Problèmes de Mathématiques

MPSI

Erwan Biland

Lycée Stanislas, classe de MPSI 1, 2009/2010

Ce recueil réunit une partie des problèmes posés aux élèves de PCSI 1 puis MPSI 1, en temps libre ou en temps limité, depuis 2005. J'y puiserai les devoirs que vous aurez à traiter cette année en temps libre (par groupes de deux). C'est aussi un outil mis à votre disposition pour votre travail personnel, en particulier lors de la préparation des devoirs surveillés.

Malgré les nombreuses correction déjà effectuées, il subsiste certainement des erreurs d'énoncé ou d'orthographe... Je vous remercie par avance de me les signaler au fur et à mesure de leur découverte.

J'ai fait apparaître en italique, dans la table des matière ainsi que dans l'en-tête de chaque problème, les parties du cours qui y sont abordées.

J'ai aussi essayé, autant que possible, d'apprécier la difficulté de chaque problème en lui affectant un nombre d'étoiles ✻ compris entre zéro (très facile) et quatre (très difficile). Attention, dans un problème coté à trois étoiles (difficile), s'il est très progressif, les premières questions peuvent être, malgré tout, relativement faciles.

Bon courage !

Table des matières

Fonctions d'une variable

Arithmétique, dénombrement

Algèbre linéaire, dimension finie

Matrices, déterminant

Polynômes, fractions rationnelles

Intégration, primitives, approximation

Espaces vectoriels euclidiens, géométrie

Fonctions de plusieurs variables

Problème 1

Sommes de puissances de n entiers

[Récurrence, résolution de systèmes, polynômes]

Si n et d sont deux entiers positifs ou nuls, on note $S_{n,d} = \sum_{k=0}^{n} k^d = 0^d + 1^d + 2^d + \ldots + n^d$

1 - Préciser la valeur de $S_{0,d}$, pour tout $d \in \mathbb{N}$. *Attention, il y a un piège...*

2 - Déterminer les valeurs de $S_{n,0}$ et $S_{n,1}$ en fonction de n.

3 - Démontrer par récurrence sur l'entier n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n,2} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4 - On admet qu'il existe cinq nombres réels a, b, c, d, e tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n,3} = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e \quad (\star).$$

a) Déterminer ces cinq nombres. Vous devez en particulier démontrer qu'ils sont caractérisés de façon unique par la propriété $(\star)$.
[Vous serez probablement amenés à résoudre un système de 4 ou 5 équations avec le même nombre d'inconnues. Vous devrez présenter **très clairement** *ce système et les calculs permettant de le résoudre.]*
b) Factoriser autant que possible l'expression de $S_{n,3}$ ainsi obtenue.

5 - On cherche ici à exprimer $S_{n,4}$ en fonction de n, sans recourir à la résolution d'un système.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. A l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer la somme $A = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^5$ en fonction des $S_{n,d}$, pour $d \in [\![0, 5]\!]$.
b) Démontrer par ailleurs que $A = S_{m,5}$, pour un entier m à préciser.
c) En comparant ces deux expressions de A, obtenir une expression de $S_{n,4}$ en fonction de $(n+1)^5$ et des $S_{n,d}$, pour $d \in [\![0, 3]\!]$.
d) En déduire, grâce à la question **1**, une expression de $S_{n,4}$ en fonction de n, que l'on factorisera autant que possible.

6 - Généralisation ?

Problème 2 ✻

Calcul de sommes et de produits

[Suites numériques, fonctions trigonométriques]

A - Séries géométriques et application

1 - Soit q un nombre complexe différent de 1, et $n \in \mathbb{N}$ un entier positif ou nul. Rappeler, sans démonstration, la valeur de $A_n = \sum_{k=0}^{n} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.

2 - Soient a et b deux nombres réels fixés. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les nombres réels :

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) = \cos a + \cos(a+b) + \ldots + \cos(a+nb) \\ S_n &= \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb) = \sin a + \sin(a+b) + \ldots + \sin(a+nb) \end{aligned}$$

Calculer, en fonction de l'entier n, les valeurs de C_n et S_n.
[Indication : on pourra poser $E_n = C_n + iS_n$, et calculer E_n en utilisant le **1***, sans oublier le cas $b \equiv 0$ $[2\pi]$.]*

On poussera les calculs jusqu'à obtenir $C_n = \dfrac{\sin \frac{(n+1)b}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \cos(a + \dfrac{nb}{2})$, et une expression du même type pour S_n.

B - Un produit astucieux

1 - En étudiant la fonction «sinh» au voisinage de 0, déterminer $\lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{\sinh t}{t}$.

2 - Soit x un nombre réel non nul. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \cosh \frac{x}{2^k} = \cosh x \cdot \cosh \frac{x}{2} \cdot \ldots \cdot \cosh \frac{x}{2^n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P_n \sinh \frac{x}{2^n}$. En déduire une expression simple de P_n.

3 - Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite réelle que l'on déterminera.

Problème 3
Ceci n'est pas le triangle de Pascal

[Techniques de calcul]

On considère le triangle numérique suivant, où chaque nombre est obtenu en additionnant les deux nombres de la ligne supérieure entre lesquels il est placé :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \dots \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & \dots & \\
& & 4 & & 8 & & 12 & & 16 & & \dots & & \\
& & & 12 & & 20 & & 28 & & \dots & & & \\
& & & & 32 & & 48 & & \dots & & & & \\
& & & & & 80 & & \dots & & & & &
\end{array}$$

1 - Calculer le nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordre 7.
On demande une réponse sans démonstration.

2 - Soit $(a_k)_k$ une suite de nombres et soit $n \in \mathbb{N}$. On construit, selon le modèle précédent, le triangle numérique d'ordre n, obtenu en mettant sur la première ligne les nombres :

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$$

On notera $x_j^{(i)}$ le j-ème nombre de la i-ème ligne du triangle (en commençant la numérotation à 0). Ainsi $x_0^{(0)} = a_0$, $x_1^{(0)} = a_1$, $x_0^{(1)} = a_0 + a_1$, *etc.*

Le nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordre n est donc $x_0^{(n)}$.

a) Montrer l'égalité : $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{k+1}$

b) Montrer, par récurrence que, pour tout couple (n, j) d'entiers naturels,

$$x_j^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{k+j}.$$

c) En déduire la valeur du nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordre n de la première question.

FIN DU SUJET

Problème 4

Calcul de $\cos\dfrac{\pi}{17}$

[Trigonométrie]

L'objet de ce problème est d'exprimer $\cos\dfrac{\pi}{17}$ à l'aide de radicaux.

