Quadrature n° 87 (2013) 1-7

Le langage des catégories I

Un point de vue moderne sur les mathématiques

par Erwan BILAND*

Résumé.

Depuis la fin du XIX^e siècle, la rigueur logique occupe une place toujours plus importante dans les mathématiques ; cette exigence a notamment motivé la formalisation de la théorie des ensembles. Parallèlement, l'interaction entre algèbre et géométrie a donné naissance à la topologie algébrique et à un nouvel outil : l'homologie.
Ces deux processus ont mené, au milieu du XX^e siècle, à l'invention des catégories. D'abord imaginées pour mieux fonder les théories homologiques, elles ont ensuite essaimé dans tous les domaines des mathématiques, et au-delà.
Nous proposons ici une introduction au langage des catégories. Dans un prochain article, nous l'utiliserons pour parler d'algèbre linéaire, et nous verrons combien il peut être précieux pour comprendre en profondeur le lien entre matrices et espaces vectoriels.

I Qu'est-ce qu'une catégorie ?

Il est un schéma qui devient vite familier quand on suit des cours de mathématiques à l'université ou en classes préparatoires ; c'est celui qui gouverne les débuts de chapitres. Pour commencer, on définit les ensembles, puis les applications entre deux ensembles. Souvent, on parle aussi d'ensembles ordonnés, puis d'applications croissantes. Plus tard, en algèbre, on définit les groupes, puis les morphismes de groupes ; les anneaux, puis les morphismes d'anneaux ; les corps, puis les morphismes de corps. En algèbre linéaire, on étudie les espaces vectoriels, puis les applications linéaires ; les espaces vectoriels euclidiens, puis les applications linéaires orthogonales. En analyse, on s'intéresse aux espaces topologiques (ou simplement aux parties de $\mathbb{R}$), puis aux fonctions continues. En géométrie différentielle, on définit les variétés différentielles, puis les fonctions lisses...

On pourrait remplir des pages avec ce genre d'exemples. Retenons que, dans chaque cas, on a défini des objets, en l'occurence des ensembles munis d'une ou plusieurs structures additionnelles. Puis on a défini les morphismes entre ces objets, c'est-à-dire les applications ensemblistes qui sont compatibles avec les structures précitées.

Se donner ainsi des objets, et des flèches entre ces objets, c'est définir une *catégorie*.

Objets et flèches

Définition 1. *Une catégorie* $\mathbf{C}$ *est la donnée*

(D1) d'une collection [1] *d'objets* $\mathbf{Ob}(\mathbf{C})$*. Les objets seront notés par exemple* X*,* Y*,* Z*, ...*

(D2) d'une application $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,-)$ *qui associe, à deux objets* X*,* Y *de* $\mathbf{C}$*, un ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$*. Un élement* u *de cet ensemble est appelé une flèche*

* U. Paris 7, U. Laval (Québec) ; eb@erwanbiland.fr

1. Dans les débuts de la théorie des catégories, le statut de cette «collection» d'objets n'était pas très clair : est-ce un ensemble ou non ? Voir par exemple [EM45]. Le bon point de vue est sans doute celui exposé par Kashiwara et Schapira dans l'ouvrage de référence [KS06], basé sur la notion d'ensemble «univers». Pour éviter les aspects les plus techniques de la théorie, et quitte à manquer un peu de rigueur, nous accepterons ici que $\mathbf{Ob}(\mathbf{C})$ ne soit pas un ensemble. Ceci permet par exemple de définir la «catégorie des ensembles», bien que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

de X vers Y, et noté $X \xrightarrow{u} Y$. Nous réserverons la notation $u : X \to Y$ aux applications ensemblistes.

(D3) d'une loi de composition qui associe, à deux flèches $X \xrightarrow{u} Y$ et $Y \xrightarrow{v} Z$ telles que l'objet d'arrivée de u est l'objet de départ de v, une flèche composée $X \xrightarrow{v \circ u} Z$. Ceci revient à définir, dès qu'on a trois objets X, Y, Z, une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z).$$

Ces données doivent vérifier les axiomes suivants.

(A1) Pour tout triplet de flèches $W \xrightarrow{t} X$, $X \xrightarrow{u} Y$, $Y \xrightarrow{v} Z$, les flèches composées $W \xrightarrow{v \circ (u \circ t)} Z$ et $W \xrightarrow{(v \circ u) \circ t} Z$ sont égales. La composition est ainsi associative.

(A2) Pour tout objet X, il existe une flèche $X \xrightarrow{e} X$ telle que

(i) pour toute flèche $X \xrightarrow{u} Y$, $u \circ e = u$: la flèche e est neutre à droite.

(ii) pour toute flèche $Y \xrightarrow{v} X$, $e \circ v = v$: la flèche e est neutre à gauche.

