Cohomologie de Tate

Erwan Biland

18 mars 2010

Résumé

Ces notes ont été rédigées en vue d'un exposé au groupe de lecture «cohomologie des groupes» des doctorants de Chevaleret, le 18 mars 2010.

Leur objet est de construire la cohomologie de Tate. Cette théorie réunit, dans un même foncteur cohomologique $\hat{H}^*(G, \cdot)$, à la fois l'homologie et la cohomologie classiques d'un groupe fini G. Pour la construire, on définit une notion de «résolution» complète d'un G-module M. On aimerait qu'une telle résolution se fasse au moyen de modules à la fois projectifs et injectifs, ce qui n'est généralement pas possible. On remplace donc la projectivité et l'injectivité par des notions relatives ; l'hypothèse de finitude de G entraîne l'équivalence de la projectivité et de l'injectivité relatives.

Après avoir défini l'homologie et la cohomologie de Tate, on montre qu'elles sont identiques (à la numérotation près), puis on les relie à l'homologie et la cohomologie ordinaires. On énonce ensuite leurs principales propriétés, avant de définir (schématiquement) le cup-produit en cohomologie.

Table des matières

1 Injectivité relative

Rappels. Définition d'un module projectif, injectif. Un module est projectif ssi c'est un facteur direct d'un module libre ; on a donc assez de projectifs de type fini. En particulier, un $\mathbb{Z}$-module est projectif ssi il est libre. Par contre, on n'a pas assez d'injectifs de type fini : par exemple, le plus petit $\mathbb{Z}$-module injectif contenant $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Q}$, qui n'est pas de type fini sur $\mathbb{Z}$.

Définitions

Soit A un sous-anneau de B tel que B soit libre sur A (par exemple $A = \mathbb{Z}H$ et $B = \mathbb{Z}G$ avec H un sous-groupe de B).

On dit qu'un morphisme $\iota : M \to N$ de B-modules est une injection A-directe, ou A-admissible, si c'est une injection directe (qui fait de M un facteur direct de N) dans la catégorie A-Mod. On dit qu'un morphisme $\pi : M \to N$ de B-modules est une surjection A-scindée, ou A-admissible, si c'est une surjection scindée (il existe $\iota : N \to M$ tel que $\pi \circ \iota = \mathrm{Id}_N$) dans A-Mod. On dit qu'un morphisme quelconque $f : M \to N$ est A-admissible s'il se factorise comme produit d'une surjection et d'une injection A-admissibles $\pi : M \to \operatorname{im} f$ et $\iota : \operatorname{im} f \to N$.

On dit que le B-module P est «projectif sur B relativement à A» si, pour toute surjection A-admissible $M \to N$, tout morphisme de B-modules $P \to N$ se relève en un morphisme $P \to M$.

On dit que le B-module Q est «injectif sur B relativement à A» si, pour toute injection A-admissible $M \to N$, tout morphisme de B-modules $M \to Q$ se prolonge en un morphisme $N \to Q$.

Modules induits et co-induits

Supposons $P = \mathrm{ind}_A^B X = B \otimes_A X$. Alors, par dualité de foncteurs, pour tout B-module M, $\mathrm{Hom}_B(P, M) = \mathrm{Hom}_B(\mathrm{ind}_A^B X, M) = \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{res}_A^B M)$. Si $M \to N$ est une surjection A-scindée entre B-modules, alors $\mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{res}_A^B M) \to \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{res}_A^B N)$ est surjectif donc $\mathrm{Hom}_B(P, M) \to \mathrm{Hom}_B(P, N)$ aussi : P est projectif relativement à A.

De même, si Q est co-induit de A à B, alors Q est injectif sur B relativement à A.

Il est clair que l'injectivité et la projectivité relatives passent aux facteurs directs.