1. On pose $A = (1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} + 8\sqrt{34+2\sqrt{17}}$.
   (a) Déterminer le signe de A.
   (b) Calculer A^2 et mettre le résultat sous la forme $p + q\sqrt{17}$, avec p et q entiers.
   En déduire une expression simple de A.
2. **Un lemme utile.**
   (a) Montrer que si deux nombres réels α et β ont pour somme S et pour produit P, ces deux nombres sont racines de l'équation d'inconnue x :
   $$x^2 - S.x + P = 0$$
   (b) Trouver tous les couples de réels ayant pour somme $\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$ et pour produit $-\dfrac{1}{4}$.
3. **Un calcul de sommes trigonométriques.** On désigne dans cette question par a et h deux réels, et n un entier naturel non nul. On pose :
   $$\Sigma_1(a,h,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kh) \ ; \qquad \text{et} \qquad \Sigma_2(a,h,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kh).$$
   (a) On suppose $\sin\frac{h}{2} = 0$. Calculer $\Sigma_1(a,h,n)$ et $\Sigma_2(a,h,n)$ en fonction de a et de n.
   (b) On suppose $\sin\frac{h}{2} \neq 0$. Calculer $\Sigma_1(a,h,n)$ et $\Sigma_2(a,h,n)$ en fonction de a et de n. On mettra le résultat final sous la forme :
   $$\Sigma_1(a,h,n) = \frac{\sin\frac{nh}{2}.\cos(...?...)}{\sin\frac{h}{2}}.$$
4. Dans la suite du problème, on pose $\boxed{\theta = \dfrac{\pi}{17}}$.
   En outre, on pose :
   $$\begin{cases} x_1 &= \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta \ ; \\ x_2 &= \cos\theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta + \cos 15\theta. \end{cases}$$
   (a) Comparer $\cos\theta$ et $\cos 16\theta$. Comparer de même $\sin\theta$ et $\sin 16\theta$.
   (b) Montrer que $x_1 > 0$.
   (c) Calculer $(x_1 + x_2)$: après simplification, on trouvera un rationnel très simple.
   (d) Dans cette question, on cherche une expression simple du produit $x_1.x_2$.
      i. Développer le produit $x_1.x_2$.
      ii. Simplifier cette expression en utilisant la formule de linéarisation d'un produit de cosinus.
      iii. Montrer qu'il existe une relation entre $x_1.x_2$ et $x_1 + x_2$ du type :
      $$x_1.x_2 = k.(x_1 + x_2) \quad \text{où } k \text{ est un entier relatif à préciser.}$$

iv. En déduire que $x_1.x_2$ est un entier relatif que l'on précisera.

(e) Déduire de ce qui précède des expressions de x_1 et x_2 à l'aide de racines carrés.

(f) On pose à présent :

$$\begin{cases} y_1 & = \cos 3\theta + \cos 5\theta \ ; \\ y_2 & = \cos 7\theta + \cos 11\theta \ ; \\ y_3 & = \cos \theta + \cos 13\theta \ ; \\ y_4 & = \cos 9\theta + \cos 15\theta. \end{cases}$$

i. Calculer en s'inspirant de la question précédente, les produits $y_1.y_2$ et $y_3.y_4$.

ii. En déduire des expressions des quatre nombres y_1, y_2, y_3 et y_4 àă l'aide de racines carrées, éventuellement superposées.

(g) Exprimer y_1 sous forme d'un produit de cosinus. En déduire une expression de $\cos\theta$ à l'aide de racines carrés.

Cette méthode fut élaborée en 1796 par Johann Carl Friedrich Gauss alors âgé de 19 ans seulement ! A partir de ce résultat, il est facile d'en déduire qu'un polygone régulier à 17 côtés est constructible à la règle et au compas. En fait, Gauss caractérisa presque complètement tous les polygones réguliers constructibles uniquement à la règle et au compas (Théorème de Gauss-Wantzel), et résolut de cette façon un problème posé par les mathématiciens de l'Antiquité grecque. Gauss était si satisfait de ce résultat qu'il demanda qu'un polygone régulier de 17 côtés soit gravé sur son tombeau.

Problème 5 **

Minimum d'une somme de distances

[Matrices, déterminant, nombres complexes, géométrie]

1 - Inégalité triangulaire généralisée

a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, $|x+y| \leqslant |x|+|y|$, avec égalité si, et seulement si, $\bar{x}y \in \mathbb{R}^+$.

b) Soit $n \geqslant 2$ un entier et $x_1, \ldots, x_n$ des complexes. Montrer que $|x_1+\ldots+x_n| \leqslant |x_1|+\ldots+|x_n|$.

c) Montrer de plus que $|x_1+\ldots+x_n| = |x_1|+\ldots+|x_n| \;\Leftrightarrow\; [\,\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\; \bar{x}_i x_j \in \mathbb{R}^+\,]$.

2 - Application

Soit $n \geqslant 2$ un entier, et $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes non nuls.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $a_k = \dfrac{z_k}{|z_k|}$, et on suppose $a_1+a_2+\ldots+a_n = 0$ $(\star)$.

a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $S(z) = \bar{a}_1(z_1-z)+\ldots+\bar{a}_n(z_n-z)$. Montrer que $S(z)$ est un nombre réel positif indépendant de z, que l'on précisera en fonction de $z_1, \ldots, z_n$.

b) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z_1|+\ldots+|z_n| \leqslant |z_1-z|+\ldots+|z_n-z|$ $(\star\star)$.

c) Montrer de plus que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|z_1|+\ldots+|z_n| = |z_1-z|+\ldots+|z_n-z| \;\Leftrightarrow [\,\forall k \in [\![1,n]\!],\; \bar{a}_k(z_k-z) \in \mathbb{R}^+\,].$$

3 - Interprétation géométrique Dans le plan complexe, on note $M_1, \ldots, M_n$ les points d'affixes $z_1, \ldots, z_n$, et N un point d'affixe z. On note O le point d'affixe nulle.

a) Interpréter géométriquement les résultats de la question **2**. On pourra faire intervenir la fonction $f : N \mapsto NM_1+\ldots+NM_n$.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points où la fonction f atteint son minimum. On distinguera suivant que les points $M_1, \ldots, M_n$ sont alignés ou non.

c) Préciser l'ensemble $\mathscr{E}$ dans le cas $n=2$.

d) Dans le cas $n=3$, montrer qu'on a nécessairement $a_3 = ja_2 = j^2a_1$ ou $a_3 = j^2a_2 = ja_1$. En déduire l'ensemble $\mathscr{E}$.

e) ♣ On se donne trois points A, B, C quelconques dans le plan, et on considère l'application $f : N \mapsto NA+NB+NC$. Expliquer comment on peut construire, à la règle et au compas, le point ou l'ensemble des points où la fonction f atteint son minimum.

On sera amené(e) à distinguer au moins trois cas, dont deux ne peuvent pas se traiter à l'aide des questions précédentes. On n'hésitera pas à appuyer son propos sur des dessins clairs et lisibles.

3 - Application à des encadrements

Dans cette question, on choisit, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $z_k = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, et $z=1$.

a) Ecrire, en justifiant son emploi, l'inégalité $(\star\star)$, et indiquer dans quel cas c'est une égalité.

b) En déduire les encadrements :

$$\frac{n}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} \leqslant n \quad (1) \qquad ; \qquad \frac{1}{n} \leqslant \tan\frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{2}{n} \quad (2).$$

Problème 6
Cocyclicité dans le plan complexe

[Nombres complexes, géométrie plane]

Dans ce problème, on identifie l'ensemble $\mathbb{C}$ au plan géométrique $\mathbb{R}^2$. Dans ce plan, les angles considérés seront toujours orientés. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

On fixe une fois pour toutes quatre points **distincts** A, B, C et D du plan, d'affixes respectives a, b, c et d dans $\mathbb{C}$. On appelle birapport des nombres complexes a, b, c et d le nombre complexe :

$$[a,b,c,d] = \frac{a-b}{c-b} \div \frac{a-d}{c-d} = \frac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)}.$$

On dit par ailleurs que les points A, B, C et D sont cocycliques s'ils appartiennent à un même cercle ou à une même droite du plan.