La notation $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}$ vient du fait que les flèches sont couramment appelées homomorphismes, ou simplement morphismes. On parle aussi d'endomorphisme pour une flèche d'un objet dans lui-même, et on note $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,X)$.

On vérifie facilement que, pour un objet X fixé, la flèche neutre $e \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(X)$ est unique ; on la note Id_X.

Exemples

Commençons par un florilège des catégories les plus connues, déjà évoquées dans l'introduction. Pour chacune, nous donnons sa notation classique (en gras), suivie de la définition de ses objets et flèches.

- **Ens** : les objets sont les ensembles ; les flèches d'un ensemble X dans un ensemble Y sont toutes les applications (ou fonctions) de X dans Y.
- **Gr** : les objets sont les groupes $(G,\star)$; les flèches $(G,\star) \to (H,\bullet)$ sont les morphismes de groupes.
- $\mathbf{Ann_1}$: les objets sont les anneaux unitaires ; les flèches sont les morphismes d'anneaux qui envoient l'unité sur l'unité.
- $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$: les objets sont les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ; les flèches sont les applications $\mathbb{R}$-linéaires.
- **Ord** : les objets sont les ensembles munis d'une relation d'ordre ; les flèches sont les applications croissantes.
- **Top** : les objets sont les espaces topologiques ; les flèches sont les applications continues.

Pour tous ces exemples, nous avons donné les objets et les flèches, mais pas la loi de composition des flèches. Les flèches sont ici des applications ensemblistes ; on utilise donc la composition usuelle des applications.

Notons qu'il n'est pas suffisant de donner les objets pour définir une catégorie ; par exemple, on pourrait considérer la catégorie dont les objets sont les anneaux unitaires, et les flèches les morphismes d'anneaux qui n'envoient pas nécessairement l'unité sur l'unité. Cette catégorie serait différente de $\mathbf{Ann_1}$ (voir la note 6).

On peut aussi s'intéresser à des sous-catégories des catégories précédentes. Sans chercher à définir cette notion, donnons quelques exemples souvent utiles.

- **Ab** : les objets sont les groupes abéliens ; les flèches sont les morphismes de groupes.
- $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{df}}$: les objets sont les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie ; les flèches sont les applications $\mathbb{R}$-linéaires.
- $\mathbf{Top}_{\mathbb{R}}$: les objets sont les parties de $\mathbb{R}$; les flèches sont les fonctions continues.

Ces exemples sont très importants. Pour autant, la définition d'une catégorie n'impose pas que les objets soient des ensembles et les flèches des applications. Donnons quelques exemples plus exotiques.

- **Un** : il y a un unique objet, par exemple le nombre 1, et une unique flèche $1 \xrightarrow{e} 1$. La composition est définie en posant $e \circ e = e$, ce qui est d'ailleurs le seul choix possible.
- **Carte** : choisissons une carte, par exemple une carte routière de l'Europe. Les objets de la catégorie **Carte** sont tous les points de cette carte routière (ou, pour simplifier, les noeuds du réseau routier). Si A et B sont deux objets, une flèche $A \to B$ est un chemin du point A au point B, tels qu'il pourrait être donné par un GPS de voiture. Si $A \xrightarrow{i} B$ et $B \xrightarrow{j} C$ sont deux flèches, la composée $j \circ i$ est le chemin obtenu en parcourant d'abord i puis j pour se rendre du point A au point C.
  L'associativité est claire. Pour tout objet A, la flèche Id_A est le chemin vide, consistant à rester au point A sans bouger.

L'exemple **Carte** a l'intérêt de montrer la grande flexibilité du langage des catégories. On pense immédiatement à des applications en topologie, plus précisément en topologie algébrique. Bien au-delà du GPS, les catégories jouent aussi un rôle de plus en plus important en informatique théorique (voir [Me09]). Ne peut-on pas voir un algorithme comme un chemin entre deux états d'une machine, c'est-à-dire une flèche entre deux objets d'une certaine catégorie ?

Venons-en à l'exemple qui servira de fil directeur dans cet article et le suivant.

- **Mat**$_{\mathbb{R}}$: les objets sont les entiers naturels 0, 1, 2, *etc.* Si n et p sont deux objets, les flèches $p \to n$ sont les matrices de taille $n \times p$ à coefficients réels [2]. Si $q \xrightarrow{A} p$ et $p \xrightarrow{B} n$ sont deux flèches, alors A et B sont des matrices de tailles respectives $n \times p$ et $p \times q$; la composée $B \circ A$ est la matrice produit BA, de taille $n \times q$.

  Le produit matriciel est associatif. De plus, pour tout entier n, la matrice identité I_n, de taille $n \times n$, est un élément neutre à gauche et à droite pour le produit matriciel. Les axiomes (A1) et (A2) sont donc vérifiés.