De plus, pour tous B-modules P et Q, les morphismes d'adjonction $\pi : \mathrm{ind}_A^B \mathrm{res}_A^B P \to P$ et $\iota : Q \to \mathrm{coind}_A^B \mathrm{res}_A^B Q$ sont, respectivement, une surjection A-admissible et une injection A-admissible (on explicite facilement une section de π, une rétraction de ι). Donc, si P est relativement projectif (resp. Q relativement injectif), alors π est scindé dans B-Mod (resp. ι est directe dans B-Mod) donc P (resp. Q) est un facteur direct de $\mathrm{ind}_A^B \mathrm{res}_A^B P$ (resp. $\mathrm{coind}_A^B \mathrm{res}_A^B Q$).

Finalement, un morphisme est projectif (resp. injectif) sur B relativement à A si, et seulement si, c'est un facteur direct d'un module induit (resp. coinduit) de A à B.

On montre alors qu'un B-module est B-projectif (resp. injectif) si, et seulement si, il est à la fois A-projectif (resp. injectif) et A, B-relativement projectif (resp. injectif).

Cas où $[B : A] < \infty$

Si B est A-libre de type fini, les foncteurs d'induction et de co-induction sont isomorphes (via le choix d'une base de B sur A). *[Erratum : il faut que B soit isomorphe à $B^\vee$ comme B-module-B, c'est-à-dire que B soit une A-algèbre de Frobenius.]*

Alors, d'après la caractérisation obtenue au paragraphe précédent, un B-module Q est relativement injectif si, et seulement si, il est relativement projectif. Or on a vu que tout B-module projectif est relativement projectif, donc tout B-module projectif est relativement injectif.

On supposera désormais $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}G$, avec G fini.

Dans ce cadre, les $\mathbb{Z}G$-modules projectifs sont les $\mathbb{Z}G$-modules à la fois relativement injectifs et libres sur $\mathbb{Z}$. Par contre, les $\mathbb{Z}G$-modules injectifs sont aussi des $\mathbb{Z}$-modules injectifs ; ils ne sont donc pas libres sur $\mathbb{Z}$.

Théorème. Il y a assez de modules relativement injectifs de type fini. Précisément, si M est un $\mathbb{Z}G$-module $\mathbb{Z}$-libre et de type fini, alors il existe un $\mathbb{Z}G$-module Q $\mathbb{Z}$-libre, relativement injectif et de type fini, et une injection admissible $\iota : M \to Q$ (il suffit de prendre $Q = \mathrm{coind}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}G} \mathrm{res}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}G} M$, et ι le morphisme d'adjonction).

Dualité

Pour tout B-module M, on note $\bar{M} = \mathrm{hom}_A(M, A)$ et $\check{M} = \mathrm{hom}_B(M, B)$.

Ces deux modules sont (fonctoriellement) isomorphes, par adjonction de res_A^B et coind_A^B, car $B = \mathrm{ind}_A^B A \simeq \mathrm{coind}_A^B A$. De plus, si M est de type fini, $\bar{\bar{M}} \simeq M$.

On montre aussi que $\bar{M}$ est relativement projectif si, et seulement si, M est relativement injectif, et inversement.

2 Résolutions

Résolutions à gauche

Rappel. Si M est un $\mathbb{Z}G$-module de type fini, alors il admet une résolution $\ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ par des modules projectifs de type fini. Les P_n sont tous $\mathbb{Z}$-libres car $\mathbb{Z}$-projectifs. Si on suppose de plus M libre, les différentielles du complexe P sont toutes admissibles (on dira que P est un complexe admissible).

Résolutions à droite

Soit M un $\mathbb{Z}G$-module libre sur $\mathbb{Z}$. Il existe une injection admissible $\iota : M \to Q^0$, avec Q^0 $\mathbb{Z}$-libre et relativement injectif de type fini. Comme ι est admissible, son conoyau est $\mathbb{Z}$-libre et de type fini, donc se plonge dans un $\mathbb{Z}G$-module Q^1 qui est $\mathbb{Z}$-libre et relativement injectif de type fini, *etc.* On construit ainsi une résolution à droite de M par un complexe admissible de modules $\mathbb{Z}$-libres et relativement injectifs de type fini :

$$0 \to M \to Q^0 \to Q^1 \to \ldots \to Q^n \to \ldots$$

Si Q et R sont deux telles résolutions, le morphisme de M dans R^0 se prolonge à Q^0 car R^0 est relativement injectif et $M \to Q^0$ est une injection $\mathbb{Z}$-admissible. Le morphisme $Q^0/M \to R^1$ ainsi obtenu se prolonge à Q^1, *etc.*. On obtient ainsi un morphisme de complexes de Q sur R qui induit l'identité sur M.

