Théorie des groupes et catégories de modules

Du langage des catégories à leur utilisation actuelle

Erwan Biland

Université Paris 7 - Université Laval

CCÉM - CUMC
Jeudi 16 juin 2011

Plan

- Qu'est-ce qu'une catégorie ?
- Quelles propriétés peuvent s'exprimer dans le langage des catégories ?
- Quand peut-on dire que deux catégories sont équivalentes ?
- Peut-on décrire un anneau à l'aide, uniquement, de sa catégorie de modules ?
- Quelles sont les applications actuelles de ces méthodes en théorie des groupes ?

Introduction

Schéma classique d'un début de cours :

- ensembles - applications
- groupes - morphismes de groupes
- anneaux - morphismes d'anneaux
- corps - morphismes de corps
- $\mathbb{K}$-espaces vectoriels - applications $\mathbb{K}$-linéaires
- ensembles ordonnés - applications croissantes
- espaces topologiques - fonctions continues
- espaces vectoriels euclidiens - morphismes orthogonaux

Introduction

Schéma classique d'un début de cours :

- ensembles - applications
- groupes - morphismes de groupes
- anneaux - morphismes d'anneaux
- corps - morphismes de corps
- $\mathbb{K}$-espaces vectoriels - applications $\mathbb{K}$-linéaires
- ensembles ordonnés - applications croissantes
- *parties de* $\mathbb{R}$ - fonctions continues
- espaces vectoriels euclidiens - morphismes orthogonaux

Introduction

Schéma classique d'un début de cours :

- ensembles - applications
- groupes - morphismes de groupes
- anneaux - morphismes d'anneaux
- corps - morphismes de corps
- $\mathbb{K}$-espaces vectoriels - applications $\mathbb{K}$-linéaires
- ensembles ordonnés - applications croissantes
- *parties de* $\mathbb{R}$ - fonctions continues
- espaces vectoriels euclidiens - morphismes orthogonaux

Dans chaque cas, on a introduit une *catégorie* :

- objets - flèches

Qu'est-ce qu'une catégorie ?

Définir une catégorie $\mathcal{C}$, c'est donner :

- des objets X, Y, Z...
- pour deux objets X et Y, un ensemble $\hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de *flèches*, ou morphismes, de X vers Y.

Qu'est-ce qu'une catégorie ?

Définir une catégorie $\mathcal{C}$, c'est donner :

- des objets X, Y, Z...
- pour deux objets X et Y, un ensemble $\hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de *flèches*, ou morphismes, de X vers Y.
- des règles de *composition* des flèches :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Qu'est-ce qu'une catégorie ?

Définir une catégorie $\mathcal{C}$, c'est donner :

- des objets X, Y, Z...
- pour deux objets X et Y, un ensemble $\hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de *flèches*, ou morphismes, de X vers Y.
- des règles de *composition* des flèches :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

de sorte que :

- la composition est associative :
  pour $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to T$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- pour tout objet X, il existe $\mathrm{id}_X : X \to X$ neutre pour la composition :
  pour tout $f : X \to Y$, $\quad f \circ \mathrm{id}_X = f$;

Qu'est-ce qu'une catégorie ?

Définir une catégorie $\mathcal{C}$, c'est donner :

- des objets X, Y, Z...
- pour deux objets X et Y, un ensemble $\hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de *flèches*, ou morphismes, de X vers Y.
- des règles de *composition* des flèches :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

de sorte que :

- la composition est associative :
  pour $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to T$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- pour tout objet X, il existe $\mathrm{id}_X : X \to X$ neutre pour la composition :
  pour tout $g : Y \to X$, $\quad \mathrm{id}_X \circ g = g$.

Catégories classiques

- $\mathcal{E}ns$, $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}nn$, $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v$, $\mathcal{O}rd$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{E}ucl$...

Catégories classiques

- $\mathcal{E}ns$, $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}nn$, $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v$, $\mathcal{O}rd$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{E}ucl$...
- $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v_{df}$: $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie
- $\mathcal{T}op_{\mathbb{R}}$: parties de $\mathbb{R}$, applications continues

Catégories classiques

- $\mathcal{E}ns$, $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}nn$, $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v$, $\mathcal{O}rd$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{E}ucl$...
- $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v_{df}$: $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie
- $\mathcal{T}op_{\mathbb{R}}$: parties de $\mathbb{R}$, applications continues

- une catégorie toute petite :
  - deux objets X et Y
  - trois flèches id_X, id_Y et $f : X \to Y$
  - composition : la seule possible

