Le théorème de Morita

Équivalences entre catégories de modules

Erwan BILAND

Université Paris 7 - Université Laval

Séminaire d'algèbre et géométrie gradué

Vendredi 25 février 2011

Objectifs

1 - Compléments sur les catégories abéliennes

- Le foncteur Hom
- Objet projectif
- Objet générateur

2 - Bimodules et foncteurs associés

- Notations sur les bimodules
- Produit tensoriel
- Le théorème de Morita

3 - Applications

- Algèbres simples centrales
- Structure locale des groupes finis
- Prolongements : équivalences stables, dérivées...

Qu'est-ce qu'une catégorie additive ?

Référence : Kashiwara, Schapira, *Categories and Sheaves*

Définition. La catégorie $\mathcal{C}$ est additive si :

- Pour tous objets X et Y, l'ensemble $\hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ a une structure de $\mathbb{Z}$-module, et la composition est bilinéaire ;
- Pour tous objets X et Y, le produit $X \times Y$ et le coproduit $X \sqcup Y$ sont canoniquement isomorphes (on les note $X \oplus Y$) ;
- Il existe un objet nul $0_{\mathcal{C}}$.

Qu'est-ce qu'une catégorie additive ?

Référence : Kashiwara, Schapira, *Categories and Sheaves*

Définition. La catégorie $\mathcal{C}$ est additive si :

- Pour tous objets X et Y, l'ensemble $\hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ a une structure de $\mathbb{Z}$-module, et la composition est bilinéaire ;
- Pour tous objets X et Y, le produit $X \times Y$ et le coproduit $X \sqcup Y$ sont canoniquement isomorphes (on les note $X \oplus Y$) ;
- Il existe un objet nul $0_{\mathcal{C}}$.

Remarque. On peut en fait donner une définition *intrinsèque*, sans référence à la structure de $\mathbb{Z}$-module sur les morphismes, qui apparaît comme une conséquence. Ainsi cette structure est en fait unique.

Qu'est-ce qu'une catégorie additive ?

Référence : Kashiwara, Schapira, *Categories and Sheaves*

Définition. La catégorie $\mathcal{C}$ est additive si :

- Pour tous objets X et Y, l'ensemble $\hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ a une structure de $\mathbb{Z}$-module, et la composition est bilinéaire ;
- Pour tous objets X et Y, le produit $X \times Y$ et le coproduit $X \sqcup Y$ sont canoniquement isomorphes (on les note $X \oplus Y$) ;
- Il existe un objet nul $0_{\mathcal{C}}$.

Remarque. On peut en fait donner une définition *intrinsèque*, sans référence à la structure de $\mathbb{Z}$-module sur les morphismes, qui apparaît comme une conséquence. Ainsi cette structure est en fait unique.

Conséquence. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur entre catégories additives. Si F est pleinement fidèle, alors il est additif ($\mathbb{Z}$-linéaire sur les morphismes).

Qu'est-ce qu'une catégorie abélienne ?

Définition. La catégorie $\mathcal{C}$ est abélienne si :

- $\mathcal{C}$ est additive ;
- Tout morphisme $f : X \to Y$ admet un noyau et un conoyau :

$$\begin{tikzcd}
& & Z \arrow[dll, dotted, "\exists !"'] \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & & \\
\ker f \arrow[rr] & & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & \operatorname{coker} f
\end{tikzcd}$$

- Pour tout morphisme $f : X \to Y$,

$$f \text{ est un isomorphisme} \quad \Leftrightarrow \quad \ker f = \operatorname{coker} f = 0$$

Exemple. La catégorie ${}_A\mathcal{M}od$ des A-modules (A commutatif ou non).

Qu'est-ce qu'une catégorie abélienne ?

Définition. La catégorie $\mathcal{C}$ est abélienne si :

- $\mathcal{C}$ est additive ;
- Tout morphisme $f : X \to Y$ admet un noyau et un conoyau :

$$\begin{tikzcd} & & Z & \\ \ker f \arrow[r] & X \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u] \arrow[r] & \operatorname{coker} f \arrow[ul, dotted, "\exists!"'] \end{tikzcd}$$

- Pour tout morphisme $f : X \to Y$,

$$f \text{ est un isomorphisme} \quad \Leftrightarrow \quad \ker f = \operatorname{coker} f = 0$$

Exemple. La catégorie ${}_A\mathcal{M}od$ des A-modules (A commutatif ou non).

Qu'est-ce qu'un objet générateur ?

Définition. Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est conservatif si, pour tout morphisme u dans $\mathcal{A}$,

$$F(u) \text{ est un isomorphisme} \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ est un isomorphisme.}$$

Définition. Soit G un objet de $\mathcal{C}$. On dit que G est générateur si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$ est conservatif.