Or un morphisme de complexes de Q dans R qui induit l'endomorphisme nul sur M est homotope à 0. Donc il est clair que deux morphismes de résolutions de Q dans R sont homotopes ; en particulier, tout morphisme de résolution de Q dans lui-même est homotope à l'identité. Ainsi tout morphisme de résolutions de Q sur R est une équivalence d'homotopie.

La résolution $M \to Q$ est donc unique à équivalence d'homotopie près, cette équivalence d'homotopie étant elle-même unique à homotopie près.

Remarque. Dans la suite, on écrira Q comme un complexe de chaînes $0 \to Q_0 \to Q_{-1} \to Q_{-2} \to \ldots$, pour unifier les résolutions à gauche et à droite.

Dualité entre résolutions à gauche et à droite

Si F est un complexe (de chaînes) de $\mathbb{Z}G$-modules $\mathbb{Z}$-libres, on note $\bar{F} = \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Z})$ (par convention, un complexe de chaînes). Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\bar{F}_n = \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}}(F_{-n}, \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}G$-module à droite ! Mais on peut en faire un $\mathbb{Z}G$-module à gauche en faisant agir g comme g^{-1}. Alors $\bar{F}$ est un complexe de $\mathbb{Z}G$-modules $\mathbb{Z}$-libres. D'après une remarque précédente, $\bar{F}$ était relativement injectif (c'est-à-dire projectif) en tout degré si, et seulement si, F l'est. Enfin, si F est acyclique et $\mathbb{Z}$-admissible, il en est de même de $\bar{F}$

Si M est un $\mathbb{Z}G$-module $\mathbb{Z}$ libre, on peut alors choisir une résolution projective (à gauche) P de $\bar{M}$, et on obtient une résolution $\mathbb{Z}$-libre et relativement injective (à droite) $\bar{P}$ de M. Cette résolution est admissible car P l'était. Par unicité, la résolution $\bar{P}$ est homotope à la résolution Q du paragraphe précédent. Réciproquement, $\bar{Q}$ est une résolution à gauche de $\bar{M}$

Pour $M = \mathbb{Z}$, c'est encore plus simple car M est canoniquement isomorphe à $\bar{M}$.

Résolutions complètes

Soit M un $\mathbb{Z}G$-module $\mathbb{Z}$-libre de type fini. On appelle résolution complète de M un complexe de chaîne acyclique (c'est-à-dire exact) F de $\mathbb{Z}G$-modules projectifs (c'est-à-dire $\mathbb{Z}$-libres et relativement injectifs) de type fini, muni d'un morphisme d'augmentation $\varepsilon : F \to M$, de degré 0, qui induit un isomorphisme de $\mathrm{im}(d_0)$ sur M.

Un tel complexe peut se décomposer en deux morceaux : une résolution à gauche, projective, $\ldots \to F_1 \to F_0 \to \mathrm{im}(d_0) \simeq M \to 0$, et une résolution à droite, $\mathbb{Z}$-libre et relativement injective, $0 \to M \simeq \mathrm{im}(d_0) \to F_{-1} \to F_{-2} \to \ldots$. D'après ce qui précède, ces deux résolutions existent et sont uniques à homotopie près. Elles sont de plus admissibles, donc le complexe F l'est aussi (ou peut être choisi tel ?)

On a ainsi prouvé que le $\mathbb{Z}G$-module M, $\mathbb{Z}$-libre, de type fini, admet une résolution complète (F, ε), unique à homotopie près.