Catégories classiques

- $\mathcal{E}ns$, $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}nn$, $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v$, $\mathcal{O}rd$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{E}ucl$...
- $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v_{df}$: $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie
- $\mathcal{T}op_{\mathbb{R}}$: parties de $\mathbb{R}$, applications continues

- une catégorie toute petite :
  - deux objets X et Y
  - trois flèches id_X, id_Y et $f : X \to Y$
  - composition : la seule possible

- $\mathbb{R}$-$\mathcal{M}at$:
  - objets : les entiers $n \geqslant 0$
  - flèches de p dans n : matrices $n \times p$
  - composition : le produit des matrices

Question

Principe fondamental : le langage des catégorie ne porte que sur les morphismes, en aucun cas sur les éléments.

Il s'agit de décrire un objet *uniquement* par les morphismes qui y arrivent ou en partent.

Question

Principe fondamental : le langage des catégorie ne porte que sur les morphismes, en aucun cas sur les éléments.

Il s'agit de décrire un objet *uniquement* par les morphismes qui y arrivent ou en partent.

$\hookrightarrow$ Qu'est-ce qui peut être dit dans ce langage ?

Question

Principe fondamental : le langage des catégorie ne porte que sur les morphismes, en aucun cas sur les éléments.

Il s'agit de décrire un objet *uniquement* par les morphismes qui y arrivent ou en partent.

$\hookrightarrow$ Qu'est-ce qui peut être dit dans ce langage ?

$\hookrightarrow$ Qu'est-ce qui ne peut pas être dit ?

Isomorphismes

Idée : donner une définition *purement catégorique* des propriétés habituelles de certains morphismes : bijectivité, injectivité, surjectivité, nullité...

Isomorphismes

Idée : donner une définition *purement catégorique* des propriétés habituelles de certains morphismes : bijectivité, injectivité, surjectivité, nullité...

Rappel. X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ une application.

$$f \text{ bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g : Y \to X, \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Isomorphismes

Idée : donner une définition *purement catégorique* des propriétés habituelles de certains morphismes : bijectivité, injectivité, surjectivité, nullité...

Rappel. X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ une application.

$$f \text{ bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g : Y \to X, \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Définition. X et Y deux objets de $\mathcal{C}$, $f : X \to Y$ une flèche.

$$f \text{ } \textit{isomorphisme} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g : Y \to X, \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$

Isomorphismes

Idée : donner une définition *purement catégorique* des propriétés habituelles de certains morphismes : bijectivité, injectivité, surjectivité, nullité...

Rappel. X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ une application.

$$f \text{ bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g : Y \to X,\ \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Définition. X et Y deux objets de $\mathcal{C}$, $f : X \to Y$ une flèche.

$$f \textit{ isomorphisme} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g : Y \to X,\ \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$

- dans $\mathcal{E}ns$:

Isomorphismes

Idée : donner une définition *purement catégorique* des propriétés habituelles de certains morphismes : bijectivité, injectivité, surjectivité, nullité...

Rappel. X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ une application.

$$f \text{ bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g : Y \to X, \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Définition. X et Y deux objets de $\mathcal{C}$, $f : X \to Y$ une flèche.

$$f \text{ \textit{isomorphisme}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g : Y \to X, \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$

- dans $\mathcal{E}ns$: bijection
- dans $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}nn$, $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v$:

Isomorphismes

Idée : donner une définition *purement catégorique* des propriétés habituelles de certains morphismes : bijectivité, injectivité, surjectivité, nullité...

Rappel. X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ une application.

$$f \text{ bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g : Y \to X, \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Définition. X et Y deux objets de $\mathcal{C}$, $f : X \to Y$ une flèche.

$$f \text{ \textit{isomorphisme}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g : Y \to X, \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$

- dans $\mathcal{E}ns$: bijection
- dans $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}nn$, $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v$: morphisme bijectif
- dans $\mathbb{R}$-$\mathcal{M}at$:

Isomorphismes

Idée : donner une définition *purement catégorique* des propriétés habituelles de certains morphismes : bijectivité, injectivité, surjectivité, nullité...

