Quadrature n° X (2012) 1-6

Le langage des catégories II

Matrices et espaces vectoriels

par Erwan BILAND*

Résumé.

Dans un premier article (Le langage des catégories I, Quadrature n° 87), nous avons appris les rudiments du langage des catégories. Nous avons notamment décrit certaines propriétés des objets et flèches d'une catégorie donnée. Nous allons maintenant voir comment on peut mettre en relation deux catégories différentes. Nous mettrons l'accent sur les liens étroits qui unissent la catégorie des matrices à la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie. Nous espérons ainsi convaincre le lecteur que le langage des catégories devrait jouer un rôle essentiel dans une vision moderne des mathématiques, de l'enseignement secondaire à l'université.

Nous l'avons vu dans le précédent article : définir une catégorie, c'est donner des objets, des flèches entre ces objets, ainsi qu'une règle de composition entre ces flèches. On demande de plus que la composition soit associative, et que tout objet X soit muni d'une flèche $X \xrightarrow{\mathrm{Id}_X} X$ qui est "neutre" à gauche et à droite. Parmi les exemples que nous avions énumérés, rappelons les deux catégories qui joueront un rôle central dans le présent article.

- $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{df}}$: les objets sont les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie ; les flèches sont les applications $\mathbb{R}$-linéaires ; la composition des flèches est la composition usuelle des applications.
- $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$: les objets sont les entiers naturels. Si n et p sont deux objets, les flèches $p \to n$ sont les matrices de taille $n \times p$ à coefficients réels. La composition des flèches est le produit matriciel [1].

I Un théorème d'algèbre linéaire

Pour mettre en évidences les liens forts qui unissent les catégories $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{df}}$ et $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$, commençons par rappeler quelques propriétés élémentaires des espaces vectoriels et applications linéaires en dimension finie. Nous noterons $\mathbb{R}^n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des vecteurs colonnes $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ à n composantes et à coefficients dans $\mathbb{R}$. Par convention, $\mathbb{R}^0$ est l'espace nul $\{0\}$.

Proposition 1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Il existe un unique entier naturel d, la dimension de E, tel que E soit isomorphe [2] à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$.*

Si A est une matrice de taille $n \times p$ à coefficients réels, alors l'application $u_A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, définie par $u_A(X) = AX$, est linéaire. Réciproquement, pour toute application linéaire $a : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, il existe une unique matrice A telle que $a = u_A$. De plus, si A et B sont deux matrices de tailles compatibles, alors $u_A \circ u_B = u_{AB}$.

* Université Paris 7, Université Laval (Québec)

1. Nous prenons les conventions suivantes. Si $n = 0$ ou $p = 0$, il existe une unique matrice de taille $n \times p$, appelée la matrice nulle. Si l'un des entiers n, p, q est nul, alors le produit de toute matrice de taille $n \times p$ par toute matrice de taille $p \times q$ est la matrice nulle de taille $n \times q$.

2. Le choix d'un isomorphisme $\mathbb{R}^d \to E$ est équivalent au choix d'une base de l'espace vectoriel E. De même, la correspondance entre matrices et applications linéaires se fait traditionnellement *via* des choix de bases. Nous avons choisi d'évacuer ce point de vue pour insister sur les isomorphismes ; c'est ce qui nous permettra plus loin de mettre en évidence le caractère *fonctoriel* de cette correspondance.

Enfin, $u_{I_n} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

Munis de ces résultats, nous sommes en mesure de naviguer entre le «monde des espaces vectoriels» et le «monde des matrices», dans un sens ou dans l'autre. Cette technique est très efficace pour démontrer des théorèmes tels que le suivant.

Théorème 2. *Soient n et p deux entiers naturels ; soit A une matrice de taille $n \times p$ à coefficients réels. Il existe un entier $r \geqslant 0$ et des matrices B et C, de tailles respectives $n \times r$ et $r \times p$, telles que :*

1. *$A = BC$;*
2. *B est inversible à gauche : il existe une matrice B', de taille $r \times n$, telle que $B'B = I_r$;*
3. *C est inversible à droite : il existe une matrice C', de taille $p \times r$, telle que $CC' = I_r$.*

Démonstration. Notons $a = u_A$, une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$. Notons $E = a(\mathbb{R}^p)$ son image, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Considérons alors les applications linéaires

$$\begin{aligned} c_o : \mathbb{R}^p &\to E \\ X &\mapsto a(X) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} b_o : E &\to \mathbb{R}^n. \\ Y &\mapsto Y \end{aligned}$$

On a ainsi $a = b_o \circ c_o$; de plus les applications c_o et b_o sont respectivement surjective et injective.

