Blocs de Brauer et triangle CDE

Erwan Biland

1er mars 2010

Résumé, objectifs
L'objet de ces notes est de faire le point sur les propriétés des algèbres symétriques qui permettent, d'une part, de définir les blocs de Brauer et, d'autre part, de définir le caractère d'une représentation. On cherchera ensuite à expliquer, toujours dans le cadre des algèbres symétriques, le lien entre représentations ordinaires et représentation modulaires, relativement à un nombre premier p.
La structure d'un bloc ne sera pas explicitée, sauf dans le cas où celui-ci est semi-simple. Cette structure est généralement trop compliquée pour être décrite ; tout au plus peut on espérer comparer des blocs au moyen d'équivalences de Morita ou d'équivalences dérivées. Ces méthodes ne sont pas développées ici.
Ces notions sur les algèbres symétriques seront appliquées à l'algèbre $\mathcal{O}G$ d'un groupe fini G sur un anneau de valuation discrète $\mathcal{O}$.
L'objet d'un prochain papier sera d'expliquer, dans ce cadre, la notion de groupe de défaut d'une classe de conjugaison, puis d'un bloc de Brauer, et définir le morphisme de Brauer. On souhaitera énoncer et démontrer les trois *main theorems* de Brauer.

Table des matières

1 Blocs d'une algèbre

Dans cette section, on fixe un corps K et une K-algèbre A, de dimension finie sur K.

1.1 Modules irréductibles

Un A-module M est dit irréductible s'il est non nul et ne possède pas de sous-A-module non trivial. Par le choix d'un générateur, on peut toujours identifier un A-module irréductible au quotient A/I de l'algèbre A par un idéal maximal (à gauche) $\mathfrak{m}$.

On note $\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A \,|\, aM = 0\}$ l'idéal annulateur de M. C'est un idéal bilatère de A.

Radical de Jacobson

On appelle radical de Jacobson de A, et on note $\mathrm{rad}(A)$, l'intersection des idéaux maximaux à gauche de A. C'est un idéal bilatère de A, qui possède de nombreuses autres caractérisations. Entre autres, $\mathrm{rad}(A)$ est l'intersection des annulateurs des A-modules irréductibles.

Si M est un A-module irréductible, alors $\mathrm{End}_A(M)$ est une K-algèbre à division, car tout endomorphisme non nul est un isomorphisme (lemme de Schur). Si K est algébriquement clos, on en déduit que $\mathrm{End}_A(M) = K$. On peut affaiblir cette hypothèse en supposant K «assez gros» (étudié dans [Ser-1967]).

Notons $\mathscr{I}$ un ensemble de représentant des classes d'isomorphismes des modules (à gauche) irréductibles sur A.

Modules indécomposables

Un A-module M est dit indécomposable s'il est non nul et ne posséde pas de facteur direct non trivial. Tout module irréductible est indécomposable, mais la réciproque est fausse si l'algèbre n'est pas semi-simple.

L'algèbre A, et plus généralement tout A-module de type fini, se décompose en somme directe d'indécomposables (récurrence sur la dimension sur K).

La notion de module indécomposable, à elle seule, semble assez difficile à manier car non stable par passage aux sous-modules ou aux quotients. En pratique, il y a généralement beaucoup trop d'indécomposables pour qu'on puisse les décrire simplement comme on va le faire pour les irréductibles.

1.2 Modules projectifs

Un A-module P est dit projectif si c'est un facteur direct d'un module libre sur A. Il existe une caractérisation catégorique de la projectivité (propriété universelle) qui se résume en disant que le foncteur $\mathrm{Hom}(P, \cdot)$ est exact (et pas seulement exact à gauche).

Tout A-module E possède une enveloppe projective, c'est-à-dire un module projectif P_E muni d'un morphisme essentiel $p : P_E \to E$ (*i.e.* qui est surjectif et dont la restriction à aucun sous-module de P_E n'est surjective). L'enveloppe projective est unique à isomorphisme (non unique) près. Tout module projectif P est l'enveloppe projective de son plus grand quotient semi-simple $P/\mathrm{rad}(A)P$.

L'enveloppe projective P_M d'un module irréductible M est indécomposable, et tout projectif indécomposable est de ce type. Ceci prouve que tout module projectif indécomposable est un facteur direct de A (et pas seulement d'un A-module libre).

Tout module projectif est isomorphe à une somme directe d'enveloppes projectives de modules irréductibles, cette somme directe étant unique à l'ordre près des facteurs.

Si $P = P_M$ est un A-module projectif indécomposable, alors $\mathrm{End}_A(P_M)$ est une K-algèbre locale. L'idéal maximal est l'ensemble des endomorphismes qui s'annulent en quotientant par le radical. Le quotient de $\mathrm{End}_A(P_M)$ par son idéal maximal est l'algèbre à division $\mathrm{End}_A(M)$, c'est-à-dire K si K est assez gros.

Plus précisément, P possède un unique sous-module maximal $\mathrm{rad}(P)$. P est donc engendré par n'importe quel élément n'appartenant pas à $\mathrm{rad}(P)$.