Exemple. $\{a\}$ est générateur dans $\mathcal{E}ns$. $\mathbb{Z}$ est générateur dans $\mathcal{G}rp$. A est générateur dans ${}_A\mathcal{M}od$.
Mais $\{a\}$ n'est pas générateur dans $\mathcal{T}op$.

Théorème. On suppose que $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne admettant des sommes directes quelconques. Alors G est générateur si, et seulement si, pour tout objet X, il existe un ensemble I et un épimorphisme $G^{(I)} \twoheadrightarrow X$.

Plongement dans une catégorie de modules I

Convention. Pour toute la suite de l'exposé, les morphismes dans une catégorie agiront à droite. En particulier, la composition se fera dans le sens inverse du sens usuel.

Théorème (Gabriel-Popescu). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne admettant un générateur G, et des sommes directes quelconques. Notons $B = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(G)$, un anneau unitaire. Alors il existe un foncteur pleinement fidèle

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(G, -) : \mathcal{C} \to {}_{B}\mathcal{M}od.$$

Attention. Ce foncteur exact à gauche, mais pas nécessairement à droite.

Qu'est-ce qu'un objet projectif ?

Définition. Un objet P de $\mathcal{C}$ est dit projectif si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -)$ est exact (c'est-à-dire exact à droite).

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "\exists"'] & \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

En particulier, tout épimorphisme arrivant dans P est scindé.

Application. Si G est un objet générateur et projectif de $\mathcal{C}$, et si $B = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(G)$, alors le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G, -) : \mathcal{C} \to {}_B\mathcal{M}od$ est pleinement fidèle *et exact*.

Plongement dans une catégorie de modules II

Théorème (Freyd-Mitchell). Pour toute catégorie abélienne $\mathcal{C}$, il existe un anneau B tel que $\mathcal{C}$ soit équivalente à une *sous-catégorie abélienne pleine* de ${}_B\mathcal{M}od$ (c'est-à-dire une sous-catégorie pleine stable par somme directe, noyau et conoyau).

Preuve. On plonge $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ obtenue en "ajoutant" dans $\mathcal{C}$ toutes les limites projectives raisonnables.

Ce plongement est pleinement fidèle et exact.

Dans $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$, il y a "assez" d'objets projectifs. En particulier, il existe un objet projectif G tel que G soit "générateur pour $\mathcal{C}$".

On note $B = \mathrm{End}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{C})}(G)$. Le foncteur $\mathrm{Hom}(G, -) : \mathrm{Pro}(\mathcal{C}) \to {}_B\mathcal{M}od$ est exact, et sa restriction à $\mathcal{C}$ est pleinement fidèle.

La catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à l'image de ce foncteur dans ${}_B\mathcal{M}od$. $\square$

Module générateur

Référence : Broué, cours de Master, 2007

Conventions. On fixe un anneau A, commutatif ou non.
Soit M un A-module, et $B = \mathrm{End}_A(M)$.
Les morphismes agissent à droite sur P, qui est ainsi un A-module-B.
On note $N = M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$, un B-module-A.

Morphisme naturel. On note μ_M : $\begin{array}{ccc} M \otimes_B M^\vee & \longrightarrow & A \\ x \otimes f & \longmapsto & xf \end{array}$.

C'est un morphisme de A-modules-A, et $\mathrm{im}\ \mu_M = \sum_{Y \leqslant A,\ \exists M \twoheadrightarrow Y} Y$.

Module générateur. L'objet M est générateur dans la catégorie ${}_A\mathcal{M}od$ si, et seulement si, on a un isomorphisme $\mu_M : M \otimes_B M^\vee \simeq A$.

Exemple. Tout module A-libre est générateur.

Module projectif de type fini

Soit toujours M un A-module, et $B = \mathrm{End}_A(M)$.

Morphisme naturel. On note $\nu_M : \begin{array}{ccc} M^\vee \otimes_A M & \to & B \\ f \otimes x & \mapsto & [y \mapsto (yf)x] \end{array}$.

C'est un morphisme de B-modules-B, et

$$\mathrm{im}\ \nu_M = \{u : M \to M \mid \exists n,\ \exists M \xrightarrow[v]{} A^n \xrightarrow[w]{} M,\ u = vw\}.$$

Module projectif de type fini. Le module M est de type fini et projectif dans la catégorie ${}_A\mathcal{M}od$ si, et seulement si, il vérifie une des conditions équivalentes :

- M est facteur direct d'un A-module libre de type fini ;
- on a un isomorphisme $\nu_M : M^\vee \otimes_A M \simeq B$.

Exemples. Si A est un anneau principal, les projectifs sont libres.
Si $A = kG$, G groupe fini, les modules projectifs indécomposables sont les enveloppes projectives des modules irréductibles.