L'objet de ce problème est de montrer que A, B, C et D sont cocycliques si, et seulement si, le birapport $[a,b,c,d]$ est réel. On en déduira le fameux théorème «des angles inscrits».

1 - Condition nécessaire

a) Donner, sans démonstration, une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\frac{a-b}{c-b}$. En déduire une condition simple pour que les points A, B et C soient alignés.

b) Montrer que, si les points A, B, C et D sont alignés, alors $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}$.

c) On suppose, pour cette question seulement, que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$, de centre Ω (d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$) et de rayon $r > 0$. Montrer que $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}$.
[On pourra introduire des arguments α, β, γ, δ des nombres $a-\omega$, $b-\omega$, $c-\omega$, $d-\omega$.]

d) Déduire de ce qui précède que, si les points A, B, C et D sont cocycliques, alors $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ADC}\ [\pi]$.

2 - Condition suffisante : quelques cas particuliers

a) On suppose ici que a, b et c sont réels. Montrer que, si $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}$, alors $d \in \mathbb{R}$.

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on note $f(z) = i\frac{1+z}{1-z}$.

b) Calculer la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de z, et en déduire que : $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$.

c) Si a, b, c et d sont différents de 1, montrer que $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a,b,c,d]$.

d) On suppose encore que a, b, c et d sont tous différents de 1. Déduire des questions précédentes que, si a, b, c appartiennent à $\mathbb{U}$ et si le birapport $[a,b,c,d]$ est réel, alors $d \in \mathbb{U}$.

Que dire si a, b, c ou d vaut 1 ?

3 - Condition suffisante : cas général

a) Supposons que A, B et C sont alignés. Montrer que, si $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}$, alors le point D est également sur la même droite.

b) On suppose désormais les points A, B et C non alignés. Que dire de l'ensemble des points équidistants de A et B ? En déduire qu'il existe un unique point Ω équidistant de A, B et C.
[On acceptera une démonstration géométrique.]

On note ω l'affixe de Ω et $r = |a-\omega|$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \frac{z-\omega}{r}$.

c) Soit $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z-a| = r\}$. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z \in \Gamma \Leftrightarrow g(z) \in \mathbb{U}$.

d) Vérifier que $[g(a), g(b), g(c), g(d)] = [a,b,c,d]$.

e) En déduire que, si $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}$, alors les points A, B, C et D sont sur un même cercle.

On a ainsi prouvé, dans tous les cas, que : $[a,b,c,d] \in \mathbb{R} \Rightarrow A, B, C, D$ *cocycliques.*

4 - Théorème des angles inscrits

Achever la démonstration du théorème des angles inscrits en montrant, à l'aide du résultat de la question **3**, que, si $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ADC}\ [\pi]$, alors les points A, B, C et D sont cocycliques.

Problème 7 ✻

Autour d'une suite de fonctions

[Fonctions usuelles, suites numériques]

Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application

$$f_n : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}(\ln x)^n \end{array}.$$

On notera $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (on prendre comme unité 2 cm).

1 - On fixe (provisoirement) l'entier $n \in \mathbb{N}^*$. Dans l'étude de la fonction f_n, on sera bien sûr amené à discuter selon la valeur du paramètre n.

a) Etudier le comportement de l'application f_n aux voisinages de 0 et de $+\infty$, ainsi que le comportement au voisinage de $+\infty$ de l'application $x \mapsto \dfrac{f_n(x)}{x}$.

b) Etudier les variations de l'application f_n. Préciser tous les points où la courbe $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale ou verticale.

c) Etudier le signe des applications $f_{n+1} - f_n$ et $f_{n+2} - f_n$. En déduire les points d'intersections et les positions respectives des courbes $\mathscr{C}_n$, $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_{n+2}$.

d) Sur un même graphique (unité : 3cm), donner l'allure, à l'aide des questions précédentes, des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$.

2 - Soit maintenant $x \in [1, +\infty[$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = f_n(x)$. Etudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3 - a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $\alpha_n \in [1, +\infty[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 1$.

b) Montrer que de plus : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n \in]1, e[$.

c) En utilisant la question **1c)**, montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

d) En utilisant la question **2**, montrer que $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$.

4 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e f_n(t)dt$.

a) Etudier le signe et la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on ne cherchera pas à calculer l'intégrale !).

b) Grâce à une intégration par parties, établir une relation entre I_n et I_{n+1}.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{e\sqrt{e}}{n+\frac{5}{2}} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e\sqrt{e}}{n+1}$.

d) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite en $+\infty$ (que l'on précisera).

Problème 8 ✻

Etude d'une fonction

[Fonctions trigonométriques]

Préliminaires...

1 - Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto t \ln t$.

a) Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On établira en particulier l'existence d'un minimum de la fonction g, en précisant sa valeur et le point où il est atteint.

b) Etudier les limites de g en 0 et en $+\infty$. Préciser les tangentes éventuelles à la courbe de g en 0 et en 1, ainsi que son allure en $+\infty$ (asymptote, branche parabolique...).

[On pourra rappeler sans démonstration et utiliser le résultat du cours sur $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln y}{y}$*.]*

c) Donner une allure de la courbe représentative de g, à l'aide uniquement des résultats des deux questions précédentes.

2 - Soit $h :]0, 1[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\ln(4-t)}{\ln t}$.

a) Justifier que h est bien définie et dérivable sur $]0, 1[$. Calculer sa dérivée.

b) A l'aide de la question 1, montrer que $\forall t \in]0, 1[$, $h'(t) < 0$.

c) En déduire le sens de variation, sur l'intervalle $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$, de la fonction $k : x \mapsto \exp(h(4\cos^2 x))$.

[On veillera à rédiger très précisément le raisonnement, en n'oubliant pas de justifier la bonne définition de k.]

Vif du sujet

On considère la fonction f d'une variable réelle et à valeurs réelle définie par :

$$f(x) = \left(\sqrt{1-\sin(2x)} + \sqrt{1+\sin(2x)}\right)^{\frac{1}{\ln|2\cos x|}}.$$

3 - a) Pour quelles valeurs du réel x l'expression définissant $f(x)$ a-t-elle un sens ? On notera D l'ensemble de ces valeurs.

b) Etudier la parité et la périodicité de la fonction f.

4 - a) Démontrer que, pour tout réel x, on a : $\sqrt{1-\sin(2x)} = |\sin x - \cos x|$.

b) Trouver une expression de $f(x)$ plus simple pour $x \in D \cap [0, \frac{\pi}{2}]$.

[On sera amener à donner différentes expression suivant la valeur de x.]

5 - a) Etudier les variations et les limites de f sur l'ensemble $D \cap [0, \frac{\pi}{2}]$.