1.3 Blocs

Matrice de Cartan

On note $R(A)$ le groupe libre engendré par les classes d'isomorphismes de A-modules irréductibles : $R(A) = \oplus_{M\in\mathscr{I}}\mathbb{Z}[M]$. Pour E un A-module de type fini, et $(M_i)_i$ la famille des modules irréducibles apparaissant dans une suite de composition de E, on note $[E] = \sum_i [M_i]$. Par le théorème de Jordan, la somme $[E]$ ne dépend que de E, et non de la suite de composition choisie. $R(A)$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie des A-modules de type fini.

On définit de même le groupe de Grothendieck $P(A)$ de la catégorie des A-modules projectifs de type fini. D'après ce qui a été dit sur les enveloppes projectives, $P(A) = \oplus_{M\in\mathscr{I}}\mathbb{Z}[P_M]_{\text{proj}}$.

En recherchant les suites de composition d'un A-module projectif, on définit une application $c : P(A) \to R(A)$. Sa matrice C dans les bases $([M])_{M\in\mathscr{I}}$ et $([P_M]_{\text{proj}})_{M\in\mathscr{I}}$ est la *matrice de Cartan* de l'algèbre A.

Blocs de la matrice de Cartan et idéaux bilatères de A

On choisit d'ordonner les modules irréductibles M de telle sorte que la matrice C soit diagonale par blocs, avec des blocs aussi petits que possible.

Un bloc est alors un ensemble $\mathscr{J} \subset \mathscr{I}$ tel que, pour $M \in \mathscr{J}$, une suite de composition du module projectif P_M ne fait intervenir que des modules irréductibles isomorphes à des éléments de $\mathscr{J}$.

On dira qu'un A-module E *appartient* au bloc $\mathscr{J}$ si une suite de composition de E ne fait intervenir que des A-modules irréductibles isomorphes à des éléments de $\mathscr{J}$. La sous-catégorie des A modules appartenant au bloc $\mathscr{J}$ est stable par sous-objet, quotient, et même, par définition, par passage à l'enveloppe projective.

On peut alors généraliser aux blocs une partie du lemme de Schur : si E et F sont des A-modules appartenant à deux blocs distincts, alors $\text{Hom}_A(E, F) = 0$.

Notons $C_{\mathscr{J}}$ la somme de tous les facteurs directs du A-module appartenant au bloc $\mathscr{J}$. Il est clair que $C_{\mathscr{J}}$ est un idéal à gauche de A, puisque c'est une somme de sous-A-modules.

De plus, écrivons A comme somme directe de sous-A-modules projectifs indécomposables : $A = \sum_\alpha P_\alpha$. Alors, si P_α n'appartient pas au bloc $\mathscr{J}$, par le lemme de Schur précédent, la projection de $C_{\mathscr{J}}$ sur P_α est nulle. On en déduit que $C_{\mathscr{J}} = \sum_{P_\alpha\in\mathscr{J}} P_\alpha$. Ainsi $C_{\mathscr{J}}$ est un facteur direct de A, et donc un A-module projectif.

Ceci prouve aussi que $A = \bigoplus_{\mathscr{J}} C_{\mathscr{J}}$, et que tout sous-$A$-module de A appartenant au bloc $\mathscr{J}$ est contenu dans $C_{\mathscr{J}}$.

Or, pour $a \in A$, le A-module $C_{\mathscr{J}}a$ est isomorphe à un quotient de $C_{\mathscr{J}}$, donc appartient au bloc $\mathscr{J}$. Ainsi $C_{\mathscr{J}}a \subset C_{\mathscr{J}}$, et $C_{\mathscr{J}}$ est un idéal à droite de A.

Les $C_{\mathscr{J}}$ sont donc des idéaux bilatères de A, projectifs comme A-modules et comme modules-A, et dont la somme directe vaut A.

1.4 Blocs et idempotents

Soit $1_A = \sum_{\mathscr{J}} b_{\mathscr{J}}$ la décomposition de l'unité de A dans la somme directe des $C_{\mathscr{J}}$.

Alors, pour $a \in A$, $a = \sum_{\mathscr{J}} ab_{\mathscr{J}} = \sum_{\mathscr{J}} b_{\mathscr{J}}a$. Or $ab_{\mathscr{J}}$ et $b_{\mathscr{J}}a$ appartiennent à $C_{\mathscr{J}}$. Par unicité de la décomposition de a, on obtient plusieurs résultats :

- *(i)* pour tout $\mathscr{J}$, $ab_{\mathscr{J}} = b_{\mathscr{J}}a$;
- *(ii)* si $a \in C_{\mathscr{J}}$, alors $ab_{\mathscr{J}}$ et $b_{\mathscr{J}}a = a$;
- *(iii)* si $a \in C_{\mathscr{J}'}$ avec $\mathscr{J}' \neq \mathscr{J}$, alors $ab_{\mathscr{J}}$ et $b_{\mathscr{J}}a = 0$.

