

# Le Langage des catégories

Une nouvelle façon de penser les objets mathématiques

Erwan BILAND

Stanislas

Mercredi 23 juin 2010

Plan classique d'un début de chapitre :

- ensembles - applications
- groupes - morphismes de groupes
- anneaux - morphismes d'anneaux
- corps - morphismes de corps
- $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels - applications  $\mathbb{K}$ -linéaires
- ensembles ordonnés - applications croissantes
- espaces topologiques *parties de  $\mathbb{R}$*  - fonctions continues
- espaces vectoriels euclidiens - morphismes orthogonaux

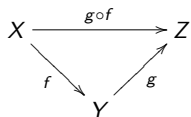
Dans chaque cas, on a introduit une *catégorie* :

- objets - flèches

# Qu'est-ce qu'une catégorie ?

Définir une catégorie  $\mathcal{C}$ , c'est donner :

- des objets  $X, Y, Z \dots$
- pour deux objets  $X$  et  $Y$ , un ensemble  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  :  
un morphisme ou une flèche de  $X$  vers  $Y$  se note  $f : X \rightarrow Y$ .
- pour deux flèches  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$ , une flèche *composée* :

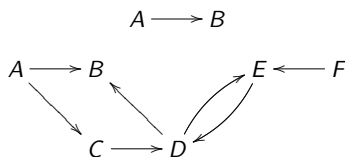


de sorte que :

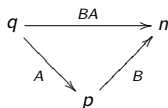
- la composition est associative :  
pour  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  et  $h : Z \rightarrow T$ ,  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .
- pour tout objet  $X$ , il existe  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  neutre pour la composition :  
pour tout  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f \circ \text{id}_X = f$  ;  
pour tout  $g : Y \rightarrow X$ ,  $\text{id}_X \circ g = g$ .

# Catégories classiques

- $\mathcal{E}ns$ ,  $\mathcal{G}r$ ,  $\mathcal{A}nn$ ,  $\mathbb{R}\text{-}\mathcal{E}v$ ,  $\mathcal{O}rd$ ,  $\mathcal{T}op$ ,  $\mathcal{E}ucl\dots$
- $\mathbb{R}\text{-}\mathcal{E}v_{df}$  :  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie
- $\mathcal{T}op_{\mathbb{R}}$  : parties de  $\mathbb{R}$ , applications continues
- la catégorie associée à un graphe orienté :
  - objets : les points du graphe
  - flèches : les chemins sur le graphe
  - composition : la concaténation des chemins



- si  $(I, \leq)$  est un ensemble ordonné, la catégorie  $\mathcal{I}$ 
  - objets : les éléments de  $I$
  - flèches : une flèche  $f_{i,j} : i \rightarrow j$  si  $i \leq j$ ; aucune si  $i \not\leq j$
  - composition :  $f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$  si  $i \leq j \leq k$
- la catégorie  $\text{Mat}_{\mathbb{R}}$ 
  - objets : les entiers naturels ;
  - flèches :  $\text{hom}(p, n)$  est l'ensemble des matrices réelles de taille  $n \times p$
  - composition : le produit matriciel



Idee : donner une définition *purement catégorique* des propriétés habituelles de certains morphismes : bijectivité, injectivité, surjectivité, nullité...

*Rappel.*  $X$  et  $Y$  deux ensembles,  $f : X \rightarrow Y$  une application.

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow \exists g : Y \rightarrow X, \begin{cases} g \circ f = \text{id}_X \\ f \circ g = \text{id}_Y \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & g & \\ & \xleftarrow{\quad} & \end{array}$$

*Définition.*  $X$  et  $Y$  deux objets de  $\mathcal{C}$ ,  $f : X \rightarrow Y$  une flèche.

$$f \text{ isomorphisme} \Leftrightarrow \exists g : Y \rightarrow X, \begin{cases} g \circ f = \text{id}_X \\ f \circ g = \text{id}_Y \end{cases}$$

- dans  $\mathcal{E}ns$  : bijection
- dans  $\mathcal{G}r$ ,  $\mathcal{A}nn$ ,  $\mathbb{R}\text{-}\mathcal{E}v$  : morphisme bijectif
- dans  $\mathcal{M}at_{\mathbb{R}}$  : matrice inversible

# Isomorphismes (piège)

**Définition.**  $X$  et  $Y$  deux objets de  $\mathcal{Top}$ ,  $f : X \rightarrow Y$  une fonction continue.

$$\begin{aligned} f \text{ isomorphisme dans } \mathcal{Top} &\Leftrightarrow \exists g \in \mathcal{C}(Y, X), \begin{cases} g \circ f = \text{id}_X \\ f \circ g = \text{id}_Y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow f \text{ est un homéomorphisme.} \end{aligned}$$