[On pourra être amené à utiliser la question 2].

b) Donner une représentation graphique de f. On se placera dans un repère orthogonal direct, avec pour unité 3 cm sur l'axe des abscisse, et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

[Il est demandé une allure de la courbe, tracée très proprement, avec indication des asymptotes éventuelles. Mais vous n'êtes pas tenus à une précision inaccessible sans calculatrice.]

Problème 9
Fonctions polynomiales de Tchebitchev

[Fonctions usuelles, équations]

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On considère la fonction f_n d'une variable réelle définie par $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

1 - Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f_n, qu'on notera D.

2 - Etudier, en fonction de n, la parité de la fonction f_n.

3 - Montrer que, pour tout réel $\theta \in [-\pi, \pi]$, $f_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
L'égalité précédente est-elle encore vraie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$?

4 - Exprimer en fonction du réel $x \in D$, le plus simplement possible et sans utiliser les fonctions cos et arccos, les réels $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, et $f_4(x)$.
On pourra poser $\theta = \arccos x$.

5 - Ecrire $\cos(n\theta) + \cos((n+2)\theta)$ comme un produit. En déduire une relation, pour tout $x \in D$, entre $f_n(x)$, $f_{n+1}(x)$, $f_{n+2}(x)$ et x.

6 - Montrer que, sur une partie D' de D que l'on précisera, la fonction f_n est dérivable. Calculer sa dérivée en tout point $x \in D'$.

7 - Etudier $\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(n\theta)-1}{\cos\theta - 1}$. En déduire que la fonction f_n est dérivable en 1, et calculer $f_n'(1)$. Que dire de f_n en -1 ?

8 - Résoudre les équations $f_n(x) = 0$ et $f_n'(x) = 0$.

9 - On fixe pour cette question $n = 5$. Dresser un tableau de variations de f_5, et donner une allure, aussi précise que possible, de son graphe (unité : 5 cm).

1 - 0 (bonus) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est une fonction polynomiale.
Plus précisément, en notant $p = E(\frac{n}{2})$, montrer qu'il existe des entiers positifs $a_0, \ldots, a_p$ tels que, pour tout $x \in D$,

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i a_i x^{n-2i}.$$

(On exprimera a_i en fonction des entiers n, p et i sous forme d'une somme faisant intervenir des coefficients binomiaux.)

Problème 10
Une transformation sur les fonctions

[Fonctions usuelles]

Notations

Soit X une partie de $\mathbb{R}$, et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout réel m, on définit la fonction :

$$\varphi_{m,f} : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto mx - f(x).$$

On dit que la fonction φ_m, f atteint un maximum sur X s'il existe $x_0 \in X$ tel que :

$$\forall x \in X,\ \varphi_{m,f}(x) \leqslant \varphi_{m,f}(x_0).$$

On note alors $\max[\varphi_{m,f}] = \varphi_{m,f}(x_0)$, et on dit que ce maximum est atteint au point x_0.

On note X^o l'ensemble des réels m tels que la fonction $\varphi_{m,f}$ atteigne un maximum sur X.

Pour tout $m \in X^o$, on note $f^o(m) = \max[\varphi_{m,f}] = \max\{mx - f(x)\ ;\ x \in X\}$.

On définit ainsi une partie X^o de $\mathbb{R}$, et une fonction $f^o : X^o \to \mathbb{R}$.

Par le même procédé, on pourra associer à la fonction $f^o : X^o \to \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ notée X^{oo} et une fonction $f^{oo} : X^{oo} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in X^{oo},\quad f^{oo}(x) = \max\{xm - f^o(m)\ ;\ m \in X^o\}.$$

1 - Premiers exemples

a) On choisit ici $X = \{-1, 1\}$, et $f : X \to \mathbb{R}$ la fonction nulle. Déterminer X^o et f^o.

b) On choisit maintenant $Y = \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$. Déterminer Y^o et g^o.

c) On choisit $Z = \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^2}{2}$. Déterminer Z^o et g^o.

2 - Quelques propriétés de symétrie

Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction, et a un réel fixé.

a) On suppose, pour cette question seulement, que X est une partie de $\mathbb{R}$ centrée en 0, et que f est une fonction paire. Pour $m \in \mathbb{R}$, exprimer la fonction $\varphi_{-m,f}$ à l'aide de $\varphi_{m,f}$. En déduire que l'ensemble X^o est centré en 0, et que la fonction f^o est paire.

b) On suppose maintenant que, pour tout $x \in X$, $a - x \in X$ et $f(a-x) = f(x)$. Que peut-on dire de l'ensemble X^o et de la fonction f^o ?

c) On note $Y = \{-x\ ;\ x \in X\}$ et $g : Y \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(-x)$. Comparer X^o et Y^o, f^o et g^o.

d) On note $Z = \{x + a\ ;\ x \in X\}$ et $h : Z \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x-a)$. Comparer X^o et Z^o, f^o et h^o.

e) On note $T = X$ et $k : T \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + ax$. Comparer X^o et T^o, f^o et k^o.

3 - Transformées successives d'une fonction strictement convexe

Soient a et b deux réels, avec $a < b$; on pose $X = [a, b]$. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que : $\forall x \in X,\ f''(x) > 0$. On dit que f est strictement convexe sur le segment $[a, b]$.

a) Montrer que la dérivée de f établit une bijection du segment $[a, b]$ sur un segment $[\alpha, \beta]$ (avec $\alpha < \beta$). On notera u la bijection réciproque.

b) Soit m un réel quelconque. En étudiant les variations de $\varphi_{m,f}$, montrer que $m \in X^o$, puis déterminer le réel $f^o(m)$. *[On sera amené-e à distinguer des cas ; pour $m \in [\alpha, \beta]$, on exprimera $f^o(m)$ à l'aide des fonctions f et u.]*

c) Montrer que la restriction de f^o au segment $[\alpha, \beta]$ est dérivable, puis calculer sa dérivée. En déduire que f^o est une fonction strictement convexe sur ce segment.

d) Déterminer l'ensemble X^{oo} et la fonction f^{oo}. Comparer avec X et f.

4 - Un dernier exemple

On choisit ici $X =]0, 1]$ et $f :]0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \ln x$.

a) Déterminer X^o et f^o. **b)** Représenter les fonctions f et f^o, sur deux dessins (échelle 3 cm).

Problème 11

Etude d'une application

[Ensembles et applications]

On fixe, pour tout ce problème, deux parties A et B de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Rappelons qu'on note $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$, et $\varnothing$ l'ensemble vide.

Si X est une partie de $\mathbb{R}$, on note $f(X) = (X \cap A) \cup B$.
On définit ainsi une application $f : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

0 - Montrer que, si X et Y sont deux parties de $\mathbb{R}$, alors :

(i) $X \cap Y = X \quad \Leftrightarrow \quad X \subset Y$;

(ii) $X \cup Y = X \quad \Leftrightarrow \quad Y \subset X$.

1 - a) On suppose, pour cette question, $A = \varnothing$. Calculer $f(X)$ pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$.

b) Même question si $B = E$. Que remarque-t-on, dans ces deux cas particuliers ?

c) Calculer, dans le cas général, $f(\varnothing)$, $f(A)$, $f(B)$ et $f(E)$.

Ces résultats pourront être utilisés dans la suite du problème.