Ainsi, les $b_{\mathscr{J}}$ sont des idempotents orthogonaux et centraux dans A. De plus, pour tout bloc $\mathscr{J}$, on a $C_{\mathscr{J}} = b_{\mathscr{J}}A = Ab_{\mathscr{J}}$, et $C_{\mathscr{J}}$ est une K-algèbre d'unité $b_{\mathscr{J}}$. Enfin, en tant que K-algèbre, $A \simeq \prod_{\mathscr{J}} C_{\mathscr{J}}$.

Réciproquement, soit b un idempotent central dans A. Notons $C = bA = Ab$, $b' = 1 - b$ et $C' = b'A = Ab'$. Ainsi $A = C \oplus C'$, avec $bC' = b'C = 0$.

Si P est un facteur direct de C, alors $b'P = 0$. Plus généralement, si M est (isomorphe à) un A-module irréductible apparaissant dans une suite de composition de P, on obtient $b'M = 0$. Si M apparaissait aussi, à isomorphisme près, dans une suite de composition d'un facteur direct de C', on aurait $bM = 0$, et donc $M = (b + b')M = bM + b'M = 0$, ce qui contredit la définition d'un module irréductible.

Ainsi, si $\mathscr{J}$ est un bloc de A, alors $C_{\mathscr{J}}$ est contenu dans C ou dans C'. Le A-module C est donc la somme directe d'une partie des $C_{\mathscr{J}}$, et l'idempotent b est la somme d'une partie des $b_{\mathscr{J}}$.

On a achevé de prouver que les $b_{\mathscr{J}}$ sont les idempotents primitifs du centre $Z(A)$.

Par la suite, on identifiera le bloc $\mathscr{J}$ à l'unique idempotent primitif central b appartenant à $C_{\mathscr{J}}$.

Remarques et questions

Si E et F sont des A modules, alors $E = \bigoplus_b bE$ et $F = \bigoplus_b bF$, d'où, par le lemme de Schur, $\mathrm{Hom}_A(E, F) \simeq \bigoplus_b \mathrm{Hom}_{bA}(bE, bF)$.

De même, $Z(A) = \bigoplus_b bZ(A) \simeq \bigoplus_b Z(bA)$. Dans quel cas peut-on aller plus loin et affirmer que $Z(bA) = Kb$?

Les b sont les idempotents primitifs centraux de A, mais aussi de A^{op}. On a donc une bijection entre les blocs «à gauche» de A et ses blocs «à droite». Peut-on être plus précis et obtenir une correspondance entre modules projectifs/irréductibles sur A à gauche et à droite ?

1.5 Structure d'une algèbre semi-simple

Si $\mathrm{rad}(A) = 0$, alors, comme A est de dimension finie sur K, il existe une famille finie d'idéaux maximaux $\mathfrak{m}_i$ de A telle que $\bigcap_i \mathfrak{m}_i = 0$. On peut même choisir cette famille minimale. L'application canonique de A dans la somme directe $\bigoplus_i A/\mathfrak{m}_i$ est alors un isomorphisme de A-modules, ce qui prouve que tout A-module irréductible est isomorphe à l'un des $A/\mathfrak{m}_i$, que tous les A-modules irréductibles sont projectifs, et donc que A est semi-simple.

Dans ce cas, la matrice de Cartan est la matrice identité, et chaque bloc contient un seul A-module irréductible (à isomorphisme près).

Composantes isotypiques et idempotents

Pour $M \in \mathscr{I}$, notons C_M l'idéal bilatère somme des sous-A-modules de A isomorphes à M. C'est $C_{\mathscr{J}}$ comme défini précédemment, pour $\mathscr{J} = \{M\}$. On l'appelle la composante isotypique de A relative au A-module irréductible M.

Comme dans le cas général, A est la somme directe des C_M, et les C_M sont en bijection avec les idempotents centraux primitifs de A. On notera ε_M celui qui appartient à C_M.

Structure d'une K-algèbre simple

Soit M' un sous-module de A isomorphe à M. Alors $M' \subset C_M$, donc ε_M agit sur M' comme l'identité et, pour $N \neq M$, ε_N agit sur M' comme l'application nulle. Il en est donc de même sur M. Ainsi, le morphisme de représentation $A \mapsto \mathrm{End}_K(M)$ se factorise par la projection de A sur C_M, et induit donc un morphisme $C_M \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M)$. Ce morphisme est injectif car son noyau est $\mathrm{Ann}(M) \cap C_M = \mathrm{rad}(A) \cap C_M = 0$.

Si K est assez gros, par le théorème de Wedderburn, on obtient un isomorphisme d'algèbres de C_M sur $\mathrm{End}_K(M) \simeq \mathscr{M}_{x_M}(K)$, où x_M est la dimension du K-espace vectoriel M (degré de la représentation).

En tant que K-algèbre, $A \simeq \prod_{M \in \mathscr{I}} \mathscr{M}_{x_M}(K)$. En tant que A-module, $C_M \simeq M^{x_M}$.