**Attention.** Il existe des applications continues bijectives qui ne sont pas des homéomorphismes.

$$f : \begin{array}{l} [0, 1[ \cup \{2\} \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases} \end{array}$$

**Définition.**  $X$  et  $Y$  deux objets de  $\mathcal{C}$ ,  $f : X \rightarrow Y$  une flèche.

$f$  est un monomorphisme s'il est simplifiable à droite :

$$\forall W \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} X \xrightarrow{f} Y, [f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h].$$

**Définition.**  $X$  et  $Y$  deux objets de  $\mathcal{C}$ ,  $f : X \rightarrow Y$  une flèche.

$f$  est un épimorphisme s'il est simplifiable à gauche :

$$\forall X \xrightarrow{f} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} Z, [g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h].$$

Remarque : ces deux notions sont *duales* l'une de l'autre, en renversant le sens des flèches.

**Attention.** Dans  $\mathcal{T}op$ ,  $f : X \rightarrow Y$  peut être un épimorphisme sans être surjective ; il faut et il suffit que son image soit dense.

Ainsi,  $f$  peut être un "mono" et un "épi" sans être un "iso".



**Définition.**  $I$  un objet de  $\mathcal{C}$ .  $I$  est un objet initial si, pour tout objet  $X$ , il existe une et une seule flèche  $i_X : I \rightarrow X$ .

- dans  $\mathcal{E}ns$  : l'ensemble vide  $\emptyset$
- dans  $\mathbb{R}\text{-}\mathcal{E}v$  : l'espace nul  $\{0\}$

**Définition.**  $F$  un objet de  $\mathcal{C}$ .  $F$  est un objet final si, pour tout objet  $X$ , il existe une et une seule flèche  $f_X : X \rightarrow F$ .

- dans  $\mathcal{E}ns$  : tout ensemble à un élément  $\{a\}$
- dans  $\mathbb{R}\text{-}\mathcal{E}v$  : l'espace nul  $\{0\}$

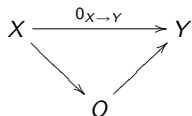
**Théorème.** L'objet initial, ou l'objet final, s'il existe, est unique à *unique isomorphisme près*.

# Objet nul, morphisme nul

*Définition.*  $O$  un objet de  $\mathcal{C}$ .  $O$  est un objet nul s'il est à la fois initial et final.

- dans  $\mathcal{E}ns$  : il n'y en a pas
- dans  $\mathbb{R}\text{-}\mathcal{E}v$  : l'espace nul  $\{0\}$

*Définition.*  $X$  et  $Y$  deux objets de  $\mathcal{C}$ . S'il existe un objet nul  $O$  dans  $\mathcal{C}$ , la flèche nulle est celle qui se *factorise* par l'objet nul :



Exercice. L'objet  $O$  n'est défini qu'à isomorphisme près. Vérifier que la définition des flèches nulles ne change pas si on remplace  $O$  par un autre objet nul.

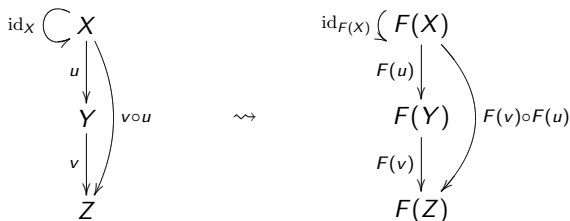
# Qu'est-ce qu'un foncteur ?

Définir un *foncteur*  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , c'est donner :

- pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{A}$ , un objet  $F(X)$  de  $\mathcal{B}$
- pour toute flèche  $u : X \rightarrow Y$ , une flèche  $F(u) : F(X) \rightarrow F(Y)$

de sorte que :

- pour toutes flèches  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ ,  $F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$
- pour tout objet  $X$ ,  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$



# Exemples de foncteurs

- Le foncteur “groupe multiplicatif”  $\text{Mult} : \text{Ann} \rightarrow \text{Gr}$

$$\begin{array}{ccc} A & & A^\times \\ f \downarrow & \rightsquigarrow & f^\times \downarrow \\ B & & B^\times \end{array} \quad \text{avec } f^\times : \begin{array}{l} A^\times \rightarrow B^\times \\ a \mapsto f(a) \end{array}$$

- Le foncteur “image directe”  $\text{Dir} : \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$

$$\begin{array}{ccc} X & & \mathcal{P}(X) \\ f \downarrow & \rightsquigarrow & f_* \downarrow \\ Y & & \mathcal{P}(Y) \end{array} \quad \text{avec } f_* : \begin{array}{l} \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y) \\ A \mapsto f(A) \end{array}$$

- Le foncteur “application linéaire canonique”  $\text{Can} : \text{Mat}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}\text{-}\mathcal{E}V_{df}$

$$\begin{array}{ccc} p & & \mathbb{R}^p \\ A \downarrow & \rightsquigarrow & u_A \downarrow \\ n & & \mathbb{R}^n \end{array} \quad \text{avec } u_A : \begin{array}{l} \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \\ X \mapsto AX \end{array}$$

# Y a-t-il des foncteurs bijectifs ?

Deux façons d'imaginer la bijectivité pour un foncteur  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ .

## Définition 1.

- $F$  est pleinement fidèle si, pour tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{A}$ ,  $F$  établit une bijection entre  $\text{hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  et  $\text{hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y))$ .
- $F$  est essentiellement surjectif si, pour tout objet  $X'$  de  $\mathcal{B}$ , il existe un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $X' \simeq F(X)$ .

## Définition 2.

- $F$  est une équivalence de catégories s'il existe un foncteur  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  tel que, pour toutes flèches  $u : X \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{A}$  et  $u' : X' \rightarrow Y'$  dans  $\mathcal{B}$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_X} & G(F(X)) \\ u \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow G(F(u)) \\ Y & \xrightarrow{\varphi_Y} & G(F(Y)) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\psi_{X'}} & F(G(X')) \\ u' \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow F(G(u')) \\ Y' & \xrightarrow{\psi_{Y'}} & F(G(Y')) \end{array}$$

*Théorème.* Un foncteur  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est une équivalence de catégorie si, et seulement si, il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Si deux catégories  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont équivalentes, toute propriété de la catégorie  $\mathcal{A}$  est vraie dans  $\mathcal{B}$ , et réciproquement.

*Théorème.* Le foncteur  $\text{Can} : n \mapsto \mathbb{R}^n$  est une équivalence entre les catégories  $\text{Mat}_{\mathbb{R}}$  et  $\mathcal{E}V_{df}$ .

Pour définir un “foncteur réciproque”, il faut choisir simultanément des bases pour tous les espaces vectoriels réels de dimension finie : importance de l’axiome du choix.

# La catégorie des modules sur une $\mathbb{K}$ -algèbre

Une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $A$  est un anneau muni d'une structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel telle que la multiplication soit bilinéaire.

Un  $A$ -module  $M$  est un groupe abélien muni d'une loi externe à coefficients dans  $A$ , avec des axiomes de compatibilité (semblables à ceux des espaces vectoriels).

La catégorie  $A\text{-Mod}$  :

- objets : les  $A$ -modules
- flèches : les applications “ $A$ -linéaires”
- composition : la composition des applications

C'est une catégorie qui a des propriétés similaires à celles de  $\mathbb{R}\text{-}\mathcal{E}v$  (catégorie abélienne).

Mais elle est généralement beaucoup plus difficile à décrire.

# Théorème de Morita

$A$  et  $B$  deux  $\mathbb{K}$ -algèbres.

**Définition** On dit que les algèbres  $A$  et  $B$  sont Morita - équivalentes si les catégories additives  $A\text{-Mod}$  et  $B\text{-Mod}$  sont équivalentes.

**Théorème.** Les algèbres  $A$  et  $B$  sont Morita - équivalentes si, et seulement si, il existe un  $A$ -module  $P$ , projectif et générateur de type fini, tel que

$$B \simeq \text{end}_{A\text{-Mod}}(P).$$

De plus, si  $F : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$  est une équivalence de catégories additives, il existe un  $A, B$ -bimodule  $P$ , projectif de type fini sur  $A$  et sur  $B$ , tel que pour tout  $A$ -module  $M$  :

$$F(M) \simeq \text{hom}_{A\text{-Mod}}(P, M).$$

**Théorème.** Si les algèbres  $A$  et  $B$  sont Morita - équivalentes, alors leurs centres  $Z(A)$  et  $Z(B)$  sont isomorphes (mais  $A$  et  $B$  ne sont pas nécessairement isomorphes).



La théorie des catégories s'est développée avec la topologie algébrique puis la géométrie algébrique.

- Algèbre homologique
- Groupe de Grothendieck d'une catégorie
- Catégories dérivées, foncteurs dérivés
- Foncteurs représentables, schémas
- Faisceaux sur les variétés différentielles, riemannienne, les schémas
- ...

- S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 2nd edition, Springer, 1997.
- M. Kashiwara, P. Schapira, *Categories and Sheaves*, Springer, 2006.
- M. Broué, Cours de Master 2, non publié.