2 - a) Montrer que la fonction f est croissante au sens de l'inclusion, c'est-à-dire que, pour X et X' deux parties de $\mathbb{R}$, $X \subset X' \;\Rightarrow\; f(X) \subset f(X')$.

b) Soit Y une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que les propositions suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) Y admet un antécédent dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ par la fonction f ;

(ii) $B \subset Y \subset A \cup B$;

(iii) $f(Y) = Y$.

3 - a) Résoudre l'équation $f(X) = A$ (où l'inconnue X est une partie de $\mathbb{R}$).
On sera amené-e à distinguer des cas, à l'aide de la question précédente.

b) Résoudre l'équation $f(X) = B$.

4 - a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les parties A et B pour que la fonction f soit constante.

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les parties A et B pour que la fonction f soit surjective.

c) Démontrer que cette dernière est aussi une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

5 - a) Que dire, dans le cas général, de la fonction $f \circ f$?

b) Soit E un ensemble quelconque, et $g : E \to E$ une fonction *idempotente*, c'est-à-dire telle que $g \circ g = g$. Montrer que les propositions suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) g est injective ;

(ii) g est surjective ;

(iii) g est la fonction identité de F.

Problème 12 **

Fonctions caractéristiques de parties

[Ensembles, applications]

Soit E un ensemble. Pour une partie quelconque A de E, on définit la fonction caractéristique de A, $\varphi_A : E \to \{0,1\}$, en posant, pour tout $x \in E$:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

1 - Soient A et B deux parties de E. On note $\bar{A}$ et $\bar{B}$ leurs complémentaires dans E.
a) Montrer que, pour tout $x \in E$, $\varphi_{\bar{A}}(x) = 1 - \varphi_A(x)$ et $\varphi_{A\cap B}(x) = \varphi_A(x)\varphi_B(x)$.
b) En déduire des expressions, à l'aide des fonctions caractéristiques φ_A et φ_B, des fonctions caractéristiques $\varphi_{A\cup B}$, $\varphi_{A\setminus B}$ et $\varphi_{A\Delta B}$.

2 - a) Soient A et B deux parties de E. Montrer que : $\varphi_A = \varphi_B \quad \Leftrightarrow \quad A = B$.
b) On note $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{F}(E,\{0,1\}) \\ A & \mapsto & \varphi_A \end{array}$. Montrer que l'application Φ est bijective.
On veillera à bien comprendre ce que signifient les affirmations «Φ est injective» et surtout «Φ est surjective».

3 - Soit F un deuxième ensemble, $f : E \to F$ une application, et B une partie de F. On note $\psi_B : F \to \{0,1\}$ la fonction caractéristique de la partie B. Montrer que la fonction caractéristique de l'image réciproque de B par f est :

$$\varphi_{f^{-1}(B)} = \psi_B \circ f.$$

De même, on veillera à bien comprendre ce que signifie l'égalité de deux fonctions.

Problème 13 *

Borne supérieure dans $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$

[Ensembles, relations d'ordre]

On rappelle que, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de partie de $\mathbb{N}$, on note $\bigcup_{i\in I} A_i$ sa réunion, et $\bigcap_{i\in I} A_i$ son intersection.

On note $E = \mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties **finies** de $\mathbb{N}$.

1 - a) Montrer que la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur E.
(On rappelle qu'une relation d'ordre est une relation réflexive, transitive et antisymétrique.)

b) La relation d'ordre $\subset$ est-elle totale (on justifiera la réponse) ?

2 - On note $A_1 = \{0; 4\}$, $A_2 = \{4; 5\}$, $A_3 = \{0; 2; 4\}$ et $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$.

a) Soit X un élément de E. Ecrire, à l'aide de quantificateurs, la propriété «X est un minorant de la partie $\mathscr{A}$ pour l'ordre $\subset$» et sa négation.

b) Montrer que la partie $\mathscr{A}$ n'admet pas de plus petit élément.

c) Déterminer l'ensemble des minorants de la partie $\mathscr{A}$ dans E.

d) Démontrer que la partie $\mathscr{A}$ admet dans E, pour l'ordre $\subset$, une borne inférieure que l'on précisera.
Indication : on pourra remarquer que cette borne inférieure X est «la plus grande partie finie de $\mathbb{N}$ contenue dans A_1, A_2 et A_3».

e) Donner, sans démonstration, la borne supérieure de la partie $\mathscr{A}$ pour l'ordre $\subset$.

3 - a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_n$ des parties finies de $\mathbb{N}$, et $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ une partie finie non vide de E. Démontrer que la partie $\mathscr{A}$ possède une borne supérieure que l'on précisera.

b) Soit I un ensemble quelconque, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties finies de $\mathbb{N}$, et $\mathscr{A} = \{A_i\ ;\ i \in I\}$ une partie quelconque de E. Démontrer que la partie $\mathscr{A}$ possède une borne inférieure que l'on précisera.

c) Montrer qu'il existe au moins une partie de E qui n'admet pas de borne supérieure dans E. L'ensemble ordonné $(E, \subset)$ vérifie-t-il l'«axiome de la borne supérieure» ?

Problème 14
Etude de deux groupes isomorphes

[Ensembles et fonctions]

1 - Un produit semi-direct

Soit l'ensemble $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On munit G de la loi $\star$ définie par :

$$\forall (x, y) \in G \quad \forall (x', y') \in G \quad (x, y) \star (x', y') = (xx', y + xy')$$

a) Montrer que $\star$ est une loi de composition interne sur G, et qu'elle admet un élément neutre dans G, que l'on déterminera.
b) Montrer que $(G, \star)$ est un groupe. S'agit-il d'un groupe abélien ?
c) Soit $H = \mathbb{R}^* \times \{0\}$ et $K = \{1\} \times \mathbb{R}$, vus commes des parties de G. Montrer que H et K sont des sous-groupes de G.

2 - Les transformations affines de $\mathbb{R}$

On note $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des permutations de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des applications bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
a) Montrer que $(\mathscr{S}(\mathbb{R}), \circ)$ est un groupe.
On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application affine si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad f(tx + (1 - t)y) = tf(x) + (1 - t)f(y).$$

On note $Aff(\mathbb{R})$ l'ensemble des transformations affines de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $(Aff(\mathbb{R}), \circ)$ est un groupe. [On pourra montrer que c'est un sous-groupe de $(\mathscr{S}(\mathbb{R}), \circ)$.]

3 - Un isomorphisme

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f_{a,b}(x) = ax + b$.
a) Montrer que $f_{a,b}$ est une application affine. A quelle condition est-elle bijective ?
b) Montrer que l'application $F : G \to Aff(\mathbb{R})$ définie par $F(a, b) = f_{a,b}$ est un morphisme de groupes.
c) Montrer enfin que F est un isomorphisme de groupes. En déduire que $Aff(\mathbb{R})$ n'est pas un groupe abélien.