Remarquons une première vertu de cette définition. Dans la formation des étudiants au premier cycle en algèbre, on accorde souvent une grande importance à la notion de loi de composition interne sur un ensemble fixé, et aux propriétés qui y sont attachées : associativité, commutativité, existence d'un élément neutre, d'un inverse. De ce point de vue, le produit matriciel est assez agaçant. Pour un entier n fixé, il s'agit bien d'une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Mais le produit entre deux matrices de tailles différentes ne rentre pas du tout dans ce cadre. La catégorie **Mat**$_{\mathbb{R}}$, par contre, permet d'englober dans un même objet mathématique le produit entre matrices de toutes tailles.

En ce sens, le langage des catégories commence déjà à enrichir notre point de vue, en permettant de *nommer* un objet mathématique que le seul langage des ensembles, ou des anneaux, avait du mal à décrire de façon satisfaisante [3].

Au delà de cet exemple, nous allons maintenant chercher à comprendre ce qu'apporte vraiment ce nouveau langage. Dans cet article, nous en explorerons la puissance et les limites. Nous donnerons des exemples de propriétés qui peuvent être énoncée dans le langage des catégories seul, c'est-à-dire sans référence à la nature interne des objets et flèches concernés. Dans un prochain article, nous verrons comment ces idées peuvent servir à *comparer* des théories mathématiques. À titre d'exemple, nous utiliserons les catégories pour mettre en évidence le lien profond entre le calcul matriciel et l'algèbre linéaire.

2. Nous prenons les conventions suivantes. Si $n = 0$ ou $p = 0$, il existe une unique matrice de taille $n \times p$, appelée la matrice nulle. Si l'un des entiers n, p, q est nul, alors le produit de toute matrice de taille $n \times p$ par toute matrice de taille $p \times q$ est la matrice nulle de taille $n \times q$. Notons que la matrice identité I_0 est aussi la matrice nulle de taille 0×0.

3. Ce cas n'est pas isolé. En topologie algébrique, par exemple, on trouve bien des avantages à remplacer la notion de groupe par celle de groupoïde, à savoir une catégorie dans laquelle toutes les flèches sont des isomorphismes (voir la définition 2). Ce point de vue est développé dans [Hi71].

II Que peut-on dire (ou pas) dans le langage des catégories ?

Pour éclairer ce que nous appelons le langage des catégories, nous allons faire un parallèle avec un autre contexte, celui des anneaux.

Soit x un élément de l'anneau $(\mathbb{R}, +, \times)$. Considérons les deux propriétés :

(1) il existe un réel y tel que $x = y^2$;

(2) le réel x est positif ou nul.

La propriété (1) fait référence à un autre élément de l'anneau, et à une loi de l'anneau, la multiplication. Elle est donc exprimée *dans le langage des anneaux*. En particulier, elle est préservée par tout isomorphisme d'anneau. En revanche, la propriété (2) fait référence à l'ordre usuel dans $\mathbb{R}$, qui ne fait pas partie de sa structure d'anneau. Elle n'est donc pas exprimée dans le langage des anneaux. Pourtant, les propriétés (1) et (2) sont équivalentes : il est donc parfois possible de reformuler dans le cadre de l'anneau $(\mathbb{R}, +, \times)$ une propriétés dont l'énoncé semble sortir de ce cadre.

Dans ce paragraphe, nous allons pareillement reformuler, dans le langage des catégories, des propriétés élémentaires des objets et flèches de la catégorie **Ens**. Ceci fait, nous pourrons transporter ces propriétés dans d'autres catégories usuelles, avec parfois des surprises.

Au vu de la définition 1, les briques élémentaires d'une propriété qui s'exprime *dans le langage des catégories* sont au nombre de quatre : les objets, les flèches, la composition, et la flèche identité associée à chaque objet. En particulier, même si les objets de la catégorie considérée sont des ensembles, une telle propriété ne doit pas faire référence aux éléments de ces ensembles.

Malgré ces contraintes, nous allons voir que le langage des catégories offre une certaine souplesse d'expression.

Isomorphismes

Soit $X \xrightarrow{u} Y$ une flèche dans la catégorie **Ens** ; ainsi X et Y sont deux ensembles, et u est une application de X vers Y.

Définition. *On dit que l'application u est bijective si, pour tout élément $y \in Y$, il existe un unique élément $x \in X$ tel que $u(x) = y$.*

On a là un exemple typique de propriété qui *n'est pas* énoncée dans le langage des catégories, puisqu'elle fait référence, par deux fois, à des éléments des ensembles X et Y. Cependant, il existe une autre manière de reconnaître les applications bijectives.