Rappel. X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ une application.

$$f \text{ bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g : Y \to X, \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Définition. X et Y deux objets de $\mathcal{C}$, $f : X \to Y$ une flèche.

$$f \text{ \textit{isomorphisme}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g : Y \to X, \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$

- dans $\mathcal{E}ns$: bijection
- dans $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}nn$, $\mathbb{R}$-$\mathcal{E}v$: morphisme bijectif
- dans $\mathbb{R}$-$\mathcal{M}at$: matrice inversible

Isomorphismes (piège)

Définition. X et Y deux objets de $\mathcal{T}op$, $f : X \to Y$ une fonction continue.

$$f \text{ isomorphisme dans } \mathcal{T}op \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g \in \mathcal{C}(Y, X), \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases}$$

Isomorphismes (piège)

Définition. X et Y deux objets de $\mathcal{T}op$, $f : X \to Y$ une fonction continue.

$$
\begin{aligned}
f \text{ isomorphisme dans } \mathcal{T}op \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, g \in \mathcal{C}(Y, X), \; \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad f \text{ est un homéomorphisme.}
\end{aligned}
$$

Isomorphismes (piège)

Définition. X et Y deux objets de $\mathcal{T}op$, $f : X \to Y$ une fonction continue.

$$\begin{aligned} f \text{ isomorphisme dans } \mathcal{T}op \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, g \in \mathcal{C}(Y, X), \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_X \\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ est un homéomorphisme.} \end{aligned}$$

Attention. Il existe des applications continues bijectives qui ne sont pas des homéomorphismes.

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1[\cup\{2\} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \left| \begin{array}{l} x \;\text{ si } x < 1 \\ 1 \;\text{ si } x = 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Importance des isomorphismes

Définition. On dit que deux objets X et Y sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $f : X \to Y$.

Importance des isomorphismes

Définition. On dit que deux objets X et Y sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $f : X \to Y$.

Principe fondamental. Dans une catégorie, on ne cherche pas à savoir si deux objets sont *égaux*, mais s'ils sont *isomorphes*.

Ils ont alors exactement le même comportement dans la catégorie.

Quelques autres propriétés

- fonction injective $\rightsquigarrow$ monomorphisme
- fonction surjective $\rightsquigarrow$ épimorphisme
- ensemble vide $\rightsquigarrow$ objet initial
- singleton $\rightsquigarrow$ objet final
- fonction constante $\rightsquigarrow$ ...
- fonction nulle $\rightsquigarrow$ ...

Qu'est-ce qu'un foncteur ?

Définir un *foncteur* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, c'est donner :

- pour tout objet X de $\mathcal{A}$, un objet $F(X)$ de $\mathcal{B}$
- pour toute flèche $u : X \to Y$, une flèche $F(u) : F(X) \to F(Y)$

Qu'est-ce qu'un foncteur ?

Définir un *foncteur* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, c'est donner :

- pour tout objet X de $\mathcal{A}$, un objet $F(X)$ de $\mathcal{B}$
- pour toute flèche $u : X \to Y$, une flèche $F(u) : F(X) \to F(Y)$

de sorte que :

- pour toutes flèches $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$, $F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$
- pour tout objet X, $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$

Qu'est-ce qu'un foncteur ?

Définir un *foncteur* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, c'est donner :

- pour tout objet X de $\mathcal{A}$, un objet $F(X)$ de $\mathcal{B}$
- pour toute flèche $u : X \to Y$, une flèche $F(u) : F(X) \to F(Y)$

de sorte que :

- pour toutes flèches $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$, $F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$
- pour tout objet X, $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[loop left, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dd, bend left, "v \circ u"] \\
Y \arrow[d, "v"'] \\
Z
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[loop left, "\mathrm{id}_{F(X)}"] \arrow[d, "F(u)"'] \arrow[dd, bend left, "F(v) \circ F(u)"] \\
F(Y) \arrow[d, "F(v)"'] \\
F(Z)
\end{tikzcd}$$

Exemples de foncteurs

- Le foncteur "groupe multiplicatif" $\mathrm{Mult} : \mathcal{A}nn \to \mathcal{G}r$

$$\begin{array}{c} A \\ {\scriptstyle f}\downarrow \\ B \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} A^\times \\ {\scriptstyle f^\times}\downarrow \\ B^\times \end{array} \qquad \text{avec } f^\times : \begin{array}{ccc} A^\times & \longrightarrow & B^\times \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array}$$

Exemples de foncteurs

- Le foncteur "groupe multiplicatif" $\mathrm{Mult} : \mathcal{A}nn \to \mathcal{G}r$

$$\begin{array}{c} A \\ {\scriptstyle f}\Big\downarrow \\ B \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} A^\times \\ {\scriptstyle f^\times}\Big\downarrow \\ B^\times \end{array} \qquad \text{avec } f^\times : \begin{array}{ccc} A^\times & \to & B^\times \\ a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

