrow j^*K \longrightarrow 0 \longrightarrow j^*M \longrightarrow 0 \ .$$

Le foncteur Ri^* est t-exact à droite, donc on a la suite exacte :

$${}^pi^*K \longrightarrow L \longrightarrow {}^pi^*M \longrightarrow 0 \ .$$

Le faisceau pervers ${}^pi^*M$ est un quotient de L : il est donc isomorphe à L ou à 0. En utilisant la suite exacte (2) pour M, on en déduit que M est isomorphe à i_*L, ce qui prouve la simplicité de i_*L.

Si L est un faisceau pervers simple sur U, alors son prolongement intermédiaire $j_{!*}L$ est également simple.

Démonstration

Supposons avoir dans $\mathcal{M}\left(X,\bar{\mathbb{Q}}_l\right)$ une suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow j_{!*}L \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad .$$

Puisque ${}^pi^*L = {}^p\, i^!L = 0$, on obtient sur F les suites exactes :

$$0 \longrightarrow {}^pi^*K \longrightarrow 0 \longrightarrow {}^pi^*M$$

$${}^pi^!K \longrightarrow 0 \longrightarrow {}^pi^!M \longrightarrow 0$$

Donc ${}^pi^*K = 0 = {}^p\, i^!M$.

D'autre part, par le foncteur t-exact j^*, on obtient sur la suite exacte :

$$0 \longrightarrow j^*K \longrightarrow L \longrightarrow j^*M \longrightarrow 0 \quad .$$

On a donc $j^*K = 0$ ou $j^*M = 0$. Par la suite exacte (1) ou (2), on en déduit $K = 0$ ou $M = 0$, ce qui prouve la simplicité de $j_{!*}L$.

On a ainsi le résultat :

Théorème 10 *(i) Si $\mathcal{S}$ est une stratification de X, S une strate de $\mathcal{S}$ de dimension d, s son inclusion dans X et $\mathcal{F}$ un élément irréductible de la catégorie des faisceaux localement constants constructribles sur S, alors le complexe $s_{!*}(\mathcal{F}[d])$ est un faisceau pervers simple sur X.*

(ii) Tous les faisceaux pervers simples sur X sont ainsi obtenus.

(iii) Tout faisceau pervers sur X est extension successive finie de faisceaux pervers simples, c'est à dire est de longueur finie ; autrement dit : la catégorie $\mathcal{M}\left(X,\bar{\mathbb{Q}}_l\right)$ est artinienne et noethérienne.

Démonstration

La première affirmation est une conséquence des deux résultats précédemment prouvés.

Par récurrence noethérienne sur les fermés de X, nous allons prouver que la troisième affirmation vaut pour $\mathcal{M}\left(F,\bar{\mathbb{Q}}_l\right)$, quel que soit F fermé dans X. Cela revient à dire qu'on peut la supposer vrai pour tous les fermés distincts de X.

Soit K un faisceau pervers sur X, et $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ un *(H)*-système sur X tel que K soit $(\mathcal{S},\mathcal{L})$-constructible. Soit U une strate ouverte de $\mathcal{S}$ et F le fermé complémentaire, avec les notations habituelles.

Soit $L = j^*K$. Par définition de la constructibilité, L est de longueur finie l sur U. Montrons par récurrence sur l que ${}^pj_*L$ est de longueur finie sur X.

Si $l = 1$, en appliquant la suite exacte (2) à ${}^pj_*L$, sans oublier que $f_{!*}K =$ im $({}^pf_!K \longrightarrow {}^pf_*K)$, on obtient :

$$0 \longrightarrow j_{!*}L \longrightarrow {}^pj_*L \longrightarrow i_*\left({}^pi^{*p}j_*L\right) \longrightarrow 0 \quad .$$

Par hypothèse, tout faisceaux pervers sur F est de longueur finie ; de plus i_* est exact et tranforme les pervers simples en pervers simples. Le pervers $i_*\left({}^p i^{*p} j_* L\right)$ est donc de longueur finie. Comme $j_{!*}L$ est simple, ${}^p j_* L$ est aussi de longueur finie.

Pour $l \geqslant 1$, on se donne une décomposition

$$0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0 \quad ,$$

avec L' et L'' de longueurs inférieures. Puisque ${}^p j_*$ est exact à gauche, on en déduit un suite exacte

$${}^p j_* L' \longrightarrow {}^p j_* L \longrightarrow {}^p j_* L'' \quad ,$$

qui prouve que L est de longueur finie.

A présent, on a un triangle distingué

$$i_* i^! K \longrightarrow K \longrightarrow R j_* L \xrightarrow{1} \quad ,$$

dont on déduit une suite exacte de cohomologie perverse

$$0 \longrightarrow i_* {}^p i^! K \longrightarrow K \longrightarrow {}^p j_* L \longrightarrow i_* {}^p \mathcal{H}^1 i^! K \longrightarrow 0 \quad .$$

Par hypothèse, tous les pervers de cette suite autres que K sont de longueur finie, donc K l'est aussi.

Références

[BBD] A.Beilinson, J.Bernstein et P.Deligne. *Faisceaux pervers*. Analyse et topologie sur les espaces singuliers, colloque de Luminy du 6 au 11 juillet 1981, I. Astérisque **100**, Société Mathématique de France, Paris, 1982.

[Del] P.Deligne. *La conjecture de Weill.II*. Publications mathématiques de l'IHÉS **52**, p.137-252, Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette, France, 1980.

[FK] E.Freitag, R.Kiehl. *Étale cohomologie and the Weil conjecture*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **13**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[God] R.Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Publications de l'institut de mathématiques de l'Université de Strasbourg **XIII**, Hermann, Paris, 1958.

[Gro] A.Grothendieck. *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tôhoku Mathematical Journal vol. **9**, p. 119-221, The Tôhoku University, Sendai, Japan, 1957.

[KW] R.Kiehl, R.Weissauer. *Weil conjecture, perverse sheaves and l'adic Fourier transform*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **42**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[Mil] J.S.Milne. *Étale cohomology*. Princeton Mathematical Series, **33**, Princeton University Press, Princeton, 1980.

[Neu] J.Neukirch. *Algebraic number theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **322**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1999.

[SGA 4] M. Artin *et al.*. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie (SGA 4), 1963-1964. Lecture Notes in Mathematics **269** (exposés I à IV), **270** (V à VIII), **305** (IX à XIX), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1972-1973.

[Ver 1] J.L.Verdier. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*. Thèse de doctorat soutenue le 14 juin 1967. Astérisque **239**, Société Mathématique de france, Paris, 1996.

[Ver 2] J.L.Verdier. *Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts*. Séminaire N.Bourbaki, 1965/66, **300**.