Théorème. *L'application u est bijective si, et seulement si, il existe une application $Y \xrightarrow{v} X$ telle que $v \circ u = \mathrm{Id}_X$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_Y$.*

Pour le coup, cette caractérisation n'utilise que le langage des catégories. On peut donc s'en inspirer pour définir, dans une catégorie quelconque, une notion aussi proche que possible de celle de *flèche bijective*.

Définition 2. *Soit* **C** *une catégorie et $X \xrightarrow{u} Y$ une flèche (ou morphisme) dans* **C***. On dit que u est un isomorphisme s'il existe une flèche $Y \xrightarrow{v} X$ dans* **C** *telle que $v \circ u = \mathrm{Id}_X$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_Y$.*

Si la flèche v de la définition existe, alors elle est unique (grâce à l'associativité de la composition) et c'est un isomorphisme. On l'appelle l'isomorphisme réciproque de u, et on la note u^{-1}.

Les isomorphismes sont donc les flèches inversibles. En pratique, cette notion coïncide souvent avec celle de flèche bijective.

- Soit $(G,\star) \xrightarrow{u} (H,\bullet)$ une flèche dans la catégorie **Gr**. Par définition, $u : G \to H$ est une application ensembliste qui est, de plus, un morphisme de groupes. Si l'application u est bijective, alors on sait que la bijection réciproque $u^{-1} : H \to G$ est un morphisme de groupes et vérifie les égalités $u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_X$ et $u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_Y$.

  Réciproquement, s'il existe un morphisme de groupes $v : H \to G$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_X$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_Y$, alors l'application u est bijective. Ainsi, dans la catégorie **Gr**, la flèche u est un isomorphisme si, et seulement si, l'application u est bijective.

- De même, dans les catégories **Ab**, $\mathbf{Ann_1}$, $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$, $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{df}}$ définies plus haut, les isomorphismes sont exactement les flèches bijectives.

- Dans la catégorie $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$, les flèches ne sont pas des applications. Mais la définition 2 s'applique tout de même : les isomorphismes sont les matrices inversibles. En particulier, s'il existe un isomorphisme $p \xrightarrow{A} n$, alors la matrice A est carrée, donc les entiers p et n sont égaux.

L'exemple des matrices montre déjà qu'il serait dangereux de confondre isomorphismes et bijections. Nous allons maintenant étudier des catégories où ces notions diffèrent, bien que les flèches soient des applications ensemblistes.

- Considérons l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers strictement positifs. Parmi les différentes relations d'ordre possibles sur $\mathbb{N}^*$, notons $\leqslant$ l'ordre usuel, et $|$ l'ordre de divisibilité. Ainsi $(\mathbb{N}^*,\leqslant)$ et $(\mathbb{N}^*,|)$ sont deux objets distincts de la catégorie **Ord**. Notons $u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ l'application identité. Cette application est croissante de $(\mathbb{N}^*,|)$ dans $(\mathbb{N}^*,\leqslant)$; en effet, pour a, b dans $\mathbb{N}^*$,

  $$a \,|\, b \quad \Rightarrow \quad a \leqslant b$$

  Ainsi $(\mathbb{N}^*,|) \xrightarrow{u} (\mathbb{N}^*,\leqslant)$ est une flèche dans la catégorie **Ord**. Soulignons qu'il ne s'agit pas d'une flèche identité, puisque l'objet d'arrivée est différent de l'objet de départ. Clairement, l'application u est bijective. Pour autant, la flèche u est-elle un isomorphisme d'ensembles ordonnés ?

  Si c'était le cas, il existerait une flèche v de $(\mathbb{N}^*,\leqslant)$ vers $(\mathbb{N}^*,|)$ telle que $v \circ u = \mathrm{Id}_{(\mathbb{N}^*,\leqslant)}$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_{(\mathbb{N}^*,|)}$. Comme application ensembliste, on aurait $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}$ et donc $v = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}$. Mais alors v ne serait pas croissante, car $2 \leqslant 3$ et $2 \nmid 3$. Donc v ne serait pas une flèche dans **Ord**, ce qui est une contradiction.

  Il existe donc, dans la catégorie **Ord**, des flèches bijectives qui ne sont pas des isomorphismes.

- Dans la catégorie $\mathbf{Top}_{\mathbb{R}}$, considérons les objets $X = [0,1[\cup[2,3]$ et $Y = [0,2]$, et la flèche $X \xrightarrow{f} Y$ définie par $f(x) = x$ si $x \in [0,1[$ et $f(x) = x-1$ si $x \in [2,3]$. La fonction f est continue et bijective. Mais la bijection réciproque $f^{-1} : Y \to X$ n'est clairement pas continue au point 1 ; ce n'est donc pas un morphisme dans $\mathbf{Top}_{\mathbb{R}}$. Là encore, on en déduit que la flèche bijective f n'est pas un isomorphisme.