- Le foncteur "application linéaire canonique" $\mathrm{Can} : \mathcal{M}at_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}\text{-}\mathcal{E}v_{df}$

$$\begin{array}{c} p \\ {\scriptstyle A}\Big\downarrow \\ n \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \mathbb{R}^p \\ {\scriptstyle u_A}\Big\downarrow \\ \mathbb{R}^n \end{array} \qquad \text{avec } u_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

Propriétés d'un foncteur

- Le foncteur $\mathrm{Can} : \mathcal{M}at_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}\text{-}\mathcal{E}v_{df}$:
  - est essentiellement surjectif
  - est conservatif
  - est même pleinement fidèle (donc, entre autres, conservatif)

Propriétés d'un foncteur

- Le foncteur $\mathrm{Can} : \mathcal{M}at_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}\text{-}\mathcal{E}v_{df}$:
  - est essentiellement surjectif
  - est conservatif
  - est même pleinement fidèle (donc, entre autres, conservatif)
- Le foncteur $\mathrm{Mult} : \mathcal{A}nn \to \mathcal{G}r$:
  - n'est pas conservatif
  - n'est donc pas pleinement fidèle
  - est/n'est pas essentiellement surjectif (? ? ?)

Y a-t-il des foncteurs bijectifs ?

Rappel. Dans une catégorie, on ne cherche pas à savoir si deux objets sont *égaux*, mais s'ils sont *isomorphes*.

Définition. $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une équivalence de catégories ssi :

Y a-t-il des foncteurs bijectifs ?

Rappel. Dans une catégorie, on ne cherche pas à savoir si deux objets sont *égaux*, mais s'ils sont *isomorphes*.

Définition. $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une équivalence de catégories ssi :

- F est essentiellement surjectif, *i.e.* pour tout objet X' de $\mathcal{B}$, il existe un objet X de $\mathcal{A}$ tel que $X' \simeq F(X)$.

Y a-t-il des foncteurs bijectifs ?

Rappel. Dans une catégorie, on ne cherche pas à savoir si deux objets sont *égaux*, mais s'ils sont *isomorphes*.

Définition. $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une équivalence de catégories ssi :

- F est essentiellement surjectif, *i.e.* pour tout objet X' de $\mathcal{B}$, il existe un objet X de $\mathcal{A}$ tel que $X' \simeq F(X)$.
- F est pleinement fidèle, *i.e.* pour tous objets X et Y de $\mathcal{A}$, F établit une bijection entre $\hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$ et $\hom_{\mathcal{B}}\big(F(X), F(Y)\big)$.

Y a-t-il des foncteurs bijectifs ?

Rappel. Dans une catégorie, on ne cherche pas à savoir si deux objets sont *égaux*, mais s'ils sont *isomorphes*.

Définition. $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une équivalence de catégories ssi :

- F est essentiellement surjectif, *i.e.* pour tout objet X' de $\mathcal{B}$, il existe un objet X de $\mathcal{A}$ tel que $X' \simeq F(X)$.
- F est pleinement fidèle, *i.e.* pour tous objets X et Y de $\mathcal{A}$, F établit une bijection entre $\hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$ et $\hom_{\mathcal{B}}\big(F(X), F(Y)\big)$.

Il existe alors un foncteur $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tel que $G \circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ et $F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$.

Qu'est-ce qu'un module ?

Idée : généraliser la notion d'espace vectoriel.

Qu'est-ce qu'un module ?

Idée : généraliser la notion d'espace vectoriel.

Définition.

- $(A, +, \times)$ un anneau quelconque (unitaire)
- $(M, +)$ un groupe abélien
- $(a, m) \mapsto a \bullet m$ une loi

M est un A-module si la loi "$\bullet$" possède de bonnes propriétés : associativité, distributivité...

Qu'est-ce qu'un module ?

Idée : généraliser la notion d'espace vectoriel.

Définition.

- $(A, +, \times)$ un anneau quelconque (unitaire)
- $(M, +)$ un groupe abélien
- $(a, m) \mapsto a \bullet m$ une loi

M est un A-module si la loi "$\bullet$" possède de bonnes propriétés : associativité, distributivité...

Exemple.

- Si $\mathbb{K}$ est un corps (anneau à division), un $\mathbb{K}$-module est simplement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Qu'est-ce qu'un module ?

Exemples.

- A-**module libre.** Si A est un anneau, A^n est un A-module pour la loi :

$$a \cdot (b_1, \ldots, b_n) = (ab_1, \ldots, ab_n).$$

Exemples.

