Le Langage des catégories

Une nouvelle façon de penser les objets mathématiques

Erwan Biland

Stanislas

Mercredi 23 juin 2010

Introduction

Plan classique d'un début de chapitre :

- ensembles - applications
- groupes - morphismes de groupes
- anneaux - morphismes d'anneaux
- corps - morphismes de corps
- $\mathbb{K}$-espaces vectoriels - applications $\mathbb{K}$-linéaires
- ensembles ordonnés - applications croissantes
- espaces topologiques *parties de* $\mathbb{R}$ - fonctions continues
- espaces vectoriels euclidiens - morphismes orthogonaux

Dans chaque cas, on a introduit une *catégorie* :

- objets - flèches

Qu'est-ce qu'une catégorie ?

Définir une catégorie $\mathcal{C}$, c'est donner :

- des objets X, Y, Z...
- pour deux objets X et Y, un ensemble $\hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$:
  un morphisme ou une flèche de X vers Y se note $f : X \to Y$.
- pour deux flèches $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, une flèche *composée* :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

de sorte que :

- la composition est associative :
  pour $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to T$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- pour tout objet X, il existe $\mathrm{id}_X : X \to X$ neutre pour la composition :
  pour tout $f : X \to Y$, $\quad f \circ \mathrm{id}_X = f$;
  pour tout $g : Y \to X$, $\quad \mathrm{id}_X \circ g = g$.

Catégories classiques

- $\mathcal{E}ns$, $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}nn$, $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v$, $\mathcal{O}rd$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{E}ucl$...
- $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v_{df}$: $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie
- $\mathcal{T}op_{\mathbb{R}}$: parties de $\mathbb{R}$, applications continues
- la catégorie associée à un graphe orienté :
  - objets : les points du graphe
  - flèches : les chemins sur le graphe
  - composition : la concaténation des chemins

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr] & B & & E \arrow[dl, bend left] & F \arrow[l] \\
& C \arrow[r] & D \arrow[ul] \arrow[ur, bend left] & &
\end{tikzcd}$$

Catégories classiques

- si $(I, \leqslant)$ est un ensemble ordonnée, la catégorie $\mathcal{I}$
  - objets : les éléments de I
  - flèches : une flèche $f_{i,j} : i \to j$ si $i \leqslant j$; aucune si $i \nleqslant j$
  - composition : $f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$ si $i \leqslant j \leqslant k$

- la catégorie $\mathcal{M}at_{\mathbb{R}}$
  - objets : les entiers naturels ;
  - flèches : $\hom(p, n)$ est l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times p$
  - composition : le produit matriciel

$$\begin{tikzcd} q \arrow[rr, "BA"] \arrow[dr, swap, "A"] & & n \\ & p \arrow[ur, swap, "B"] & \end{tikzcd}$$

Isomorphismes

Idée : donner une définition *purement catégorique* des propriétés habituelles de certains morphismes : bijectivité, injectivité, surjectivité, nullité...

Rappel. X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ une application.

$$f \text{ bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g : Y \to X, \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Définition. X et Y deux objets de $\mathcal{C}$, $f : X \to Y$ une flèche.

$$f \text{ isomorphisme} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g : Y \to X, \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$

- dans $\mathcal{E}ns$: bijection
- dans $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}nn$, $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v$: morphisme bijectif
- dans $\mathcal{M}at_{\mathbb{R}}$: matrice inversible

Isomorphismes (piège)

Définition. X et Y deux objets de $\mathcal{T}op$, $f : X \to Y$ une fonction continue.

$$f \text{ isomorphisme dans } \mathcal{T}op \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g \in \mathcal{C}(Y,X),\ \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad f \text{ est un homéomorphisme.}$$

Attention. Il existe des applications continues bijectives qui ne sont pas des homéomorphismes.