4 - Les automorphismes intérieurs de G

a) Soit $g \in G$, et $\varphi_g : G \to G$ définie par $\varphi_g(h) = g \star h \star g^{-1}$ (on note g^{-1} le symétrique de g pour $\star$). Montrer que φ_g est un endomorphisme du groupe G, puis qu'il est bijectif (on donnera l'automorphisme réciproque).
b) Montrer que le sous-groupe K est stable par φ_g, c'est-à-dire que $\varphi_g(K) \subset K$. Qu'en est-il de H ? On notera $\tilde{\varphi}_g$ l'endomorphisme de K induit par φ_g.
c) Montrer qu'en posant, pour $h \in H$, $\Phi(h) = \tilde{\varphi}_h$, on définit un morphisme de groupes de $(H, \star)$ dans le groupe $(Aut(K), \circ)$ des automorphismes (endomorphismes bijectifs) du groupe K.
Bonus : Φ est-il un isomorphisme ?

Problème 15

Produit semi-direct

[Groupes]

Soit $(G, \star)$ un groupe. On note e son élément neutre, et g^{-1} le symétrique d'un élément $g \in G$.
Soient H et K deux sous-groupes de G.
On dit que le sous-groupe H est distingué si, pour tout $h \in H$ et $g \in G$, on a $g \star h \star g^{-1} \in H$.
On note $H \star K = \{h \star k\,;\ h \in H \text{ et } k \in K\}$.
Enfin, on dit que G est le produit semi-direct des sous-groupes H et K si, et seulement si :

$$\begin{cases} H \text{ est un sous-groupe distingué de } G\,; \\ H \cap K = \{e\}\,; \\ H \star K = G. \end{cases}$$

0 - Montrer que, si G est un groupe abélien, alors tout sous-groupe de G est distingué.
Dans la suite, on ne suppose bien sûr pas le groupe G abélien.

1 - On suppose ici que le sous-groupe H est distingué.

a) Montrer que $H \star K = K \star H$.

b) En déduire que $H \star K$ est un sous-groupe de G.

2 - On suppose maintenant que G est le produit semi-direct des sous-groupes H et K.

a) Déterminer tous les couples $(h, k) \in H \times K$ tels que $h \star k = e$.

b) Montrer que, pour tout $g \in G$, il existe un unique couple $(h, k) \in H \times K$ tel que $g = h \star k$.
On note alors $k = \varphi(g)$. On définit ainsi une application $\varphi : G \to K$.

c) Montrer que φ est un morphisme de groupes surjectif.

d) Montrer que, pour tout $g \in G$, il existe un unique couple $(h', k') \in H \times K$ tel que $g = k' \star h'$. Montrer de plus que $k' = \varphi(g)$.

Problème 16

L'équation diophantienne $a^2 - 2b^2 = \pm 1$

[Groupes]

A - Etude de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$

On note dans tout le problème $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\,;\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1 - Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

2 - Montrer que A, muni de l'addition et de la multiplication des réels, est un anneau commutatif.

3 - a) Montrer que, pour tout $x \in A$, il existe un *unique* couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$. On notera alors $\bar{x} = a - b\sqrt{2}$ et $N(x) = x\bar{x}$. On appelle $\bar{x}$ le conjugué de x dans A, et $N(x)$ la norme de x.
b) Montrer que, pour tout $x \in A$, on a $N(x) \in \mathbb{Z}$, et $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
c) Montrer que, pour tout $(x, x') \in A^2$, $N(xx') = N(x)N(x')$.

4 - a) Soit $x \in A$. Montrer que x est inversible dans A (c'est-à-dire possède, dans A, un symétrique pour la multiplication) si, et seulement si, $N(x) \in \{-1, 1\}$.
b) On note H l'ensemble des éléments inversibles de A. Montrer que $(H, \cdot)$ est un groupe.

B - Détermination de l'ensemble H

5 - Soit $x \in H$, et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.
a) Montrer que si a et b sont de même signe, alors $|x| \geqslant 1$.
b) Montrer que si $ab \leqslant 0$, alors $|x| \leqslant 1$.

6 - On note $H^+ = H \cap]1, +\infty[$.
a) Montrer que le plus petit élément de H^+ est $\alpha = 1 + \sqrt{2}$.
b) Montrer que, pour tout $x \in H^+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^n \leqslant x < \alpha^{n+1}$.
c) En déduire $H^+ = \{\alpha^n\,;\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

7 - Déterminer l'ensemble H.

Problème 17

Une équation différentielle linéaire d'ordre 4

[Equations différentielles]

On considère l'équation différentielle d'ordre 4 :

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \quad (E).$$

Rappelons que $y^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de la fonction y.

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables au moins quatre fois et solutions de (E).

1 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^4 - 2X^2 + 1 = 0$.

2 - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable au moins quatre fois. Montrer que f est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction $g = f'' - f$ est solution d'une équation différentielle linéaire (E') d'ordre 2 que l'on précisera.

3 - Résoudre l'équation (E').

4 - Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions à valeurs réelles de l'équation (E).

Problème 18 *

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

[Equations différentielles, courbes paramétrées]

Soient A, B, C, D, x_0, y_0 des constantes réelles. Dans chacun des cas proposés, on demande :

(a) de déterminer l'ensemble de couples (x, y) de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + By(t) \\ y'(t) = Cx(t) + Dy(t) \end{cases} \qquad (S).$$

(b) de déterminer l'unique couple (x, y) solution du système différentiel (S) et vérifiant de plus les conditions initiales :

$$x(0) = x_0 \quad ; \quad y(0) = y_0.$$

(c) d'étudier et de représenter graphiquement la courbe plane Γ paramétrée par :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} .$$

Cette courbe est appelée caractéristique du système (S) avec les conditions initiales (x_0, y_0).

1 - On fixe ici un réel λ. On pose :

$$A = 1 \quad ; \quad B = C = 0 \quad ; \quad D = \lambda \quad \text{et} \quad x_0 = y_0 = 1$$

Indication : on sera amené à distinguer les cas $\lambda > 1$, $\lambda = 1$, $0 < \lambda < 1$, $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$.

2 - On fixe un réel a. On pose :

$$A = D = a \quad ; \quad B = -1 \quad ; \quad C = 1 \quad \text{et} \quad x_0 = 1 \quad ; \quad y_0 = 0$$

Indication : on essaiera de se ramener à la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre ; on sera amené à distinguer les cas $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$.

3 - On pose :

$$A = C = D = 1 \quad ; \quad B = 0 \quad ; \quad C = 1 \quad \text{et} \quad x_0 = 1 \quad ; \quad y_0 = 0$$

Indication : là encore, on essaiera de se ramener à la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

Dans chaque cas, si on le souhaite, on pourra représenter, à côté de la caractéristique demandée, d'autres caractéristiques (correspondant à d'autres conditions initiales).

Que peut-on dire de l'ensemble des courbes caractéristiques relatives à un système différentiel donné ?

Problème 19 **

Une équation fonctionnelle

[Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, équations différentielles]

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

1 - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction élément de $\mathscr{E}$.

a) Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.

b) Démontrer que la fonction f est impaire.

2 - On suppose ici que la fonction $f \in \mathscr{E}$ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

a) Démontrer que f est solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$xy' - y = kx \quad (1),$$

où k est une constante réelle, dépendant de f, que l'on précisera.

b) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle (1).

c) En déduire, en fonction de la constante k, la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3 - On note f_1 l'unique fonction appartenant à $\mathscr{E}$ telle que $f_1'(1) = 1$.

a) La fonction f_1 est-elle dérivable en 0 ?

b) Donner l'allure du graphe de f_1 dans un repère orthonormal direct (unité : 3cm).