Par ailleurs l'espace vectoriel E est contenu dans $\mathbb{R}^n$, donc de dimension finie. Notons r sa dimension ; par définition, il existe un isomorphisme $u : \mathbb{R}^r \to E$. Notons alors

$$c = u^{-1} \circ c_o : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^r \quad \text{et} \quad b = b_o \circ u : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n.$$

Puisque l'application c est linéaire, il existe une unique matrice C, de taille $r \times p$, telle que $c = u_C$. De même, il existe une unique matrice B, de taille $n \times r$, telle que $b = u_B$. De plus $a = b \circ c$, donc $A = BC$.

L'application $c : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^r$ est surjective. En choisissant un supplémentaire du noyau $\ker(c)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$, on en déduit l'existence d'une application linéaire $c' : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^p$ telle que $c \circ c' = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^r}$. Là encore, il existe une matrice C' telle que $c' = u_{C'}$, et on obtient $CC' = I_r$. Enfin, l'injectivité de l'application linéaire b mène à l'existence d'une matrice B' telle que $B'B = I_r$. □

Analysons la structure de cette démonstration. L'énoncé du théorème est purement matriciel. Pour le prouver, nous avons d'abord transporté les hypothèses dans le monde des espaces vectoriels : la matrice A devient une application linéaire a. Puis nous avons construit des applications linéaires b, b', c, c' vérifiant certaines propriétés. Enfin, nous avons transporté nos résultats dans le monde des matrices, pour obtenir des matrices B, B', C, C' vérifiant précisément les conclusions du théorème.

Pour le dire autrement, nous avons démontré un théorème dans la catégorie $\mathbf{Ev}^{\mathbf{df}}_{\mathbb{R}}$, puis nous en avons déduit un théorème similaire dans la catégorie $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$. Cette démarche a été rendue possible par la proposition 1, qui montre que les catégories $\mathbf{Ev}^{\mathbf{df}}_{\mathbb{R}}$ et $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ ont des comportement semblables.

La suite de cet article vise à donner un sens précis à cette méthode de démonstration.

II Comment comparer deux catégories ?

Soient $(G, \star)$ et $(H, \bullet)$ deux groupes. Supposons qu'il existe un isomorphisme de groupes $(G, \star) \to (H, \bullet)$. Alors $(G, \star)$ est abélien si, et seulement si, $(H, \bullet)$ est abélien ; $(G, \star)$ contient un élément d'ordre 2 si, et seulement si, $(H, \bullet)$ contient un élément d'ordre 2, *etc.* En fait, toute propriété qui s'exprime *dans le langage des groupes* se transmet de $(G, \star)$ à $(H, \bullet)$. Ceci exclut les propriétés qui ne découlent pas strictement de la structure de groupe, comme par exemple des propriétés topologiques.

Nous voulons maintenant formaliser l'idée de deux catégories qui se comportent de la même façon. Pour les groupes, nous venons de voir que les outils adaptés sont les morphismes et isomorphismes de groupes. Pour les catégories, nous allons définir les foncteurs, puis les équivalences de catégories.

Foncteurs

Définition 3. *Soient* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *deux catégories. Définir un foncteur $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, c'est donner :*

(D4) pour tout objet X de $\mathbf{A}$, un objet $F(X)$ de $\mathbf{B}$;

(D5) pour toute flèche $X \xrightarrow{u} Y$ dans $\mathbf{A}$, une flèche $F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y)$ dans $\mathbf{B}$.

On demande de plus que,

(A3) pour toutes flèches $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ dans $\mathbf{A}$,

$$F(v \circ u) = F(v) \circ F(u);$$

(A4) pour tout objet X dans $\mathbf{A}$, $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$.

Commençons par quelques exemples classiques.