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1[\cup\{2\} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \left| \begin{array}{ll} x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Monomorphismes, épimorphismes

Définition. X et Y deux objets de $\mathcal{C}$, $f : X \to Y$ une flèche.

f est un monomorphisme s'il est simplifiable *à droite* :

$$\forall\, W \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y\,,\ \left[f \circ g = f \circ h \ \Rightarrow\ g = h\right].$$

Définition. X et Y deux objets de $\mathcal{C}$, $f : X \to Y$ une flèche.

f est un épimorphisme s'il est simplifiable *à gauche* :

$$\forall\, X \xrightarrow{f} Y \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Z\,,\ \left[g \circ f = h \circ f \ \Rightarrow\ g = h\right].$$

Remarque : ces deux notions sont *duales* l'une de l'autre, en renversant le sens des flèches.

Attention. Dans $\mathcal{T}op$, $f : X \to Y$ peut être un épimorphisme sans être surjective ; il faut et il suffit que son image soit dense.
Ainsi, f peut être un "mono" et un "épi" sans être un "iso".

Objet initial, objet final

Définition. I un objet de $\mathcal{C}$. I est un objet initial si, pour tout objet X, il existe une et une seule flèche $i_X : I \to X$.

- dans $\mathcal{E}ns$: l'ensemble vide $\varnothing$
- dans $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v$: l'espace nul $\{0\}$

Définition. F un objet de $\mathcal{C}$. I est un objet final si, pour tout objet X, il existe une et une seule flèche $f_X : X \to F$.

- dans $\mathcal{E}ns$: tout ensemble à un élément $\{a\}$
- dans $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v$: l'espace nul $\{0\}$

Théorème. L'objet initial, ou l'objet final, s'il existe, est unique *à unique isomorphisme près*.

Objet nul, morphisme nul

Définition. O un objet de $\mathcal{C}$. O est un objet nul s'il est à la fois initial et final.

- dans $\mathcal{E}ns$: il n'y en a pas
- dans $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v$: l'espace nul $\{0\}$

Définition. X et Y deux objets de $\mathcal{C}$. S'il existe un objet nul O dans $\mathcal{C}$, la flèche nulle est celle qui se *factorise* par l'objet nul :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "0_{X \to Y}"] \arrow[dr] & & Y \\
& O \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Exercice. L'objet O n'est défini qu'à isomorphisme près. Vérifier que la définition des flèches nulles ne change pas si on remplace O par un autre objet nul.

Qu'est-ce qu'un foncteur ?

Définir un *foncteur* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, c'est donner :

- pour tout objet X de $\mathcal{A}$, un objet $F(X)$ de $\mathcal{B}$
- pour toute flèche $u : X \to Y$, une flèche $F(u) : F(X) \to F(Y)$

de sorte que :

- pour toutes flèches $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$, $F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$
- pour tout objet X, $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[loop left, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dd, bend left, "v \circ u"] & & F(X) \arrow[loop left, "\mathrm{id}_{F(X)}"] \arrow[d, "F(u)"'] \arrow[dd, bend left, "F(v) \circ F(u)"] \\
Y \arrow[d, "v"'] & \rightsquigarrow & F(Y) \arrow[d, "F(v)"'] \\
Z & & F(Z)
\end{tikzcd}
$$

Exemples de foncteurs

- Le foncteur "groupe multiplicatif" $\mathrm{Mult} : \mathcal{A}nn \to \mathcal{G}r$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} A^\times \arrow[d, "f^\times"'] \\ B^\times \end{tikzcd} \qquad \text{avec } f^\times : \begin{array}{rcl} A^\times & \to & B^\times \\ a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

- Le foncteur "image directe" $\mathrm{Dir} : \mathcal{E}ns \to \mathcal{E}ns$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ Y \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \mathcal{P}(X) \arrow[d, "f_*"'] \\ \mathcal{P}(Y) \end{tikzcd} \qquad \text{avec } f_* : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(Y) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array}$$

- Le foncteur "application linéaire canonique" $\mathrm{Can} : \mathcal{M}at_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}\text{-}\mathcal{E}v_{df}$

$$\begin{tikzcd} p \arrow[d, "A"'] \\ n \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^p \arrow[d, "u_A"'] \\ \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \qquad \text{avec } u_A : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

Y a-t-il des foncteurs bijectifs ?