4 - On se donne maintenant une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartenant à $\mathscr{E}$, que l'on suppose seulement continue. La fonction f admet donc des primitives. On note F celle de ses primitives qui s'annule en 0.

a) Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(xy) = x^2 F(y) + \frac{xy^2}{2} f(x).$$

b) En déduire que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

c) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$.

Problème 20 *

Un problème de raccordement de solutions

[Equations différentielles]

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(1-x)y' + xy = e^x \quad (E).$$

Les solutions recherchées sont à valeurs réelles.

On considérera les intervalles $I_- =]-\infty, 1[$ et $I_+ =]1, +\infty[$.

1 - Soit $I = I_-$ ou I_+, et $a : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in I \quad a(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Déterminer une primitive de a sur l'intervalle I.

2 - Résoudre, séparément sur les intervalles I_- et I_+, l'équation différentielle

$$(1-x)y' + xy = 0 \quad (H).$$

On simplifiera au maximum l'expression des fonctions solutions.

3 - Résoudre, séparément sur les intervalles I_- et I_+, l'équation différentielle (E). On notera respectivement $\mathscr{S}_{I_-}$ et $\mathscr{S}_{I_+}$ les ensembles de solutions.

4 - Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et solutions de l'équation (E).

On raisonnera par analyse/synthèse.

5 - Pour tout réel k, montrer qu'il existe une unique fonction $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de (E) telle que $f_k(0) = k$.

6 - Etudier, pour tout réel k, la fonction f_k (limites, asymptotes, branches paraboliques, variations, tangente au point d'abscisse 1). Représenter graphiquement les fonctions f_0, f_1 et f_2.

Que remarque-t-on ?

Problème 21

Étude de l'intersection de deux plans mobiles et d'un plan fixe

[Géométrie dans l'espace]

On note $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(1,0,0)$ et dirigée par $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$, $\mathscr{D}'$ la droite d'équations $\begin{cases} x &= y \\ x &= z \end{cases}$, et Q le plan d'équation $y + z = 0$.

Pour tout réel m, on note P_m le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{v}_m = \vec{i} + m\vec{j} - m\vec{k}$.

1 - a) Donner une équation de la droite $\mathscr{D}$, ainsi qu'un point B et un vecteur directeur $\vec{b}$ de $\mathscr{D}'$. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, donner une équation du plan P_m.
b) Vérifier que tous les plans P_m contiennent la droite $\mathscr{D}$.

2 - a) Calculer $\vec{r}_m = \vec{b} \wedge \vec{v}_m$. En déduire que $\mathscr{D}'$ n'est pas orthogonale à P_m.
b) On appelle alors R_m l'unique plan contenant $\mathscr{D}'$ et perpendiculaire à P_m. Obtenir une équation cartésienne de R_m (on pourra commencer par trouver un vecteur normal au plan R_m).

3 - Déterminer, pour tout réel m, les coordonnées dans $\mathscr{R}$ du point I_m, point d'intersection des plans P_m, Q et R_m.

4 - On note $\mathscr{S}$ la partie de l'espace d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x$, et Ω le point de Q de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0, 0)$.
a) Préciser la nature géométrique de l'ensemble $\mathscr{S}$ ainsi que les éléments géométriques qui le caractérisent.
b) Vérifier que I_m appartient à $\mathscr{S}$, puis que I_m appartient à un cercle $\mathscr{C}$, *ne dépendant pas du réel* m, dont on donnera le centre et le rayon.

5 - Soit M un point de l'espace.
a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées du point M pour qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}$ tel que $M \in P_m$.
b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{A}$, réunion des plans P_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{A} = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} P_m.$$

Problème 22
Autour d'une hyperbole équilatère

[Géométrie plane, coniques]

Soit $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal du plan, et H la partie du plan dont une équation cartésienne dans le repère $\mathscr{R}$ est : $x^2 - y^2 = 1$.

1 - Démontrer que H admet deux axes de symétries Δ et Δ' que l'on précisera.

2 - On pose $\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.
Démontrer que le repère $\mathscr{R}' = (O, \overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}}, \overrightarrow{v_{\frac{\pi}{4}}})$ est orthonormal, et donner une équation cartésienne de l'ensemble H dans ce repère.
On notera (X, Y) les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}'$.

3 - Donner, dans le repère $\mathscr{R}'$, des équations cartésiennes des droites Δ et Δ'.

4 - Montrer que, dans le repère $\mathscr{R}'$, l'ensemble H est la courbe représentative d'une fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

5 - Soit A le point de H dont l'abscisse (dans le repère $\mathscr{R}'$) est 1. On note D la tangente à la courbe H au point A.
Déterminer une équation de D dans le repère $\mathscr{R}'$, puis dans le repère $\mathscr{R}$.
En déduire, dans le repère $\mathscr{R}$, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{t}$ unitaire et tangent à la courbe H au point A.

6 - Sur un dessin, (unité 3 cm), Représenter les deux repères $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$, l'ensemble H, les axes Δ et Δ', la droite D et le vecteur $\overrightarrow{t}$.
Note : si vous avez eu l'idée de commencer par lire l'énoncé jusqu'au bout, vous aurez aussi sûrement celle de faire une ébauche de dessin, au moins au brouillon, bien avant la question 6...

Problème 23 **

Caractérisation des tangentes à une conique

[Géométrie plane, coniques, résolution d'équations]

Dans cet exercice, on fera apparaître clairement les disjonctions de cas qui seront nécessaires.

Soit α et β deux réels strictement positifs fixés. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1 - On considère l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation cartésienne $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, et soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $ax + by = c$. Déterminer, selon les valeurs de a, b et c, le nombre de points d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec l'ellipse $\mathscr{E}$.

Indication : on sera amené à faire intervenir le réel $\delta = (\alpha a)^2 + (\beta b)^2 - c^2$.

b) On admet que la droite $\mathscr{D}$ est tangente à l'ellipse $\mathscr{E}$ si, et seulement si, elles se rencontrent en un point unique. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel δ pour que $\mathscr{D}$ soit tangente à $\mathscr{E}$.

2 - On considère l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation cartésienne $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, et soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $ax + by = c$. Déterminer, selon les valeurs de a, b et c, le nombre de points d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec l'hyperbole $\mathscr{H}$.
Attention, il y a un piège...

b) Faire un dessin. Démontrer qu'il existe au moins une droite qui rencontre $\mathscr{H}$ en un point unique, mais qui n'est pas tangente à $\mathscr{H}$.

c) Quelles sont les droites qui, sans lui être tangentes, rencontrent $\mathscr{H}$ en un seul point ?
(On ne demande pas de démonstration.)

b) A partir des résultats des questions **a)** et **c)**, donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β, a, b, c pour que la droite $\mathscr{D}$ soit tangente à l'hyperbole $\mathscr{H}$.