  De façon générale, dans la catégorie **Top**, les isomorphismes sont les homéomorphismes, c'est-à-dire les fonctions continues bijectives dont la réciproque est aussi bijective (ce qui n'est pas toujours le cas, on vient de le voir).

Classes d'isomorphisme

Définition 3. *Soit* **C** *une catégorie, et X, Y deux objets de* **C***. On dit que X est isomorphe à Y dans* **C** *s'il existe un isomorphisme $X \xrightarrow{u} Y$.*

Tout objet X est isomorphe à lui-même, car Id_X est un isomorphisme. Si X est isomorphe à Y, alors Y est isomorphe à X (*via* l'isomophisme réciproque). Si X est isomorphe à Y et Y à Z, alors X est isomorphe à Z (*via* l'isomorphisme composé). On dispose ainsi d'une relation d'équivalence sur les objets de la catégorie **C**. Pour un objet X fixé, la collection des objets de **C** isomorphes à X est appelée la classe d'isomorphisme [4] de X.

Soient X_1 et X_2 deux objets isomorphes dans la catégorie **C**. Soit $X_1 \xrightarrow{u} X_2$ un isomorphisme. Si f est un endomorphisme de X_1, alors $u \circ f \circ u^{-1}$ est un endomorphisme de X_2. En fait, l'application $f \mapsto u \circ f \circ u^{-1}$

4. Si la collection $\mathbf{Ob}(\mathbf{C})$ est un ensemble, on peut alors définir l'ensemble des classes d'isomorphisme de la catégorie **C**.

est une bijection de $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(X_1)$ sur $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(X_2)$. Plus généralement, pour tout objet Y de $\mathbf{C}$, on dispose de bijections $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,X_1) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,X_2)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X_1,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X_2,Y)$.

En résumé, les objets X_1 et X_2 sont indiscernables : ils ont exactement le même comportement dans la catégorie $\mathbf{C}$. De façon générale, quand on veut définir un objet dans une catégorie, on se contente en général de le définir *à isomorphisme près* (unique isomorphisme, si possible). Nous espérons avoir convaincu le lecteur que plus de précision n'aurait, de toute façon, pas grand intérêt.

Monomorphismes, épimorphismes

Nous venons de traduire la bijectivité en langage des catégories. Il semble naturel de faire de même pour l'injectivité et la surjectivité.

Soit $X \xrightarrow{u} Y$ une flèche dans la catégorie **Ens**. On peut caractériser l'injectivité de l'application u de deux façons.

$$\begin{aligned} u \text{ est injective } &\Leftrightarrow \quad u \text{ possède un inverse à gauche} \\ &\Leftrightarrow \quad u \text{ est simplifiable à gauche.} \end{aligned}$$

La première propriété est la plus proche de celle qui a été choisie pour caractériser les bijections. Cependant, elle a l'inconvénient de mal se généraliser à d'autres structures comme les groupes. Ainsi, l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$, est un endomorphisme injectif du groupe additif $(\mathbb{Z},+)$. Mais il n'existe pas de morphisme $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

Nous préférerons donc fonder nos définitions sur la deuxième propriété.

Définition 4. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie, et* $X \xrightarrow{u} Y$ *une flèche dans* $\mathbf{C}$.

(1) On dit que u est un monomorphisme si u est simplifiable à gauche, c'est-à-dire si, pour toutes flèches v, w arrivant dans X,

$$u \circ v = u \circ w \;\Rightarrow\; v = w.$$

(2) On dit que u est un épimorphisme si u est simplifiable à droite, c'est-à-dire si, pour toutes flèches v, w partant de Y,

$$v \circ u = w \circ u \;\Rightarrow\; v = w.$$

Dans plusieurs catégories, les monomorphismes coïncident avec les flèches injectives, et les épimorphismes avec les flèches surjectives. Cependant, ce n'est pas le cas général.

- Tout se passe bien dans les catégories **Gr**, **Ab**, $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$, $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$, $\mathbf{Ev}^{\mathbf{df}}_{\mathbb{R}}$, $\mathbf{Ann_1}$, **Ord** (un bon exercice, surtout pour les deux dernières citées).
- Les monomorphismes et épimorphismes dans la catégorie $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ peuvent être caractérisés par le rang.
- Soit $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ l'injection canonique. Il s'agit clairement d'une application continue ; on peut donc voir $\mathbb{Q} \xrightarrow{j} \mathbb{R}$ comme une flèche dans la catégorie $\mathbf{Top}_{\mathbb{R}}$. Soit maintenant A une partie de $\mathbb{R}$, et f, g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans A. Si $f \circ j = g \circ j$, alors les fonctions f et g coïncident sur $\mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$, les fonctions continues f et g sont donc égales. Ainsi la flèche j est simplifiable à droite : c'est un épimorphisme dans la catégorie $\mathbf{Top}_{\mathbb{R}}$. Une flèche non surjective peut donc être un épimorphisme.