Equivalence de Morita

Théorème (Morita, première partie).
Soit A un anneau noethérien, et M un A-module générateur et projectif de type fini. Notons

$$B = \mathrm{End}_A(M) \ , \quad N = M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A).$$

Alors le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, -) \simeq N \otimes_A -$ est une équivalence de catégories de ${}_A\mathcal{M}od$ sur ${}_B\mathcal{M}od$.

Une équivalence réciproque est le foncteur $M \otimes_B -$.

Preuve.

$$M \otimes_B N \simeq A \quad ; \quad N \otimes_A M \simeq B.$$

$\square$

Théorème (Morita, en entier).
Soient A et B deux anneaux noethériens. Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

1. Les catégories ${}_A\mathcal{M}od$ et ${}_B\mathcal{M}od$ sont équivalentes.
2. Les catégories ${}_A\mathrm{mod}$ et ${}_B\mathrm{mod}$ (type fini) sont équivalentes.
3. Il existe une *paire de Morita* (M, N) : M est un A-module-B, N est un B-module A, et
$$M \otimes_B N \simeq A \quad \text{dans } {}_A\mathcal{M}od_A \quad ; \quad N \otimes_A M \simeq B \quad \text{dans } {}_B\mathcal{M}od_B.$$
4. Il existe un A-module M, générateur et projectif de type fini, tel que
$$B \simeq \mathrm{End}_A(M).$$

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que les anneaux A et B sont Morita-équivalents.

Conséquences d'une équivalence de Morita.

Proposition. Soient A et B deux anneaux noethériens Morita-équivalents.

- Il y a une correspondance bijective entre les classes d'isomorphisme de modules irréductibles sur A et sur B.
- Il y a une correspondance bijective entre les classes d'isomorphisme de modules indécomposables sur A et sur B.
- Il y a une correspondance bijective entre les classes d'isomorphisme de modules projectifs indécomposables sur A et sur B.
- Dans un contexte raisonnable (algèbres de blocs), les matrices de Cartan de A et B sont égales.

Equivalences entre algèbres de blocs

Le principal objet actuel de la théorie des groupes finis est la description des représentations modulaires d'un groupe G, c'est-à-dire de la catégorie ${}_{kG}\mathrm{mod}$, où k est un corps de caractéristique positive.

La théorie de Brauer permet de "briser" l'algèbre kG en *blocs* $B_1, \ldots, B_n$.

En général, la catégorie des B-modules est encore trop compliquée pour être décrite directement. On recherche donc à classifier les blocs à *équivalence* près.

On a développé pour cela différents outils : équivalences de Morita, de Rickard, équivalence stable...

Blocs du groupe symétrique

Définition (Rickard). On appelle équivalence dérivée entre deux anneaux A et B une équivalence entre les catégories dérivées $D^b({}_A\mathcal{M}od)$ et $D^b({}_B\mathcal{M}od)$.

Théorème (Chuang, Rouquier, 2001). Soit B (resp. B') un bloc du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (resp. $\mathfrak{S}_{n'}$) sur un corps de caractéristique p.

Il existe entre B et B' une équivalence dérivée (et même une équivalence "splendide") si, et seulement si, les p-groupes de défaut de B et B' sont isomorphes.

Conséquences d'une équivalence de Morita

Proposition. Soient A et B deux anneaux noethériens Morita-équivalents.

- Les centres $Z(A)$ et $Z(B)$ sont isomorphes.
- Il y a une correspondance bijective entre les idéaux bilatères de A et de B.
- A est semi-simple $\Leftrightarrow$ B est semi-simple.
- A est simple $\Leftrightarrow$ B est simple.

Preuve. Le foncteur $N \otimes_A - \otimes_A M$ est une équivalence de catégories de ${}_A\mathcal{M}od_A$ dans ${}_B\mathcal{M}od_B$, qui envoie A sur B. $\square$

Algèbres simples centrales

Proposition. Soit k un corps, et A, B des algèbres simples centrales sur k.

1. Il existe une unique algèbre à division D de centre k telle que A soit Morita-équivalente à D, et il existe n tel que $A \simeq \mathcal{M}_n(D)$.
2. Si la k-algèbre A' est Morita-équivalente à A, alors elle est simple centrale.
3. Pour $k \leqslant k'$, la k'-algèbre $k \otimes_k A$ est encore simple centrale.
4. La k-algèbre $A \otimes_k B$ est encore simple centrale.
5. Si A' est Morita-équivalente à A, alors $A' \otimes_k B$ est Morita-équivalente à $A \otimes_k B$.
6. $A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$ est Morita-équivalente à k.

Définition. L'ensemble des classes d'équivalence de Morita de k-algèbres simples centrales, muni du produit tensoriel, est un groupe abélien, appelé groupe de Brauer du corps k.