Deux façons d'imaginer la bijectivité pour un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Définition 1.

- F est pleinement fidèle si, pour tous objets X et Y de $\mathcal{A}$, F établit une bijection entre $\hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$ et $\hom_{\mathcal{B}}\big(F(X), F(Y)\big)$.
- F est essentiellement surjectif si, pour tout objet X' de $\mathcal{B}$, il existe un objet X de $\mathcal{A}$ tel que $X' \simeq F(X)$.

Définition 2.

- F est une équivalence de catégories s'il existe un foncteur $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tel que, pour toutes flèches $u : X \to Y$ dans $\mathcal{A}$ et $u' : X' \to Y'$ dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_X", "\sim"'] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G(F(X)) \arrow[d, "G(F(u))"] \\ Y \arrow[r, "\sim", "\varphi_Y"'] & G(F(Y)) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\psi_{X'}", "\sim"'] \arrow[d, "u'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F(G(X')) \arrow[d, "F(G(u'))"] \\ Y' \arrow[r, "\sim", "\psi_{Y'}"'] & F(G(Y')) \end{tikzcd}$$

Equivalences de catégories

Théorème. Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une équivalence de catégorie si, et seulement si, il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Si deux catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalentes, toute propriété de la catégorie $\mathcal{A}$ est vraie dans $\mathcal{B}$, et réciproquement.

Théorème. Le foncteur $\mathrm{Can} : n \mapsto \mathbb{R}^n$ est une équivalence entre les catégories $\mathcal{M}at_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{E}v_{df}$.

Pour définir un “foncteur réciproque”, il faut choisir simultanément des bases pour tous les espaces vectoriels réels de dimension finie : importance de l'axiome du choix.

La catégorie des modules sur une $\mathbb{K}$-algèbre

Une $\mathbb{K}$-algèbre A est un anneau muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel telle que la multiplication soit bilinéaire.

Un A-module M est un groupe abélien muni d'une loi externe à coefficients dans A, avec des axiomes de compatibilité (semblables à ceux des espaces vectoriels).

La catégorie A-$\mathcal{M}od$:

- objets : les A-modules
- flèches : les applications "A-linéaires"
- composition : la composition des applications

C'est une catégorie qui a des propriétés similaires à celles de $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v$ (catégorie abélienne).
Mais elle est généralement beaucoup plus difficile à décrire.

Théorème de Morita

A et B deux $\mathbb{K}$-algèbres.

Définition On dit que les algèbres A et B sont Morita - équivalentes si les catégories additives A-$\mathcal{M}od$ et B-$\mathcal{M}od$ sont équivalentes.

Théorème. Les algèbres A et B sont Morita - équivalentes si, et seulement si, il existe un A-module P, projectif et générateur de type fini, tel que

$$B \simeq \mathrm{end}_{A\text{-}\mathcal{M}od}(P).$$

De plus, si $F : A\text{-}\mathcal{M}od \to B\text{-}\mathcal{M}od$ est une équivalence de catégories additives, il existe un A,B-bimodule P, projectif de type fini sur A et sur B, tel que pour tout A-module M :

$$F(M) \simeq \mathrm{hom}_{A\text{-}\mathcal{M}od}(P, M).$$

Théorème. Si les algèbres A et B sont Morita - équivalentes, alors leurs centres $Z(A)$ et $Z(B)$ sont isomorphes (mais A et B ne sont pas nécessairement isomorphes).

Pour aller plus loin

La théorie des catégories s'est développée avec la topologie algébrique puis la géométrie algébrique.

- Algèbre homologique
- Groupe de Grothendieck d'une catégorie
- Catégories dérivées, foncteurs dérivés
- Foncteurs représentables, schémas
- Faisceaux sur les variétés différentielles, riemannienne, les schémas
- ...

Bibliographie

- S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 2nd edition, Springer, 1997.
- M. Kashiwara, P. Schapira, Categories and Sheaves, Springer, 2006.
- M. Broué, Cours de Master 2, non publié.