  Plus généralement, dans la catégorie **Top**, une flèche $X \xrightarrow{f} Y$ est un épimorphisme si, et seulement si, l'image directe $f(X)$ est dense dans Y. En revanche, les monomorphismes sont bien les flèches injectives.

Ce dernier exemple est intéressant à plus d'un titre. En effet, l'application j est injective ; on en déduit facilement que la flèche j est un monomorphisme. Comme nous l'avons vu, c'est aussi un épimorphisme. Est-ce donc un isomorphisme ? Non car, si c'était le cas, l'existence de l'isomorphisme réciproque forcerait l'application j à être bijective, ce qu'elle n'est pas.

Rappelons que, dans la catégorie **Ens**, une flèche est un isomorphisme si, et seulement si, elle est un monomorphisme et un épimorphisme. Dans une catégorie $\mathbf{C}$ quelconque, il est encore vrai que tout isomorphisme est nécessairement un monomorphisme et un épimorphisme. En revanche, la réciproque est généralement [5] fausse, comme nous venons de le montrer.

Retenons que beaucoup de notions catégoriques sont définies par référence à une catégorie particulière (souvent **Ens** pour les plus élémentaires). Une fois la définition posée, ces notions deviennent autonomes ; il est dangereux de faire comme si elles se confondaient avec les notions ensemblistes qui les ont inspirées.

La catégorie opposée

Dans la définition 4, le lecteur aura peut-être été sensible à la remarquable symétrie entre la définition d'un

5. Il convient de souligner qu'il existe de nombreux exemples de catégories dans lesquelles toute flèche qui est un monomorphisme et un épimorphisme est automatiquement un isomorphisme. C'est le cas des catégories **Ens**, **Gr**, $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$.
Plus généralement, c'est une des propriétés requises dans la définition des *catégories abéliennes*, qui jouent un rôle fondamental en algèbre homologique. Outre **Ab** et $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$, la catégorie $\mathbf{Mod}_A$ des modules sur un anneau A (commutatif ou non) est une catégorie abélienne. Citons aussi la catégorie des faisceaux en A-modules sur un espace topologique X, qui intervient constamment en géométrie différentielle ou algébrique. En revanche, **Ens** et **Gr** ne sont pas des catégories abéliennes.

monomorphisme et celle d'un épimorphisme. En fait, on peut passer de l'une à l'autre en changeant simplement le sens des flèches. Cette symétrie se formalise dans la notion suivante.

Définition 5. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie, dans laquelle la composition des flèches est notée* $\circ$. *On définit la catégorie opposée* $\mathbf{C}^{op}$ *en posant* $\mathbf{Ob}(\mathbf{C}^{op}) = \mathbf{Ob}(\mathbf{C})$ *et, pour deux objets* X *et* Y, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{op}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,X)$. *La composition des flèches dans* $\mathbf{C}^{op}$, *notée* $\bullet$, *est définie par* $u \bullet v = v \circ u$.

Soit $X \xrightarrow{u} Y$ une flèche dans $\mathbf{C}$. Alors $Y \xrightarrow{u} X$ est une flèche dans $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$. On vérifie facilement que u est un isomorphisme dans $\mathbf{C}$ si, et seulement si, u est un isomorphisme dans $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$. De plus, u est un monomorphisme dans $\mathbf{C}$ si, et seulement si, u est un épimorphisme dans $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$; u est un épimorphisme dans $\mathbf{C}$ si, et seulement si, u est un monomorphisme dans $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$.

La catégorie opposée est un outil à ne pas négliger lorsqu'on crée de nouvelles définitions : toute notion catégorique possède une notion *duale*, obtenu en renversant le sens des flèches. Cet outil permet aussi de raccourcir certaines démonstrations. Par exemple, si nous avons prouvé que tout isomorphisme est un monomorphisme, le passage par la catégorie opposée permet d'en déduire immédiatement que tout isomorphisme est un épimorphisme.

Objet initial, objet final

Jusqu'ici, nous nous sommes concentré sur les propriétés des flèches d'une catégorie. Il est temps de parler un peu plus des objets. Là encore, l'inspiration viendra de la catégorie **Ens**, qui contient un objet remarquable : l'ensemble vide. Est-il possible de caractériser cet objet par une propriété qui s'exprime dans le langage des catégories ?