Par dualité, on obtient des résolutions $0 \to \bar{M} \to \bar{F}_0 \to \bar{F}_{-1} \to \ldots$ et $\ldots \to \bar{F}_2 \to \bar{F}_1 \to \bar{M} \to 0$. Notons $\bar{F}[-1]$ le complexe défini par $\bar{F}[1]_n = \bar{F}_{n+1}$, avec les même différentielles, décalées. D'après ce qui précède, le complexe $\bar{F}[1]$, muni du morphisme d'augmentation $\varepsilon' : \bar{F}[1]_0 = \bar{F}_1 \to \bar{M}$, est une résolution complète de M.

Dans le cas où $M = \mathbb{Z}$, $\bar{F}[1]$ est encore une résolution complète de $\mathbb{Z}$, donc il est homotope à F.

3 Homologie et cohomologie de Tate

Définitions

On fixe désormais une résolution complète (F, ε) du $\mathbb{Z}G$-module $\mathbb{Z}$ (avec action triviale de G). Soit M un $\mathbb{Z}G$-module quelconque. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\hat{H}_n(G, M) = H_n(F \otimes_G M) \quad \text{et} \quad \hat{H}^n(G, M) = H^n(\mathscr{H}\mathrm{om}_G(F, M)).$$

Comparaison entre homologie et cohomologie de Tate

Pour $n \in \mathbb{N}$, comme F_n est projectif, on a un isomorphisme naturel :

$$\mathscr{H}\mathrm{om}_G^n(F, M) = \mathrm{Hom}_G(F_n, M) \simeq (F_n)^\vee \otimes_G M = \check{F}_{-n} \otimes_G M.$$

Or, comme on l'a vu plus haut, $\check{F}_{-n} \simeq \bar{F}_{-n}$. Ainsi, en passant à l'homologie, en se rappelant que F est homotope à $\bar{F}[1]$,

$$\hat{H}^n(G, M) \simeq H_{-n}(\bar{F} \otimes M) = H_{-n-1}(\bar{F}[1] \otimes M) = \hat{H}_{-n-1}(G, M).$$

On constate donc que les groupes d'homologie et de cohomologie de Tate sont les mêmes, à la numérotation près.

Lien avec l'homologie et la cohomologie ordinaires

Notons F^- (resp. F^+) le complexe obtenu en annulant les modules de degrés positifs ou nuls (resp. strictement négatifs). On a alors une suite exacte de complexes $0 \to F^- \to F \to F^+ \to 0$ (l'ordre est important), qui est trivialement scindée en tout degré, donc donne une suite exacte $0 \to \mathscr{H}\mathrm{om}_G(F^+, M) \to \mathscr{H}\mathrm{om}_G(F, M) \to \mathscr{H}\mathrm{om}_G(F^-, M) \to 0$. On en déduit une suite exacte longue en cohomologie :

$$\ldots \to H^n(\mathscr{H}\mathrm{om}_G(F^+, M)) \to \hat{H}^n(G, M) \to H^n(\mathscr{H}\mathrm{om}_G(F^-, M)) \to H^{n+1}(\mathscr{H}\mathrm{om}_G(F^+, M)) \to \ldots$$

Pour $n > 0$, $\mathscr{H}\mathrm{om}_G^{n-1}(F^-, M) = \mathscr{H}\mathrm{om}_G^n(F^-, M) = 0$ car $F^-_{n-1} = F^-_n = 0$. Ainsi $\hat{H}^n(G, M) = H^n(\mathscr{H}\mathrm{om}_G(F^+, M)) = H^n(G, M)$ (car $F^+ \to \mathbb{Z}$ est une résolution projective).

Pour $n < -1$, $\mathscr{H}\mathrm{om}_G^n(F^+, M) = \mathscr{H}\mathrm{om}_G^{n+1}(F^+, M) = 0$ donc, d'après les remarques précédentes sur la dualité, $\hat{H}^n(G, M) = H^n(\mathscr{H}\mathrm{om}_G(F^-, M)) = H_{-n}(\bar{F}^- \otimes M)) = H_{-n-1}(\bar{F}^-[1] \otimes M)) = H_{-n-1}(G, M)$ (car $\bar{F}^-[1] \to \mathbb{Z}$ est une résolution projective).