- *$Id_{\mathbf{C}}$* : $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Le foncteur identité envoie chaque objet sur lui-même, et chaque flèche sur elle-même.
- *Incl* : $\mathbf{Top}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{Top}$. Il s'agit d'un foncteur d'inclusion : à une partie A de $\mathbb{R}$, on associe l'espace topologique A, muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$; à une fonction continue $A \xrightarrow{u} B$, on associe la même fonction, vue comme une flèche dans la catégorie $\mathbf{Top}$.

- *Oubli* : $\mathbf{Gr} \to \mathbf{Ens}$. À un groupe $(G,\star)$, on associe l'ensemble sous-jacent G ; à un morphisme de groupe $(G,\star) \xrightarrow{u} (H,\bullet)$, on associe l'application ensembliste $G \xrightarrow{u} H$.

Ici, les axiomes (A3) et (A4) sont clairement vérifiés. Notons que les deux derniers exemples se généralisent très facilement. Ainsi, on peut considérer le foncteur d'inclusion de $\mathbf{Ab}$ dans $\mathbf{Gr}$, ou de $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{df}}$ dans $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$. On peut aussi définir un foncteur d'oubli de $\mathbf{Ann_1}$ vers $\mathbf{Ens}$ en «oubliant» les lois $+$ et $\times$, ou de $\mathbf{Ann_1}$ vers $\mathbf{Ab}$ en oubliant seulement la loi $\times$, *etc.*

- *Inv* : $\mathbf{Ann_1} \to \mathbf{Gr}$. À un anneau $(A,+,\times)$, on associe le groupe multiplicatif $(A^\times,\times)$ de ses éléments inversibles ; à un morphisme d'anneaux $(A,+,\times) \xrightarrow{u} (B,\oplus,\otimes)$, on associe le morphisme de groupes $(A^\times,\times) \xrightarrow{u^*} (B^\otimes,\otimes)$ obtenu par restriction de l'application u. Là encore, les axiomes (A3) et (A4) sont vérifiés.
- *Dual* : $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}{}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$. À un espace vectoriel réel E, on associe l'espace vectoriel E^* des formes linéaires sur E ; à une application $\mathbb{R}$-linéaire $E \xrightarrow{u} F$, on associe l'application linéaire tranposée $F^* \xrightarrow{{}^t u} E^*$, définie par $f^* \mapsto f^* \circ u$. On remarque que la transposition renverse le sens des applications ; il n'est donc pas possible de voir *Dual* comme un foncteur de la catégorie $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$ dans elle-même. On a résolu ce problème en passant par la catégorie opposée. Le foncteur *Dual* de $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}{}^{\mathrm{op}}$ dans $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$ est bien défini [3]. Il vérifie les axiomes (A3) et (A4) car, pour toutes applications linéaires u et v composables, ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$, et pour tout espace vectoriel E, ${}^t\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_{E^*}$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$. Dans une catégorie abstraite $\mathbf{C}$, le symbole $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}$ lui-même peut être vu comme un bifoncteur [4]. Ne souhaitant pas définir le produit cartésien de deux catégories, nous nous contenterons ici de présenter les deux foncteurs partiels.

  Soit T un objet de la catégorie $\mathbf{C}$. À un objet X de $\mathbf{C}$, on associe l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T,X)$; à une flèche $X \xrightarrow{u} Y$ dans $\mathbf{C}$, on associe l'application $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T,X) \xrightarrow{u\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T,Y)$, définie par $f \mapsto u \circ f$. Nous laisserons le lecteur vérifier que ceci définit un foncteur

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(T,-) : \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}.$$

  On peut aussi échanger les rôles. À un objet X de $\mathbf{C}$, on associe l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,T)$; à une flèche $X \xrightarrow{u} Y$ dans $\mathbf{C}$, on associe l'application $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,T) \xrightarrow{-\circ u} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,T)$, définie par $g \mapsto g \circ u$. Ceci définit un foncteur contravariant de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ens}$, c'est-à-dire un foncteur

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,T) : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}.$$

Injectivité, surjectivité d'un foncteur

Commençons par rappeler que, dans une catégorie, demander que deux objets soient égaux n'a pas grand intérêt ; la notion pertinente est celle d'objets isomorphes. Cette remarque va fortement influencer la transposition aux foncteurs des notions d'injectivité et de surjectivité.