La réponse est oui. Pour tout ensemble X, il existe une unique application $u : \varnothing \to X$ (celle dont le graphe est vide). En revanche, si I un ensemble non vide, alors il existe en général plusieurs applications $u : I \to X$ (c'est le cas dès que l'ensemble X contient au moins deux éléments). L'ensemble vide est donc caractérisé, dans la catégorie **Ens**, par la propriété suivante.

Définition 6. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie, et* I *un objet de* $\mathbf{C}$. *On dit que* I *est un objet initial si, pour tout objet* X *de* $\mathbf{C}$, *l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(I,X)$ *contient une unique flèche.*

Comme nous venons de le voir, la catégorie **Ens** contient un unique objet initial, l'ensemble vide. Qu'en est il des autres catégories déjà étudiées ?

- **Gr**, **Ab** : un groupe $(G,\star)$ est un objet initial si, et seulement si, l'ensemble G contient un seul élément (qui est donc l'élément neutre du groupe). Dans le cas contraire, il existe au moins deux morphismes différents du groupe $(G,\star)$ dans lui-même : le morphisme identité et le morphisme trivial (qui envoie tout élément sur l'élément neutre).
- $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$, $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{df}}$: un espace vectoriel est un objet initial si, et seulement si, il contient seulement l'élément nul.
- $\mathbf{Ann_1}$: l'anneau $\mathbb{Z}$ est un objet initial [6]. En effet, pour tout anneau unitaire A, il existe un seul morphisme d'anneaux $u : \mathbb{Z} \to A$ qui envoie $1_{\mathbb{Z}}$ sur 1_A.
- **Top**, $\mathbf{Top}_{\mathbb{R}}$: comme dans **Ens**, l'unique objet initial est l'espace topologique vide.
- $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$: l'objet 0 est initial, car $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}}(0,n)$ est réduit à la matrice nulle pour tout entier naturel n. Il n'y a pas d'autre objet initial.
- **Carte** : si on a construit cette catégorie sur une carte routière de l'Europe, il n'y a pas d'objet initial. En effet, à partir de tout point I, il existe plusieurs chemins pour se rendre à Rome. Notons que, si le GPS ne prend pas en charge les transferts par bateau, il pourrait aussi n'en exister aucun ; mais ceci contredirait un célèbre dicton...

Le dernier exemple montre qu'il n'existe pas toujours d'objet initial dans une catégorie. En revanche, les exemples précédents suggèrent une forme d'unicité, non pas stricte, mais *à unique isomorphisme près*.

Proposition 7. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie, et* I_1, I_2 *deux objets de* $\mathbf{C}$. *Si* I_1 *et* I_2 *sont des objets initiaux, alors il existe un unique isomorphisme* $I_1 \xrightarrow{u} I_2$.

Démonstration. Puisque I_1 est un objet initial, il existe une unique flèche $I_1 \to I_2$, que nous notons u ; il existe aussi une unique flèche $I_1 \to I_1$, qui ne peut être que Id_{I_1}. De même, puisque I_2 est un objet initial, il existe une unique flèche $I_2 \to I_1$, notée v, et une unique flèche $I_2 \to I_2$, à savoir Id_{I_2}.

L'unicité de ces flèches impose leurs règles de composition : $v \circ u = \mathrm{Id}_{I_1}$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_{I_2}$. Ainsi u et v sont des isomorphismes réciproques, et il n'y en pas d'autres. □

Rappelons maintenant le principe de dualité qui a été évoqué dans le paragraphe précédent. Si on a défini une notion intéressante dans une catégorie, on obtient en général une autre notion intéressante en renversant le sens des flèches.

Définition 8. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie, et* F *un objet de* $\mathbf{C}$. *On dit que* F *est un objet final si, pour tout objet* X *de* $\mathbf{C}$, *l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,F)$ *contient une unique flèche.*

6. Si on accepte comme flèches les morphismes d'anneaux qui n'envoient pas nécessairement l'unité sur l'unité, il existe encore un anneau initial, mais celui-ci est l'anneau nul, et non plus $\mathbb{Z}$. Ceci illustre l'importance de bien spécifier les flèches dans la définition d'une catégorie.

Ceci revient à dire que F est un objet final dans $\mathbf{C}$ si, et seulement si, c'est un objet initial dans $\mathbf{C}^{\text{op}}$. Par dualité, on obtient aussi :

Proposition 9. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie, et* F_1, F_2 *deux objets de* $\mathbf{C}$. *Si* F_1 *et* F_2 *sont des objets initiaux, alors il existe un unique isomorphisme* $F_1 \xrightarrow{u} F_2$.