- A**-module libre.** Si A est un anneau, A^n est un A-module pour la loi :

$$a \cdot (b_1, \ldots, b_n) = (ab_1, \ldots, ab_n).$$

- $\mathbb{Z}$**-module.** Tout groupe abélien M est un $\mathbb{Z}$-module pour la loi :

$$k \cdot m = m + \ldots + m \quad (k \text{ fois}).$$

Qu'est-ce qu'un module ?

Exemples.

- A-**module libre.** Si A est un anneau, A^n est un A-module pour la loi :

$$a \cdot (b_1, \ldots, b_n) = (ab_1, \ldots, ab_n).$$

- $\mathbb{Z}$-**module.** Tout groupe abélien M est un $\mathbb{Z}$-module pour la loi :

$$k \cdot m = m + \ldots + m \quad (k \text{ fois}).$$

- $\mathbb{C}[X]$-**module.** Si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, alors V est un $\mathbb{C}[X]$-module pour la loi :

$$P(X) \cdot v = \Big[P(f)\Big](v)$$

Question

Idée : ne pas considérer chaque A-module individuellement, mais étudier la catégorie des A-modules.

Question

Idée : ne pas considérer chaque A-module individuellement, mais étudier la catégorie des A-modules.

Notation. $A\text{-}\mathcal{M}od$ la catégorie

- objets : les A-modules
- flèches : les morphismes de A-modules
- composition : la composition usuelle des fonctions

Question

Idée : ne pas considérer chaque A-module individuellement, mais étudier la catégorie des A-modules.

Notation. $A\text{-}\mathcal{M}od$ la catégorie

- objets : les A-modules
- flèches : les morphismes de A-modules
- composition : la composition usuelle des fonctions

Quelles sont les propriétés de l'anneau A qui peuvent se lire dans la catégorie $A\text{-}\mathcal{M}od$?

Question

Idée : ne pas considérer chaque A-module individuellement, mais étudier la catégorie des A-modules.

Notation. $A\text{-}\mathcal{M}od$ la catégorie

- objets : les A-modules
- flèches : les morphismes de A-modules
- composition : la composition usuelle des fonctions

Quelles sont les propriétés de l'anneau A qui peuvent se lire dans la catégorie $A\text{-}\mathcal{M}od$?

Si les catégories $A\text{-}\mathcal{M}od$ et $B\text{-}\mathcal{M}od$ sont équivalentes, que peut-on en déduire sur les anneaux A et B ?

Théorème de Morita

Théorème. Les catégories additives A-$\mathcal{M}od$ et B-$\mathcal{M}od$ sont équivalentes si, et seulement si, il existe un A-module P, projectif et générateur de type fini, tel que

$$B \simeq \mathrm{End}_A(P).$$

On dit alors que les anneaux A et B sont Morita-équivalents.

Théorème de Morita

Théorème. Les catégories additives A-$\mathcal{M}od$ et B-$\mathcal{M}od$ sont équivalentes si, et seulement si, il existe un A-module P, projectif et générateur de type fini, tel que

$$B \simeq \mathrm{End}_A(P).$$

On dit alors que les anneaux A et B sont Morita-équivalents.

Exemple. Pour tout entier $n > 0$, l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ est Morita-équivalent à l'anneau $\mathbb{R}$.

Théorème de Morita

Théorème. Les catégories additives A-$\mathcal{M}od$ et B-$\mathcal{M}od$ sont équivalentes si, et seulement si, il existe un A-module P, projectif et générateur de type fini, tel que

$$B \simeq \mathrm{End}_A(P).$$

On dit alors que les anneaux A et B sont Morita-équivalents.

Exemple. Pour tout entier $n > 0$, l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ est Morita-équivalent à l'anneau $\mathbb{R}$.

Réciproquement, tout anneau Morita-équivalent à $\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour un entier $n > 0$.

Equivalence de Morita

Proposition. Si les catégories A-$\mathcal{M}od$ et B-$\mathcal{M}od$ sont équivalentes, alors les centres $Z(A)$ et $Z(B)$ des anneaux A et B sont isomorphes.

Proposition. Si les catégories A-$\mathcal{M}od$ et B-$\mathcal{M}od$ sont équivalentes, alors les centres $Z(A)$ et $Z(B)$ des anneaux A et B sont isomorphes.

Bien d'autres propriétés d'un anneau sont conservées par une équivalence de Morita :

- nombre de modules irréductibles (à isomorphisme près).
- nombre de modules indécomposables (à isomorphisme près).
- nombre de modules projectifs indécomposables (à isomorphisme près).
- ...