Enfin, $\mathscr{H}\mathrm{om}_G^{-1}(F^+, M) = \mathscr{H}\mathrm{om}_G^0(F^-, M) = 0$ donc, par les mêmes raisonnements, on a une suite exacte :

$$0 \to \hat{H}_0(G, M) = \hat{H}^{-1}(G, M) \to H_0(G, M) \to H^0(G, M) \to \hat{H}^0(G, M) \to 0.$$

En résumé, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{H}^n(G, M) = \hat{H}_{-n-1}(G, M) = \left| \begin{array}{ll} H^n(G, M) & \text{si } n > 0 \\ \tilde{H}^0(G, M) & \text{si } n = 0 \\ \tilde{H}_0(G, M) & \text{si } n = -1 \\ H_{-n-1}(G, M) & \text{si } n < -1 \end{array} \right. ,$$

où $\tilde{H}^0(G, M)$ est un quotient de $H^0(G, M)$, et $\tilde{H}_0(G, M)$ un sous-groupe de $H_0(G, M)$, qu'il nous reste à expliciter.

Le morphisme $H_0(G, M) \to H^0(G, M)$

On peut choisir $F_0 = F_{-1} = \mathbb{Z}[G]$, avec $d_0 = N = \mathrm{Tr}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}G}$. On a bien ainsi $\mathrm{im} d^0 \simeq \mathbb{Z}$ comme $\mathbb{Z}G$-module. Par «diagram chasing» dans le lemme du serpent, on constate alors que le morphisme $M_G = H_0(G, M) \to H^0(G, M) = M^G$ est $\bar{N}$. Ainsi $\hat{H}^{-1}(G, M) \simeq \ker \bar{N}$ et $\hat{H}^0(G, M) \simeq \mathrm{coker}\, \bar{N}$.

Dans le cas où $M = \mathbb{Z}$ avec action triviale de G, on a $M_G = M^G = \mathbb{Z}$ et l'application $\bar{N} = N$ est la multiplication par $|G|$. Ainsi $\hat{H}^{-1}(G, \mathbb{Z}) = 0$ et $\hat{H}^0(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}$. Si p est un nombre premier divisant $|G|$ et $M = \mathbb{F}_p$, on trouvera par contre $d^0 = 0$ d'où $\hat{H}^{-1}(G, \mathbb{F}_p) \simeq \hat{H}^0(G, \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p$.

Propriétés élémentaires

Théorème des coefficients universels. Soit M un $\mathbb{Z}G$-module et N un $\mathbb{Z}$-module. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une suite exacte :

$$0 \to \hat{H}^n(G, M) \otimes N \to \hat{H}^n(G, M \otimes N) \to \mathrm{Tor}_1(\hat{H}^{n+1}(G, M), N) \to 0.$$

En particulier, pour $M = \mathbb{Z}$ et $N = \mathbb{F}_p$, on obtient :

$$0 \to \hat{H}^n(G, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_p \to \hat{H}^n(G, \mathbb{F}_p) \to \mathrm{Tor}_1(\hat{H}^{n+1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{F}_p) \to 0,$$

où $\mathrm{Tor}_1(\hat{H}^{n+1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{F}_p) \simeq (\mathbb{F}_p)^r$, avec r le p-rang de $\hat{H}^{n+1}(G, \mathbb{Z})$.

Pour $M = \mathbb{Z}$ et $N = \mathbb{Q}$, on trouve tout simplement $\hat{H}^n(G, \mathbb{Q}) \simeq \hat{H}^n(G, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$.

Formule de Künneth. A voir.

Fonctorialité. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{H}^n(G, \cdot)$ est un foncteur covariant.