Définition 4. *Soient* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *deux catégories. Un foncteur* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *est dit essentiellement surjectif si, pour tout objet* Y *dans* $\mathbf{B}$, *il existe un objet* X *dans* $\mathbf{A}$ *dont l'image* $F(X)$ *est isomorphe à* Y *dans* $\mathbf{B}$.

- le foncteur *Oubli* : $\mathbf{Gr} \to \mathbf{Ens}$ est essentiellement surjectif, car tout ensemble peut être muni d'une structure de groupe. En effet, un ensemble fini admet une structure de groupe cyclique ; un ensemble infini est en bijection avec l'ensemble de ses parties finies [5], sur lequel la différence symétrique Δ est une loi de groupe.
- le foncteur *Dual* : $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}{}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$ n'est pas essentiellement surjectif. En effet, soit E un espace vectoriel réel. On déduit de l'axiome du choix que E admet une base B. Si cette base est finie, alors le dual E^* admet une base B^* finie de même cardinal. Si par contre B est infinie, alors E^* admet une base B^* infinie, de cardinalité strictement supérieure à celle de B (B^* a au moins la cardinalité de l'ensemble des parties de B). En particulier, le dual E^* ne peut pas admettre une base dénombrable ; il ne peut donc pas être isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.

Rappelons qu'un foncteur a une nature double : il agit à la fois sur les objets et les flèches. La surjectivité ne saurait donc se réduire à la notion précédente.

Définition 5. *Soient* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *deux catégories. Un foncteur* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *est dit plein si, pour tous objets* X *et* Y *dans* $\mathbf{A}$, *l'application* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(X),F(Y))$, *définie par* $u \mapsto F(u)$, *est surjective.*

- Le foncteur *Incl* : $\mathbf{Top}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{Top}$ est plein.

3. On dit aussi que *Dual* est un foncteur contravariant de la catégorie $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$ dans elle-même, les «vrais» foncteurs étant alors appelés des foncteurs covariants.

4. Le bifoncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}$ est probablement l'objet le plus étudié de la théorie des catégories. Il joue un rôle essentiel de l'algèbre homologique à la théorie des représentations en passant par la géométrie algébrique. Ce rôle est dû en grande partie à la notion de foncteur représentable, et au célèbre (et élémentaire) Lemme de Yoneda, énoncé par exemple dans [Ma71].

5. Cette affirmation dérive de l'axiome du choix, lequel est de toute façon indispensable pour travailler sur les catégories.

- Le foncteur *Oubli* : $\mathbf{Gr} \to \mathbf{Ens}$ n'est pas plein. En effet, si $(G,\star)$ est un groupe quelconque et $(H,\bullet)$ un groupe non trivial, il existe au moins une application $f : G \to H$ qui n'est pas un morphisme de groupe (il suffit d'envoyer l'élément neutre 1_G sur un élément de H autre que 1_H).
- Le foncteur *Inv* : $\mathbf{Ann_1} \to \mathbf{Gr}$ n'est pas plein non plus. Par exemple, l'anneau $\mathbb{Z}$ possède un seul endomorphisme, mais son image $Inv(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^\times$ est le groupe multiplicatif $\{\pm 1\}$, qui admet deux endomorphismes distincts.

Une troisième propriété des foncteurs se rapproche de l'idée d'injectivité (sur les flèches et non sur les objets).

Définition 6. *Soient* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *deux catégories. Un foncteur* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *est dit fidèle si, pour tous objets* X *et* Y *dans* $\mathbf{A}$*, l'application* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(X),F(Y))$*, définie par* $u \mapsto F(u)$*, est injective.*