On obtient enfin, $Z(C_M) = K\varepsilon_M$, d'où $Z(A) = \bigoplus_{M \in \mathscr{I}} K\varepsilon_M$.

1.6 Structure d'une algèbre à un seul bloc

On suppose ici que tous les A-modules irréductibles appartiennent à un même bloc.
En tant que K-algèbre, pour K assez gros, $A/\mathrm{rad}(A) \simeq \prod_{M\in\mathscr{I}} \mathscr{M}_{x_M}(K)$.
En tant que A-module, $A/\mathrm{rad}(A) \simeq \bigoplus_{M\in\mathscr{I}} M^{x_M}$.
On en déduit, en tant que A-module, $A \simeq \bigoplus_{M\in\mathscr{I}} P_M^{x_M}$ (car A est un A-module projectif).
$\mathrm{End}_A(P_M)$ est une K-algèbre locale. Mais le module P_M est-il projectif, (*i.e.* libre), sur cette algèbre ?
On a un morphisme injectif d'algèbres de A dans $\prod_{M\in\mathscr{I}} \mathrm{End}_{\mathrm{End}_A(P_M)}(P_M)$.

2 Algèbres symétriques

Dans ce qui suit, on fixe un anneau commutatif R, et une R-algèbre A. On suppose que A est un R-module projectif et de type fini. En pratique, l'anneau R sera un corps ou un anneau local, donc ceci reviendra à supposer que A est un R-module libre de type fini.

2.1 Forme symétrisante, élément de Casimir

On suppose qu'il existe une fonction $t : A \to R$, appelée forme symétrisante, telle que l'application $(a, b) \mapsto t(ab)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur A. Elle induit donc un isomorphisme entre A et $A^* = \mathrm{Hom}_R(A, R)$. Pour $f \in A^*$, on notera $f^\vee \in A$ l'unique vecteur tel que $f = [a \mapsto t(f^\vee a)]$.
Plus généralement, si M est un A-module R-projectif, l'application t donne lieu à un isomorphisme entre $M^\vee$ et M^*.

Définition de l'élément de Casimir

La multiplication dans A donne lieu à un épimorphisme $\varphi : A \otimes_R A \to A$, qui devient par dualité un monomorphisme $A^* \to A^* \otimes_R A^*$, et grâce à la forme symétrisante un monomorphisme $\psi : A \to A \otimes_R A$ (structure de co-algèbre ?). On appelle élément de Casimir l'image $c_{A,t} = \psi(1_A) \in A \otimes_R A$, et on note $c_{A,t} = \sum_i x_i \otimes y_i$.
L'élément $c_{A,t}$ est caractérisé par la proposition : $\forall (a, b) \in A^2,\ \ t(ab) = \sum_i t(x_i a)t(y_i b)$.
L'anneau R étant commutatif, on obtient aussi $c_{A,t} = \sum_i y_i \otimes x_i$.

Application aux formes linéaires sur A, aux endomorphismes de A

En particulier, pour $f \in A^*$, on obtient $f^\vee = \sum_i f(x_i)y_i = \sum_i f(y_i)x_i$.
Plus généralement, pour $u \in \mathrm{End}_R(A)$, il existe un unique tenseur $\sum_j z_j \otimes f_j \in A \otimes_R A^*$ tel que, pour tout $a \in A$, $u(a) = \sum_j f_j(a)z_j$. Alors $u(a) = \sum_j \left(\sum_i f_j(x_i)t(y_i a)\right) z_j = \sum_i t(y_i a) \left(\sum_j f_j(x_i)z_j\right) = \sum_i t(y_i a)u(x_i)$.
On obtient donc :

$$\forall a \in A, \qquad u(a) = \sum_i t(y_i a)u(x_i) = \sum_i t(x_i a)u(y_i).$$

On a ainsi explicité un isomorphisme $\Psi : \mathrm{End}_R(A) \to A \otimes_R A,\ \ u \mapsto \sum_i x_i \otimes u(y_i)$. On constate que l'élément de Casimir $c_{A,t}$ est l'image par cet isomorphisme de l'identité Id_A.

Invariance de l'élément de Casimir

Remarquons que l'application $\Psi : \mathrm{End}_R(A) \to A \otimes_R A$ évoquée plus haut est un morphisme de A-modules-A. Ceci est d'ailleurs vrai que l'on fasse agir $A \otimes_R A^{\mathrm{op}}$ «par l'intérieur» ou «par l'extérieur». Si M est un A-module-A, notons $M^A = \{m \in M \mid \forall a \in A,\ am = ma\}$ le sous-module des éléments de M centralisés par A. L'application Ψ induit un isomorphisme de $\mathrm{End}_R(A)^{A\otimes_R A} = \mathrm{End}_A(A)_A \simeq Z(A)$ dans $(A \otimes_R A)^{A\otimes_R A}$. Or $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{End}_A(A)_A$, et donc $c_{A,t} = \Psi(\mathrm{Id}_A) \in (A \otimes_R A)^{A\otimes_R A}$: pour tout $(a, b) \in A^2$,

$$\sum_i (ax_ib)\otimes y_i = \sum_i x_i \otimes (by_ia) = \sum_i (ay_ib)\otimes x_i = \sum_i y_i \otimes (bx_ia).$$