Démonstration. Par définition, les objets F_1 et F_2 sont initiaux dans la catégorie $\mathbf{C}^{\text{op}}$. D'après la proposition 7, il existe un unique isomorphisme $F_2 \xrightarrow{u} F_1$ dans $\mathbf{C}^{\text{op}}$. Par définition de la catégorie opposée, u est une flèche $F_1 \to F_2$ dans $\mathbf{C}$, et c'est un isomorphisme. □

Il reste à étudier les objets finaux dans quelques-unes des catégories qui nous sont maintenant familières

- **Ens**, **Top**, $\mathbf{Top}_{\mathbb{R}}$: un objet final est un ensemble (ou un espace topologique, ou une partie de $\mathbb{R}$) contenant un seul élément.
- **Gr**, $\mathbf{Ann_1}$, $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$, *etc.* : un objet final est un groupe, anneau, espace vectoriel, réduit à un seul élément (l'élément neutre ou nul).
- $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$: l'unique objet final est l'entier 0.
- **Carte** : pas d'objet final.

Objet nul

Dans les nombreux exemples du paragraphe précédent, le lecteur aura sans doute remarqué qu'il est fréquent, mais pas systématique, que les objets initiaux et finaux d'une catégorie soient les mêmes. Ce constat se formalise dans la définition suivante.

Définition 10. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie, et* N *un objet de* $\mathbf{C}$. *On dit que* N *est un objet nul s'il est à la fois initial et final.*

La proposition 7 entraîne immédiatement l'unicité de l'objet nul, sous réserve d'existence ; il s'agit là encore d'une unicité *à unique isomorphisme près*. Il est fréquent de noter $\mathbf{0}_{\mathbf{C}}$ un objet nul de la catégorie $\mathbf{C}$, pour souligner cette unicité.

Supposons qu'il existe dans $\mathbf{C}$ un objet nul $\mathbf{0}_{\mathbf{C}}$. Soient X et Y deux objets quelconques dans $\mathbf{C}$. Comme $\mathbf{0}_{\mathbf{C}}$ est final, il existe une unique flèche $X \xrightarrow{u} \mathbf{0}_{\mathbf{C}}$; comme $\mathbf{0}_{\mathbf{C}}$ est initial, il existe aussi une unique flèche $\mathbf{0}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{v} Y$. Par composition, on obtient une flèche $X \xrightarrow{v \circ u} Y$, qui sera notée $0_{X \to Y}$ et appelée la flèche nulle de X vers Y.

En particulier, si $\mathbf{C}$ est une catégorie admettant un objet nul, alors l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$ n'est jamais vide.

A titre d'exercice, le lecteur pourra vérifier :

a) que la flèche $0_{X \to Y}$ ainsi construite ne dépend pas du choix de l'objet nul $\mathbf{0}_{\mathbf{C}}$ (il faudra utiliser l'unicité de l'objet nul à unique isomorphisme près) ;

b) que la composée d'une flèche nulle et d'une flèche quelconque, dans n'importe quel ordre, est toujours une flèche nulle [7].

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, les catégories **Gr**, $\mathbf{Ann_1}$, $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$ et $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ contiennent des objets nuls, contrairement aux catégories **Ens** ou **Top**.

En attendant les matrices

J'espère, cher lecteur, que l'élégance et la simplicité du langage des catégories ont commencé à te séduire. Pour être vraiment conquis, sans doute te manque-t-il une application vraiment utile de ces idées. Patience, ceci viendra dans un prochain article qui traitera presque autant d'algèbre linéaire que de catégories.

Afin de meubler l'attente, tu pourrais d'explorer l'ouvrage classique [Mc71], qui est très lisible et rempli des jolis diagrammes dont les catégoriciens raffolent. Sur un ton plus philosophique, le papier [Mz07], disponible sur Internet, te permettra de réfléchir à la notion d'*égalité* en mathématiques. Bonne lecture !

Références

[EM45] S. Eilenberg, S. MacLane, *General theory of natural equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc., 1945.

[Hi71] P. Higgins, *Notes on categories and groupoids*, Van Nostrand Rienhold, 1971.

[KS06] M. Kashiwara, P. Schapira, *Categories and sheaves*, Springer-Verlag, 2006.

[Mc71] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

[Me09] P.-A. Melliès, *Categorical semantics of linear logic*, Soc. Math. France, 2009.

[Mz07] B. Mazur, *When is one thing equal to some other thing ?*, 2007.

7. Ainsi, l'ensemble des flèches nulles forme un *idéal* dans la catégorie $\mathbf{C}$. Une notion que l'on peut pousser jusqu'à définir la *catégorie-quotient* d'une catégorie par un idéal, sur le modèle des anneaux-quotients. Bien entendu, le quotient de la catégorie $\mathbf{C}$ par son idéal nul serait une catégorie équivalente à $\mathbf{C}$ (la notion d'équivalence de catégorie sera défini dans l'article à venir).