- Les foncteur *Incl* : $\mathbf{Top}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{Top}$ et *Oubli* : $\mathbf{Gr} \to \mathbf{Ens}$ sont fidèles.
- Le foncteur *Dual* : $\mathbf{Ev_{\mathbb{R}}}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ev_{\mathbb{R}}}$ est également fidèle, mais cela mérite une démonstration. Si $E \xrightarrow{u} F$ est une application linéaire non nulle, alors, par l'axiome du choix, il existe une forme linéaire f^* sur F dont la restriction à l'image directe $\mathrm{im}(u)$ est non nulle. Alors la composée $f^* \circ u = {}^t u(f^*)$ est non nulle, ce qui prouve que l'application linéaire $F^* \xrightarrow{{}^t u} E^*$ est non nulle. On en déduit que l'application linéaire $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ev_{\mathbb{R}}}}(E,F) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ev_{\mathbb{R}}}}(F^*,E^*)$, définie par $u \mapsto {}^t u$, est injective.
- le foncteur *Inv* : $\mathbf{Ann_1} \to \mathbf{Gr}$ n'est pas fidèle. Par exemple, l'anneau $\mathbb{R}[X]$ a pour image le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ des polynômes constants non nuls. L'application $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, qui à un polynôme P associe le polynôme constant $P(0)$, est un endomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}[X]$, distinct de l'identité. Pourtant, u induit l'identité sur le groupe $\mathbb{R}^*$.

Pour finir, on dit qu'un foncteur est pleinement fidèle s'il est à la fois plein et fidèle. C'est par exemple le cas du foncteur *Incl* : $\mathbf{Top}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{Top}$.

III Équivalences de catégories

Nous allons maintenant nous demander quelle est, pour un foncteur, la notion équivalente à la bijectivité. Une application $f : A \to B$ est bijective si, et seulement si, il existe une application $g : B \to A$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. Cependant, nous avons insisté jusqu'ici sur le fait que l'égalité n'est pas un bon outil pour travailler dans les catégories. Nous allons donc commencer par définir une notion d'isomorphisme entre deux foncteurs.

Définition 7. *Soient* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *deux catégories ; soient* F *et* G *deux foncteurs de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{B}$*. Définir un morphisme*[6] *de foncteurs* $F \xrightarrow{\theta} G$*, c'est donner*

(D6) pour tout objet X *de* $\mathbf{A}$*, une flèche* $F(X) \xrightarrow{\theta_X} G(X)$ *dans la catégorie* $\mathbf{B}$

de sorte que

(A5) pour toute flèche $X \xrightarrow{u} Y$ *dans* $\mathbf{A}$*, on a un diagramme commutatif*[7] *dans B*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "\theta_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(Y) \arrow[d, "\theta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(u)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

On dit que θ *est un isomorphisme de foncteurs si, pour tout objet* X *de* $\mathbf{A}$*, la flèche* θ_X *est un isomorphisme dans* $\mathbf{B}$*. On dit alors que les foncteurs* F *et* G *sont isomorphes.*

- Considérons le foncteur $Bidual = Dual \circ Dual$: $\mathbf{Ev_{\mathbb{R}}} \to \mathbf{Ev_{\mathbb{R}}}$; on associe à un espace vectoriel E son bidual E^{**}, et à une application linéaire u sa bitransposée ${}^{tt}u$.
  Pour tout espace vectoriel E, on dispose d'une application $\theta_E : E \to E^{**}$. Elle est définie pour $x \in E$ et $x^* \in E^*$ par $[\theta_E(x)](x^*) = x^*(x)$, ce qui fait bien de $\theta_E(x)$ une forme linéaire sur E^*. De plus, pour toute application linéaire $E \xrightarrow{u} F$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\theta_E"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F \arrow[d, "\theta_F"] \\ E^{**} \arrow[r, "{}^{tt}u"'] & F^{**} \end{tikzcd}$$

  En effet, pour $x^{**} \in E^{**}$ et $y^* \in F^*$, on a ${}^{tt}u(x^{**})(y^*) = [x^{**} \circ {}^t u](y^*) = x^{**}(y^* \circ u)$. En particulier, si $x^{**} = \theta_E(x)$ pour un $x \in E$, on obtient ${}^{tt}u(\theta_E(x))(y^*) = [y^* \circ u](x) = y^*(u(x)) = \theta_F(u(x))(y^*)$.
  La famille $(\theta_E)_{E \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Ev_{\mathbb{R}}})}$ est donc un morphisme de foncteurs $Id_{\mathbf{Ev_{\mathbb{R}}}} \xrightarrow{\theta} Bidual$.