Equivalences entre algèbres de blocs

Le principal objet actuel de la théorie des groupes finis est la description des représentations modulaires d'un groupe G, c'est-à-dire de la catégorie $kG\text{-}\mathcal{M}od$, où k est un corps de caractéristique positive.

Equivalences entre algèbres de blocs

Le principal objet actuel de la théorie des groupes finis est la description des représentations modulaires d'un groupe G, c'est-à-dire de la catégorie $kG\text{-}\mathcal{M}od$, où k est un corps de caractéristique positive.

La théorie de Brauer permet de "briser" l'algèbre kG en *blocs* $B_1, \ldots, B_n$. L'étude de $kG\text{-}\mathcal{M}od$ se ramène alors à celle de $B_1\text{-}\mathcal{M}od, \ldots, kG\text{-}\mathcal{M}od$.

Equivalences entre algèbres de blocs

Le principal objet actuel de la théorie des groupes finis est la description des représentations modulaires d'un groupe G, c'est-à-dire de la catégorie $kG\text{-}\mathcal{M}od$, où k est un corps de caractéristique positive.

La théorie de Brauer permet de "briser" l'algèbre kG en *blocs* $B_1, \ldots, B_n$. L'étude de $kG\text{-}\mathcal{M}od$ se ramène alors à celle de $B_1\text{-}\mathcal{M}od, \ldots, kG\text{-}\mathcal{M}od$.

En général, la catégorie des B_i-modules est encore trop compliquée pour être décrite directement. On recherche donc à classifier les blocs à *équivalence* près.

Equivalences entre algèbres de blocs

Le principal objet actuel de la théorie des groupes finis est la description des représentations modulaires d'un groupe G, c'est-à-dire de la catégorie $kG\text{-}\mathcal{M}od$, où k est un corps de caractéristique positive.

La théorie de Brauer permet de "briser" l'algèbre kG en *blocs* $B_1, \ldots, B_n$. L'étude de $kG\text{-}\mathcal{M}od$ se ramène alors à celle de $B_1\text{-}\mathcal{M}od, \ldots, kG\text{-}\mathcal{M}od$.

En général, la catégorie des B_i-modules est encore trop compliquée pour être décrite directement. On recherche donc à classifier les blocs à *équivalence* près.

On a développé pour cela différents outils : équivalences de Morita, de Rickard, équivalence stable...

Un exemple de résultat

Soit G un groupe, p un nombre premier, et k un corps de caractéritique p.

On note $O_{p'}(G)$ un sous-groupe distingué de G, d'ordre premier à p.

On note $C_G(u)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec l'élément u.

Un exemple de résultat

Soit G un groupe, p un nombre premier, et k un corps de caractéritique p.

On note $O_{p'}(G)$ un sous-groupe distingué de G, d'ordre premier à p.

On note $C_G(u)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec l'élément u.

Théorème. S'il existe un élément $u \in G$, d'ordre p, tel que :

$$G = O_{p'}(G).C_G(u),$$

Un exemple de résultat

Soit G un groupe, p un nombre premier, et k un corps de caractéritique p.

On note $O_{p'}(G)$ un sous-groupe distingué de G, d'ordre premier à p.

On note $C_G(u)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec l'élément u.

Théorème. S'il existe un élément $u \in G$, d'ordre p, tel que :

$$G = O_{p'}(G).C_G(u),$$

alors il existe un "morceau" kGe de l'algèbre de groupe kG, et une équivalence de Morita :

$$kGe \quad \rightsquigarrow \quad kC_G(u).$$

Un exemple de résultat

Soit G un groupe, p un nombre premier, et k un corps de caractéritique p.

On note $O_{p'}(G)$ un sous-groupe distingué de G, d'ordre premier à p.

On note $C_G(u)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec l'élément u.

Théorème. S'il existe un élément $u \in G$, d'ordre p, tel que :

$$G = O_{p'}(G).C_G(u),$$

alors il existe un "morceau" kGe de l'algèbre de groupe kG, et une équivalence de Morita :

$$kGe \quad \rightsquigarrow \quad kC_G(u).$$

De plus le "morceau" kGe peut être relié très précisément à u.

Bibliographie

- S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 1971.
- M. Kashiwara, P. Schapira, *Categories and Sheaves*, 2006.
- T.Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, 1991.
- J.P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, 1967 (in english : *Linear representations of finite groups*)

This presentation will be available on my website :

http://erwanbiland.fr