Triangles exacts. Toute suite exacte courte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ donne (fonctoriellement) une suite exacte longue en cohomologie de Tate :

$$\ldots \to \hat{H}^n(G, M') \to \hat{H}^n(G, M) \to \hat{H}^n(G, M'') \to \hat{H}^{n+1}(G, M') \to \ldots$$

Lemme de Shapiro. Si H est un sous-groupe de G et M un H-module, on a un isomorphisme naturel :

$$\hat{H}^n(H, M) \simeq \hat{H}^n(G, \mathrm{ind}_H^G M)$$

En particulier, comme la cohomologie de Tate sur le groupe $\{1\}$ est nulle en tout degré (une résolution complète est acyclique), ceci prouve que les modules induits (ou coinduits : G est fini) ont une cohomologie de Tate nulle en tout degré. Ainsi les $\hat{H}^n(G, \cdot)$ sont effaçables (resp. coeffaçables) : tout module M est un quotient (resp. un sous-module) d'un module M' tel que $\hat{H}^n(G, M') = 0$.

Décalage de degré. Grâce au lemme de Shapiro et aux longues suites exactes, on obtient l'existence, pour tout $\mathbb{Z}G$-module M, de deux G-modules K et C tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{H}^n(G, M) \simeq \hat{H}^{n+1}(G, K) \text{ et } \hat{H}^n(G, M) \simeq \hat{H}^{n-1}(G, C).$$

Par exemple, pour $M = \mathbb{Z}$, en notant $N : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ comme vu plus haut, on obtient $K = \ker N$ et $C = \mathrm{coker}\, N$.

Restriction et corestriction.

4 Cup-produit en cohomologie de Tate

Définition.

Il existe un unique cup-produit $(u, v) \mapsto u \smile v$ sur le foncteur cohomologique $\hat{H}^*(G, \cdot)$ tel que :

(i) $- \smile -$ induit, pour tout p, q, une transformation naturelle $\hat{H}^p(G, \cdot) \otimes \hat{H}^q(G, \cdot) \to \hat{H}^{p+q}(G, \cdot \otimes \cdot)$.

(ii) Pour toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ et tout module N tel que la suite $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ soit exacte, pour tout $v \in H^q(G, N)$, le cup-produit commute avec les «morphismes de cobord» $\delta : \hat{H}^p(G, M'') \to \hat{H}^{p+1}(G, M')$ et $\delta : \hat{H}^p + q(G, M'' \otimes N) \to \hat{H}^{p+q+1}(G, M' \otimes)$.

(iii) Idem pour une suite exacte $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$, un module M et $u \in \hat{H}^p(G, M)$, en multipliant par $(-1)^p$.

(iv) Le cup-produit $\hat{H}^0(G, \cdot) \otimes \hat{H}^0(G, \cdot) \to \hat{H}^0(G, \cdot \otimes \cdot)$ est, pour tous M, N, le morphisme induit par l'application $M^G \otimes N^G \to (M \otimes N)^G$, après passage au conoyau de N des deux côtés.

L'unicité se démontre par décalage de dimension à partir de *(iv)*. L'existence est le point délicat, qui nécessite de construire une approximation diagonale $\Delta : F \to F \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} F$, où F est une résolution complète de $\mathbb{Z}$, et $(F \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}} F)_n = \prod_{p+q=n} F_p \otimes_{\mathbb{Z}} F_q$.

Propriétés.

L'unicité permet de démontrer la commutativité (à $(-1)^{\deg u}$ près). L'associativité est immédiate en degré 0 et se généralise par décalage de degré. L'élément $1 \in \hat{H}^0(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}$ est neutre en degré 0, donc en tout degré par décalage de degré. Ceci fait de $\hat{H}^*(G, \mathbb{Z})$, par exemple, un anneau gradué (anti-)commutatif.

Références

[Bro-1982] K.S. Brown, *Cohomology of groups*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Puig-1976] Ll. Puig, *Structure locale dans les groupes finis*, Bull. Soc. Math. France Suppl. Mém., p.5-132, 1976.