2.2 Le morphisme Trace

Soit M un A-module-A, et $m \in M$. On note $Tr_R^{A,t}(m) = \sum_i x_imy_i = \sum_i y_imx_i$. Vu les propriétés d'invariance de l'élément de Casimir, on a, pour tout $(a,b)\in A^2$,
$$a\mathrm{Tr}_R^{A,t}(m) = \mathrm{Tr}_R^{A,t}(m)a \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}_R^{A,t}(bm) = \mathrm{Tr}_R^{A,t}(mb).$$
On définit donc une application R-linéaire $\mathrm{Tr}_R^{A,t} : M \to M^A$, qui est même un morphisme de $Z(A)$-module.

En particulier, l'élément $\gamma_{A,t} = \mathrm{Tr}_R^{A,t}(1_A) = \sum_i x_iy_i$ est central dans A (a-t-il déjà un nom et/ou une notation ?).

De façon générale, pour $m \in M^A$, $\mathrm{Tr}_R^{A,t}(m) = \gamma_{A,t}m$. Si l'élément $\gamma_{A,t}$ est inversible dans A, le morphisme trace est donc surjectif de M sur M^A.

Si E et F sont deux A-modules, alors $\mathrm{Hom}_R(E,F)$ est un A-module-A, et $[\mathrm{Hom}_R(E,F)]^A = \mathrm{Hom}_A(E,F)$. Alors, pour $u \in \mathrm{Hom}_R(E,F)$, on a $\mathrm{Tr}_R^{A,t}(u) : e \mapsto \sum_i x_iu(y_ie)$.

Critère de Higman pour la projectivité, et théorème de Maschke

Soit P un A-module de type fini. P est projectif sur A si, et seulement si :

(i) P est projectif sur R ;

(ii) $Tr_R^A : \mathrm{End}_R(P) \to \mathrm{End}_A(P)$ est surjective (en fait $\mathrm{Id}_P \in \mathrm{im}\ Tr_{\mathcal{O}}^A$ suffit).

En effet, si ces propriétés sont vérifiées, alors choisissons un morphisme surjectif de A-modules $f : A^n \to P$. Comme P est R-projectif, il existe un morphisme de R-modules $g : P \to A^n$ tel que $f\circ g = \mathrm{Id}_P$. De plus, il existe $u \in \mathrm{End}_R(P)$ tel que $\mathrm{Tr}_R^A(u) = \mathrm{Id}_P$. Posons alors $g' = \mathrm{Tr}_R^A(g\circ u) \in \mathrm{Hom}_A(P, A^n)$. Alors, comme f est A-invariant, $f\circ g' = \mathrm{Tr}_R^A(f\circ g\circ u) = \mathrm{Tr}_R^A(u) = \mathrm{Id}_P$. Le A-module P est donc un facteur direct de A^n : c'est un A-module projectif.

Pour montrer la réciproque, il suffit de montrer que $Tr_R^A : \mathrm{End}_R(A) \to \mathrm{End}_A(A) \simeq A$ est surjective. Or pour $a \in A$, on sait que $\forall x \in A,\ xa = \sum_i t(y_ixa)x_i = \sum_i x_iu(y_ix)$, en notant $u : x \mapsto t(xa)1_A$. Ainsi $[x\mapsto xa] = \mathrm{Tr}_R^A(u)$, et le résultat est prouvé. Il se transmet sans problème aux facteurs directs.

En particulier, si l'élément $\gamma_{A,t}$ est inversible dans A, alors tout A-module est projectif donc l'algèbre A est semi-simple : c'est le théorème de Maschke.

Effet d'un changement de forme symétrisante

Si $t' : A \to R$ est une autre forme symétrisante, il existe un élément $\alpha \in A$, central et inversible, tel que $t' = t(\alpha\,\cdot)$. On en déduit le nouvel élément de Casimir $c_{A,t'} = \sum_i(\alpha^{-1}x_i)\otimes y_i = \sum_i x_i\otimes(\alpha^{-1}y_i)$. Il est clair que le morphisme $\mathrm{Tr}_R^{A,t'}$ est alors modifié.

Par contre, un objet comme $t(\gamma_{A,t})$, ou plus généralement $t(a\mathrm{Tr}_R^{A,t}(b))$ est indépendant du choix de la forme symétrisante t.

Application au calcul de la forme trace dans $\mathrm{End}_R(A)$

La trace sur $\mathrm{End}_R(A)$ est définie via l'isomorphisme avec $A\otimes_R A^*$ en posant, avec les notations précédentes, $\mathrm{tr}_A(u) = \sum_j f_j(z_j) = \sum_i t(x_iu(y_i)) = \sum_i t(u(x_i)y_i)$.