6. Suite à cette définition, on pourrait considérer la catégorie $\mathbf{Fonc}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ des foncteurs de $\mathbf{A}$ vers $\mathbf{B}$. On pourrait même aller plus loin de définissant une *2-catégorie* **Cat**, dont les objets seraient les catégories, les flèches de premier rang seraient les foncteurs, et les flèches de second rang seraient les morphismes de foncteurs.

7. La relation $\theta_Y \circ F(u) = G(u) \circ \theta_X$ est appelé propriété de naturalité de θ ; on dit aussi que θ est une transformation naturelle de F vers G. Pour cette raison, il est conseillé d'utiliser l'adjectif «naturel» avec prudence quand on parle de catégories. Dans un tel contexte, il sera compris comme un synonyme de «fonctoriel».

Définition 8. *Soient* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *deux catégories, et* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *un foncteur. On dit que* F *est une équivalence de catégories s'il existe un foncteur* $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ *tel que le foncteur* $G \circ F$ *soit isomorphe à* $Id_{\mathbf{A}}$, *et le foncteur* $F \circ G$ *isomorphe à* $Id_{\mathbf{B}}$.

S'il existe une équivalence de catégories $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, *on dit que les catégories* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *sont équivalentes.*

Le résultat suivant est fondamental. Sa démonstration est un peu longue, Mais elle donne un bon aperçu des techniques utilisées en théorie des catégories.

Théorème 9. *Soient* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *deux catégories, et* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *un foncteur. Le foncteur* F *est une équivalence de catégories si, et seulement si, il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.*

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Supposons que F est une équivalence de catégories. Il existe un foncteur $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, et des isomorphismes de foncteurs

$$G \circ F \xrightarrow{\theta} Id_{\mathbf{A}} \text{ et } F \circ G \xrightarrow{\eta} Id_{\mathbf{B}}$$

Soit Y un objet quelconque de $\mathbf{B}$. Posons $X = G(Y)$, un objet de $\mathbf{A}$. Alors la flèche $F(X) \xrightarrow{\eta_Y} Y$ est un isomorphisme, donc F est essentiellement surjectif.

Soit maintenant X et Y deux objets de $\mathbf{A}$. Notons $F_{X \to Y} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(X),F(Y))$ l'application induite par le foncteur F.

Soit $X \xrightarrow{u} Y$ une flèche dans $\mathbf{A}$. On dispose d'isomorphismes $G \circ F(X) \xrightarrow{\theta_X} X$ et $G \circ F(Y) \xrightarrow{\theta_Y} Y$. La naturalité de θ entraîne alors $u = \theta_Y \circ [G \circ F(u)] \circ \theta_X^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} G \circ F(X) \arrow[r, "G\circ F(u)"] \arrow[d, "\theta_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G \circ F(Y) \arrow[d, "\theta_Y"] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

Ainsi la connaissance de l'image $F(u)$ suffit à retrouver l'antécédent u, ce qui prouve l'injectivité de $F_{X \to Y}$.

Réciproquement, soit $F(X) \xrightarrow{v} F(Y)$ une flèche dans $\mathbf{B}$. Posons $u = \theta_Y \circ G(v) \circ \theta_X^{-1}$, élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(X,Y)$. Comme précédemment, la naturalité de θ entraîne $G(v) = G \circ F(u)$, et donc $F \circ G(v) = F \circ G \circ F(u)$. Or on dispose d'isomorphismes $F \circ G \circ F(X) \xrightarrow{\eta_{F(X)}} F(X)$ et $F \circ G \circ F(Y) \xrightarrow{\eta_{F(Y)}} F(Y)$. À son tour, la naturalité de η implique les égalités

$$v = \eta_{F(Y)} \circ [F \circ G(v)] \circ \eta_{F(X)}^{-1}$$
$$F(u) = \eta_{F(Y)} \circ [F \circ G \circ F(u)] \circ \eta_{F(X)}^{-1}$$

Ainsi $v = F(u)$, ce qui prouve la surjectivité de $F_{X \to Y}$, et achève la première partie de la démonstration.

$(\Leftarrow)$ Supposons le foncteur $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ pleinement fidèle et essentiellement surjectif [8]. Il nous faut d'abord construire le foncteur G.