Un cas particulier important est celui de l'application $u : A \to A,\ x \mapsto axb$, autrement dit l'action régulière de $a\otimes b \in A\otimes_R A^{\mathrm{op}}$ sur A. Alors $\mathrm{tr}_A(u) = \sum_i t(x_iay_ib)$. En particulier, si a ou b est central dans A, $\mathrm{tr}_A(u) = t\left(\sum_i x_iy_i.ab\right)$.

2.3 Trace relative

Soient (A,t) et (B,t') deux $\mathbb{K}$-algèbres symétriques, et $\varphi : A \to B$ un morphisme d'algèbres. On suppose que φ fait de B un A-module projectif.

Alors, comme $t' : B \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire, il existe un unique morphisme de A-modules $t_0 : B \to A$ tel que $t' = t \circ t_0$. De plus, pour $(a, b) \in B^2$, $t'(ba) = t'(ab)$ donc $t(t_0(ab)) = t(t_0(ba))$. Par unicité du relèvement, t_0 est une fonction centrale sur B. On en déduit aussitôt que t_0 est un morphismes de A-modules-A.

Par ailleurs, si $f : B \to A$ est un morphisme de A-modules, alors $t \circ f : B \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}$ donc il existe un unique $b \in B$ tel que, pour tout $b' \in B$, $t \circ f(b') = t'(bb') = t \circ t_0(bb')$. Là encore, par unicité du relèvement, $f = t_0(b\,\cdot)$. L'application t_0 induit donc un isomorphisme entre B et $\mathrm{Hom}_A(B, A)$.

On en déduit l'existence d'un élément de Casimir «relatif» $c_{B,t'}^{A,t} = \sum_i x_i \otimes y_i \in B \otimes_A B$ tel que :

$$\forall (b, b') \in B^2, \quad t_0(bb') = \sum_i t_0(x_i b) t_0(y_i b').$$

Attention : l'anneau A n'est pas commutatif, donc on n'a sans doute pas, a priori, $c_{B,t'}^{A,t} = \sum_i y_i \otimes x_i$ (vérifier).

On en déduit immédiatement :

$$\forall b \in B^2, \quad b = \sum_i t_0(x_i b) y_i.$$

Dont on déduit que $c_{A,t}$ est invariant pour B agissant par l'extérieur (et aussi l'intérieur ?).

Si M est un B-module-B, on définit $Tr_{A,t}^{B,t'} : M^A \to M^B$, $m \mapsto \sum_i x_i m y_i$ (bien défini car $m \in M^A$ et $\sum_i x_i \otimes y_i \in B \otimes_A B$).

2.4 Caractères ordinaires, relations d'orthogonalité

On suppose maintenant que $R = \mathbb{K}$ est un corps, et que la $\mathbb{K}$-algèbre A est semi-simple : par exemple, $\gamma_{A,t}$ est inversible dans A.

Caractères

Si M est un A-module irréductible, la trace sur $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M)$ est définie via l'isomorphisme avec $M \otimes_{\mathbb{K}} M^*$ en posant, pour $u : M \to M, x \mapsto \sum_j f_j(x) z_j$, $\mathrm{tr}_M(u) = \sum_j f_j(z_j)$. C'est une forme symétrisante sur $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M)$.

On définit le caractère «ordinaire» $\chi_M : A \to \mathbb{K}$ en posant, pour $a \in A$, $\chi_M(a) = \mathrm{tr}_M(x \mapsto ax)$. La fonction χ_M est $\mathbb{K}$-linéaire et centrale sur l'algèbre A.

De plus, en notant $x_M = \dim_{\mathbb{K}} M$ le degré de la représentation irréductible M (noté n dans le premier paragraphe), on sait que $\chi_M(\varepsilon_M) = x_M$ et, pour $N \neq M$, $\chi_M(\varepsilon_N) = 0$. On dispose donc d'un morphisme surjectif de $\mathbb{K}$-algèbres $\omega_M : Z(A) \to \mathbb{K}$, $a \mapsto \frac{1}{x_M}\chi_M(a)$.

Forme symétrisante, éléments de Schur

Si M est un A-module irréductible, notons $\zeta_M = \chi_M^\vee$. Comme la forme χ_M est centrale, l'élément ζ_M est central.

De plus, pour $N \neq M$, $t(\zeta_M \varepsilon_N) = \chi_M(\varepsilon_N) = 0$, donc ζ_M est un multiple de ε_M. On appelle élément de Schur le scalaire s_M tel que $\zeta_M = s_M \varepsilon_M$.

En tant que A-module, on a $C_M \simeq M \otimes_{\mathbb{K}} M^* \simeq M^{x_M}$. Son caractère est donné, pour tout $a \in A$, par $\chi_{C_M}(a) = x_M \chi_M(a) = t(x_M \zeta_M a)$.

D'autre part, $C_M = A\varepsilon_M$ donc, pour tout $a \in A$, $\chi_{C_M}(a) = \chi_{\mathrm{reg}}(a \otimes \varepsilon_M) = t\left(\sum_i x_i y_i . \varepsilon_M a\right)$ (car ε_M est central).

Ainsi $x_M \zeta_M = \gamma_{A,t} \varepsilon_M$, d'où $s_M = \frac{\gamma_{A,t}}{x_M}$ (éclaircir le problème de l'inversibilité de x_M et $\gamma_{A,t}$).