Soit Y est un objet de $\mathbf{B}$. Comme F est essentiellement surjectif, il existe un objet X de $\mathbf{A}$ tel que Y soit isomorphe à $F(X)$ dans $\mathbf{B}$. Fixons un isomorphisme $\eta_Y : F(X) \to Y$, et notons $G(Y) = X$. L'axiome du choix permet de choisir le couple (X, η_Y) simultanément pour tous les objets Y de $\mathbf{B}$.

Soit maintenant $Y_1 \xrightarrow{v} Y_2$ une flèche dans $\mathbf{B}$; notons $X_1 = G(Y_1)$ et $X_2 = G(Y_2)$. Notons w la composée $\eta_{Y_2}^{-1} \circ v \circ \eta_{Y_1}$.

$$\begin{tikzcd} F(X_1) \arrow[r, dotted, "w"] \arrow[d, "\eta_{Y_1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(X_2) \arrow[d, "\eta_{Y_2}"] \\ Y_1 \arrow[r, "v"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Le foncteur F, pleinement fidèle, induit une bijection $F_{X_1 \to X_2} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(X_1,X_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(X_1),F(X_2))$. Posons $G(v) = [F_{X_1 \to X_2}]^{-1}(w)$. Le lecteur vérifiera sans difficulté que nous avons défini un foncteur $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$.

Par construction, les applications η_Y fournissent un isomorphisme de foncteurs $F \circ G \xrightarrow{\eta} Id_{\mathbf{B}}$. Il reste à définir un isomorphisme $G \circ F \xrightarrow{\theta} Id_{\mathbf{A}}$.

Soit X un objet de $\mathbf{A}$. Notons $X' = G \circ F(X)$. Le foncteur F induit une bijection

$$F_{X' \to X} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(X',X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(X'),F(X)).$$

Or on dispose d'un isomorphisme $F(X') \xrightarrow{\eta_{F(X)}} F(X)$; posons donc $\theta_X = [F_{X' \to X}]^{-1}(\eta_{F(X)})$. Puisque $\eta_{F(X)}$ est un isomorphisme, il en en de même pour θ_X, avec $\theta_X^{-1} = [F_{X \to X'}]^{-1}(\eta_{F(X)}^{-1})$. La naturalité de θ se déduit de celle de η, ce qui achève la démonstration. □

Théorème fondamental de l'algèbre linéaire

Nous avons maintenant tous les outils pour expliciter la méthode de démonstration suivie au paragraphe I. Dire que les catégories $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{df}}$ et $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ ont *des comportements semblables*, c'est dire qu'il existe une équivalence entre ces catégories. Il nous reste à expliciter cette équivalence.

Nous définissons un foncteur $Can : \mathbf{Mat}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{df}}$ comme suit. À un entier naturel n, objet de $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$, nous associons $\mathbb{R}^n$, l'espace vectoriel «canonique» de dimension n ; à une matrice A de taille $n \times p$, c'est-à-dire une flèche $p \xrightarrow{A} n$ dans $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$, nous associons $u_A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $X \mapsto AX$, l'application linéaire «canonique» de matrice A. D'après les résultats énumérés

8. Pour cette démonstration, nous allons déroger à notre convention habituelle, et supposer que les collections d'objets $\mathbf{Ob}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{Ob}(\mathbf{B})$ sont des ensembles.

dans la proposition 1, le foncteur *Can* est bien défini, pleinement fidèle et essentiellement surjectif. C'est donc une équivalence de catégories.

Pour définir un foncteur inverse, il faut choisir simultanément une base B_E pour chaque espace vectoriel E de dimension finie. Le foncteur $Base : \mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{df}} \to \mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ est alors défini de la façon suivante. À un espace vectoriel E de dimension finie, nous associons l'entier naturel $\dim_{\mathbb{R}}(E)$; à une application linéaire $E \xrightarrow{u} F$, nous associons sa matrice $\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u)$ dans les bases B_E et B_F. Nous laisserons le lecteur vérifier que *Base* est un foncteur, et qu'il existe des isomorphismes de foncteurs $Base \circ Can \to Id_{\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}}$ et $Can \circ Base \to Id_{\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{df}}}$.

La démonstration du théorème 2 se résume alors en quelques mots. Dans la catégorie $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{df}}$, toute flèche $E \xrightarrow{u} F$ se factorise en la composée $v \circ w$ d'un monomorphisme $\mathrm{im}(u) \xrightarrow{v} F$ et d'un épimorphisme $E \xrightarrow{w} \mathrm{im}(u)$. De plus, le monomorphisme v, simplifiable à gauche par définition, est aussi inversible à gauche, et l'épimorphisme w, simplifiable à droite par définition, est aussi inversible à droite. Or les catégories $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{df}}$ et $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ sont équivalentes. Donc, dans la catégorie $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$, toute flèche $p \xrightarrow{A} n$ se factorise en le produit BC d'une flèche $r \xrightarrow{B} n$ inversible à gauche et d'une flèche $p \xrightarrow{C} r$ inversible à droite.

D'autres résultats peuvent être déduits de cette équivalence de catégories. Par exemple, on sait que deux espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes si, et seulement si, il ont la même dimension. Par conséquent, deux objets de la catégorie $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ sont isomorphes si, et seulement si, ils sont égaux. En d'autres termes, chaque classe d'isomorphisme possède un unique représentant dans $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$.

Plus généralement, retenons que tout théorème concernant les applications linéaires en dimension finie peut se traduire en un théorème concernant les matrices, et réciproquement. Les étudiants de première année d'université ou de classes préparatoires reconnaîtront là un principe qui structure tout leur cours d'algèbre linéaire. Ce mode de raisonnement permet de réduire beaucoup de problèmes d'algèbre linéaire (typiquement, la résolution d'équations) à des calculs portant sur des matrices, qui peuvent généralement être traités par ordinateur.

IV Perspective historique

Les catégories ont été définies pour la première fois par Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane [EM45]. Elles fournissaient un langage commode pour définir certains outils d'algèbre homologique [9].

C'est Alexander Grothendieck [Gr57] qui en a fait un objet de recherche à part entière, en introduisant la notion de catégorie abélienne [10] et de foncteurs adjoints. La théorie des catégories a continué de se développer sous son impulsion, avec notamment la définition des catégories triangulées et des catégories dérivées par Jean-Louis Verdier.

La théorie des catégories est alors devenue une des bases de la géométrie algébrique, à travers la notion de schéma, qui permet de voir un objet géométrique comme un foncteur.

Parallèlement, les catégories sont aussi devenues centrales en théorie des représentations, de plusieurs manières. D'une part, le théorème de Kiiti Morita incite à étudier une algèbre A à travers la catégorie des A-modules. D'autre part, les méthodes de George Lusztig permettent de voir certaines algèbres (aussi appelées groupes quantiques) comme les *groupes de Grothendieck* associés à certaines catégories triangulées, provenant elles-mêmes d'objets géométriques.

Un autre thème aux multiples applications est celui des 2-catégories, ou plus généralement des n-catégories (voir la note 6). En s'inspirant de l'action d'un groupe sur un ensemble, on peut par exemple faire agir une 2-catégorie sur une catégorie (ou 1-catégorie).

Ces domaines de recherche sont en plein développement aujourd'hui, et sans doute pour longtemps. Les applications de la théorie des catégories ne se limitent plus à l'algèbre et à la géométrie, mais débordent vers l'analyse, l'informatique théorique, et même la physique. On peut s'attendre à ce que ce langage devienne aussi commun dans les mathématiques du XXI^e^ siècle que le langage des ensembles l'a été dans les mathématiques du XX^e^ siècle.

Références

[EM45] S. Eilenberg, S. MacLane, *General theory of natural equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc., 1945.

[Gr57] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J., 1957.

[KS06] M. Kashiwara, P. Schapira, *Categories and sheaves*, Springer-Verlag, 2006.

[Ma71] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

9. Pour qui souhaite se documenter un peu plus sur les catégories, la synthèse [Ma71] reste une très bonne introduction. L'ouvrage de référence [KS06] est plus récent, très complet, mais un peu aride pour le débutant.

10. Voir la note 5 du précédent article. Dans une catégorie abélienne, les flèches peuvent s'additionner en plus de se composer ; il y a en particulier un objet nul, et donc des flèches nulles. De plus, chaque flèche possède un noyau, une image et un conoyau, grâce auxquels on peut reconnaître les mono/épi/isomorphismes.