Ainsi $\varepsilon_M = \frac{1}{s_M} \sum_i \chi_M(x_i) y_i$.

Relations d'orthogonalité

On sait que $\chi_M(\varepsilon_M) = x_M$, d'où :

$$\sum_i \chi_M(x_i) \chi_M(y_i) = \gamma_{A,t}.$$

D'autre part, pour $N \neq M$, $\chi_M(\varepsilon_N) = 0$, d'où :

$$\sum_i \chi_M(x_i)\chi_N(y_i) = 0.$$

Application pour $A = \mathbb{K}G$

L'algèbre $A = \mathbb{K}G$ est munie de la forme symétrisante $t : A \to \mathbb{K}$ définie par $t(\sum_g a_g.g) = a_1$.

L'élément de Casimir s'écrit, dans la base canonique de $A \otimes_{\mathbb{K}} A$, $c_{A,t} = \sum_g g \otimes g^{-1} = \sum_g g^{-1} \otimes g$.
En effet, pour $(a,b) \in A^2$, $t(ab) = \sum_g a_g b_{g^{-1}} = \sum_g t(g^{-1}a)t(gb)$.

On calcule $\gamma_{A,t} = \sum_g g^{-1}g = |G|$.

Ainsi, pour tout $M \in \mathscr{I}$, $\varepsilon_M = \frac{\chi_M}{|G|} \sum_g \chi_M(g^{-1})g$.

$$\sum_g \chi_M(g^{-1})\chi_M(g) = \gamma_{A,t} \quad \text{et, pour } N \neq M, \quad \sum_g \chi_M(g^{-1})\chi_N(g) = 0.$$

Quel lien avec $\dim_{\mathbb{K}}(M^* \otimes_A N)$ et $\dim_{\mathbb{K}}(M^* \otimes_A M)$?

3 Blocs de Brauer et matrice de décomposition

Soit p un nombre premier et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle muni d'une valuation discrète étendant la p-valuation sur $\mathbb{Q}$. Soit $\mathscr{O}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{K}$ pour cette valuation, $\mathfrak{m}$ son unique idéal premier/maximal, et $k = \mathscr{O}/\mathfrak{m}$.

Soit (A, t) une $\mathscr{O}$-algèbre symétrique. En particulier, le $\mathscr{O}$-module est projectif (c'est-à-dire libre car $\mathscr{O}$ est un anneau local) et de type fini.

On note $A_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \otimes_{\mathscr{O}} A$ et $A_k = k \otimes_{\mathscr{O}} A$. Alors t s'étend en une forme symétrisante $t_{\mathbb{K}} : A_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}$, et passe au quotient en une forme symétrisante $t_k : A_k \to k$.

On suppose les corps $\mathbb{K}$ et k «assez gros». Par exemple, si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors k l'est aussi.

On suppose l'algèbre $A_{\mathbb{K}}$ semi-simple, par exemple parce que $\gamma_{A,t}$ est inversible dans $A_{\mathbb{K}}$.

3.1 A-modules et A_k-modules

Soit P un A-module. Supposons P projectif, c'est-à-dire libre, sur $\mathscr{O}$.

D'après le critère de Higman, P est projectif sur A si, et seulement si, $Tr_{\mathscr{O}}^A : \mathrm{End}_{\mathscr{O}}(P) \to \mathrm{End}_A(P)$ est surjective. Or, par le lemme de Nakayama (?), $Tr_{\mathscr{O}}^A$ est surjective si, et seulement si, $Tr_k^{A_k} = k \otimes_{\mathscr{O}} Tr_{\mathscr{O}}^A$ l'est. On en déduit que P est A-projectif si, et seulement si, $k \otimes_{\mathscr{O}} P$ est A_k-projectif.

Le foncteur $P \mapsto k \otimes_{\mathscr{O}} P$ établit donc une équivalence de catégories additives entre les catégories de modules projectifs sur A et sur A_k, d'où un isomorphisme entre leurs groupes de Grothendieck $P(A)$ et $P(A_k)$. La bijectivité doit pouvoir se prouver en utilisant le relèvement des idempotents, même si Serre procède autrement.

Par ailleurs, tout idempotent central primitif $\bar{b}$ de A_k se relève en un unique idempotent central primitif de A.

3.2 Le triangle CDE

Si M est un $A_{\mathbb{K}}$-module, il existe dans M un sous-A-module E de type fini (non unique) tel que $M = \mathbb{K} \otimes_{\mathscr{O}} E$. La famille des k-modules irréductibles intervenant dans une suite de composition de $k \otimes_{\mathscr{O}} E$ est indépendante du choix de E. On a donc une application $d : R(A_{\mathbb{K}}) \to R(A_k)$ du groupe de Grothendieck de (la catégorie des modules de type fini sur) $A_{\mathbb{K}}$ dans celui de (...) A_k. Sa matrice D dans les bases canoniques est la *matrice de décomposition* de A.

Si P est un A_k-module projectif, on peut lui associer l'unique (à isomorphisme près) A-module P' tel que $P = k \otimes_{\mathscr{O}} P'$. Le $A_{\mathbb{K}}$-module $\mathbb{K} \otimes_{\mathscr{O}} P'$ se décompose en somme directe d'irréductibles : on définit ainsi une application $e : P(A_k) \to R(A_{\mathbb{K}})$, où $P(A_k)$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie des modules projectifs sur A. On note E sa matrice dans les bases canoniques.

L'application de Cartan définie plus haut vérifie clairement $c = de$, d'où $C = DE$.

Si M et N sont des A_k-modules irréductibles et P_M l'enveloppe projective de M, un morphisme de P_M dans N est nul sur le sous-module maximal $\mathrm{rad}(A)P_M$ de P_M, donc se factorise en un morphisme de $M = P_M/\mathrm{rad}(A)P_M$ dans N. Ainsi $\mathrm{Hom}_{A_k}(P_M, N) \simeq \mathrm{Hom}_{A_k}(M, N)$. Vu le lemme de Schur et comme k est assez gros, la forme $\dim_k \mathrm{Hom}_{A_k}(\cdot,\cdot)$ (on vérifie qu'elle est bien définie) établit donc une dualité parfaite entre les $\mathbb{Z}$-modules $P(A_k)$ et $R(A_k)$, les bases canoniques étant duales l'une de l'autre.

De même, comme $\mathbb{K}$ est assez gros, la forme $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{A_{\mathbb{K}}}(\cdot,\cdot)$ établit une dualité parfaite du $\mathbb{Z}$-modules $R(A_{\mathbb{K}})$ avec lui-même, la base canonique étant auto-duale.

Enfin, soit P un A_k-module projectif et M un $A_{\mathbb{K}}$-module quelconque. Il existe des A-modules P' et M', avec P' projectif sur A, tels que $P = k \otimes_{\mathscr{O}} P'$ et $M = k \otimes_{\mathscr{O}} M'$. Alors $\mathrm{Hom}_{A_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K} \otimes_{\mathscr{O}} P', M) = \mathbb{K} \otimes_{\mathscr{O}} \mathrm{Hom}_A(P', M')$ et $\mathrm{Hom}_{A_k}(P, k \otimes_{\mathscr{O}} M') = k \otimes_{\mathscr{O}} \mathrm{Hom}_A(P', M')$, c'est-à-dire, avec les notations de Serre,

$$\langle e(P), M \rangle_{\mathbb{K}} = \langle P, d(M) \rangle_k \,.$$

Les applications d et e sont duales l'une de l'autre. Comme les dualités sont parfaites, la matrice de e est la transposée de celle de d, et $C = D\,{}^tD$. En particulier, la matrice de Cartan est symétrique : si M et N sont deux représentations modulaires irréductibles de A, alors M apparaît dans une suite de composition de P_N autant de fois que N dans une suite de composition de P_M.

Comme la matrice D est à coefficient positif et que chacune de ses lignes et colonnes comporte au moins un coefficient non nul, on montre facilement que tout bloc de C provient d'un bloc de D.

Si b est un bloc de A et M un $A_{\mathbb{K}}$-module de type fini, on dira que M appartient à b si la décomposition $d(M)$ ne fait intervenir que des éléments de b. D'après ce qui précède, tout $A_{\mathbb{K}}$-module irréductible appartient à un unique bloc (démonstration plus conceptuelle ?).

3.3 Caractères modulaires

Peut-on les introduire sans référence à un groupe ? Sans doute pas, on les garde donc pour plus tard.

Références

[AlBr-1979] J. Alperin, M. Broué, *Local methods in block theory*, Ann. of Math. **110** (1979), p.143-157.

[Bra-1979] R. Brauer, *Theory of group characters* (notes de conférences de 1959), Lectures in mathematics, Kyoto University, 1979.

[Bro-1992] M. Broué, *Equivalence of blocks of group algebras*, Three lectures given at the International Conference on Representations of Algebras, Ottawa, 1992.

[Bro-2007] M. Broué, *Introduction à la théorie des représentations* (notes personnelles), cours de master à l'Université Paris 7, 2007.

[Bro-2009] M. Broué, *Notes sur la théorie des représentations*, non publié.

[Dade-1971] E.C. Dade, *Character theory pertaining to finite simple groups*, in *Finite simple groups* éd. par M. Powell et G. Higman, Academic Press, 1971, p.249-327.

[Gor-1980] D. Gorenstein, *Finite Groups*, 1968,1980, réimprimé par l'AMS (2000).

[Nav-1998] G. Navarro, *Characters and blocks of finite groups*, Cambridge University Press, 1998.

[Puig-2009] Ll. Puig, *Frobenius categories versus Brauer blocks : The Grothendieck group of the Frobenius category of a Brauer block*, Birkhauser, 2009.

[Ser-1967] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1967.

[The-1995] J. Thevenaz, *G-Algebras and Modular Representation Theory*, Oxford Univ. Press, 1995.