Problème 24
Cercle principal d'une conique à centre

[Coniques]

1 - Cas de l'ellipse

Soient F et F' deux points du plan géométrique, O le mileu de ces deux points, et $a > OF$ un réel. On note $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équation bifocale $MF + MF' = 2a$.

a) Soit M un point de l'ellipse $\mathscr{E}$, Δ la tangente à $\mathscr{E}$ au point M, et H le projeté orthogonal du foyer F sur la droite Δ. Faire un dessin à la règle et au compas (sauf bien sûr l'ellipse...).

b) Montrer que H est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon a (on pourra faire intervenir le symétrique du point F par rapport à la droite Δ).

c) Réciproquement, montrer que tout point du cercle $\mathscr{C}$ est le projeté orthogonal du foyer F sur une droite tangente à l'ellipse $\mathscr{E}$.

2 - Cas de l'hyperbole

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole, et F un de ses foyers. On note $\mathscr{L}$ le lieu des projetés ortogonaux du foyer F sur les tangentes à l'hyperbole $\mathscr{H}$.

a) Montrer que $\mathscr{L}$ est contenu dans un cercle $\mathscr{C}$ que l'on caractérisera.

b) Préciser quels sont les points du cercle $\mathscr{C}$ qui n'appartiennent pas au lieu $\mathscr{L}$.

Problème 25 ✱

Une corne de gazelle ?

[Courbes paramétrées]

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée, en coordonnées cartésiennes, par :

$$x(t) = \frac{\sin^2 t}{2 + \sin t} \quad ; \quad y(t) = \cos t.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on notera $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$.

a) Préciser le domaine de définition des fonctions x et y et montrer qu'on peut restreindre le domaine d'étude à $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On indiquera clairement la ou les tranformation(s) nécessaire(s) pour obtenir le tracé définitif de la courbe $\mathscr{C}$.

b) Etudier les variations des fonctions x et y sur l'intervalle I, et montrer qu'il existe un unique $t_0 \in I$ (que l'on précisera) tel que la courbe $\mathscr{C}$ soit singulière au point $M(t_0)$. On déterminera aussi les tangentes horizontales et/ou verticales de $\mathscr{C}$.

c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ possède une tangente Δ au point $M(t_0)$, et donner une équation cartésienne de Δ.

d) Pour tout $t \in I$, déterminer la position du point $M(t)$ par rapport à la droite Δ.
Indication : pour mener les calculs au bout, on pourra introduire le réel $T = \tan \frac{t}{2}$.

e) Tracer, aussi précisément que possible, l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ (unité : 6 cm)

Problème 26
Des courbes définies par équation polaires

[Courbes en polaires]

Les deux exercices proposés sont totalement indépendants.

A

Problème : représenter la courbe Γ d'équation polaire $\rho(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{1-\tan\theta}$ (dans un repère orthonormal).

1 - Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction ρ, et montrer qu'on obtient toute la courbe Γ en la représentant seulement pour $\theta \in D \cap [-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$.

2 - Montrer que la courbe Γ possède un centre de symétrie.

4 - Etudier, sur un intervalle convenable, les variations et limites de la fonction ρ. Préciser les tangentes à Γ en l'origine du repère.

5 - Montrer que Γ possède des asymptotes que l'on précisera (on sera sans doute amené à faire un changement de repère). Si possible, préciser la position de Γ par rapport à ces asymptotes.

6 - Représenter la courbe Γ (unité : 3 cm).

B

On se place dans le plan euclidien, muni d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$. On se propose d'étudier la courbe Γ d'équation polaire $\rho = r(\theta)$, avec :

$$r(\theta) = \frac{\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta}{1 - \sin\theta}.$$

1 - Préciser l'ensemble de définition D de la fonction r. On décide de faire varier θ dans l'ensemble $A = D \cap [0, 2\pi]$. Montrer que cela suffit à obtenir tous les points de la courbe Γ.

2 - Déterminer les points d'annulation de la fonction r sur l'ensemble A, puis étudier son signe sur A. On pourra pour cela chercher à factoriser le numérateur de l'expression de $r(\theta)$.

3 - Déterminer un vecteur directeur de chaque tangente à la courbe Γ au point O.

4 - Démontrer qu'au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ la courbe Γ admet pour asymptote la droite d'équation cartésienne $x = 4$ dans le repère $\mathscr{R}$.

5 - Démontrer que la courbe possède un point multiple autre que le point O. On le notera I. Déterminer ses coordonnées cartésiennes, et un vecteur directeur de chacune des tangentes à la courbe Γ au point I.

6 - Etudier le signe sur A de la fonction $\theta \mapsto r(\theta) + r(\theta + \pi)$. Quel intérêt présente cette étude pour le tracé de la courbe Γ ?

7 - A l'aide des informations précédentes, et de quelques valeurs déterminées à la calculatrice, effectuer un tracé aussi précis que possible de la courbe Γ (on choisira une échelle adaptée).

Problème 27
Un problème de lieu

[Courbes paramétrées]

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la parabole $\mathscr{P}$ paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.

1 - Soit $t \in \mathbb{R}^*$, et M le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse t.

a) La normale Δ à $\mathscr{P}$ au point M recoupe $\mathscr{P}$ en un point N. Déterminer les coordonnées du point N. en fonction de t.

Donner les coordonnées d'un vecteur tangent à la parabole $\mathscr{P}$ au point N.

b) Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par M et parallèle à la tangente à $\mathscr{P}$ au point N. Soit $\mathscr{D}'$ la droite passant par N et parallèle à la tangente à $\mathscr{P}$ au point M. Déterminer les coordonnées $x_Q(t)$ et $y_Q(t)$ du point d'intersection Q_t de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Vous devez trouver $x(t) = -\frac{1}{4t}$.

2 - On cherche maintenant à représenter la courbe Γ décrite par le point Q_t quand M parcourt $\mathscr{P} \setminus \{O\}$.

a) Etudier les symétries de Γ, et restreindre l'intervalle d'étude.

b) Dresser le tableau de variation des fonctions x_Q et y_Q.

c) Etudier la nature des branches infinies de Γ.

d) Représenter, sur un même dessin, la parabole $\mathscr{P}$ et la courbe Γ (unité : $2\,cm$).

On donne $\frac{\sqrt[4]{12}}{4} \approx 0,5$ et $\frac{3}{2} + \sqrt{3} \approx 3,2$

Problème 28

La strophoïde droite

[Courbes paramétrées]

Problème : Etant donné un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, et A un point fixé de $\mathscr{C}$, on cherche à représenter le lieu de l'orthocentre H du triangle OAM lorsque le point M décrit $\mathscr{C}$ (privé du point A et de son symétrique par rapport à O, pour la bonne définition de H).

1 - On note $a = OA$ le rayon non nul du cercle $\mathscr{C}$, et on se place dans le repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ centré en O et tel que $\overrightarrow{OA} = a\,\vec{i}$. On note B le symétrique de A par rapport à O. Etant donné $M \in \mathscr{C} \setminus \{A, B\}$, on note $\theta \in \mathbb{R}$ une mesure de l'angle orienté $\widehat{AOM}$.
Faire une figure propre.

2 - En remarquant que le triangle AOM est isocèle, déterminer, en fonction de θ, les coordonnées cartésiennes de son orthocentre H.

3 - On note $t = \tan \frac{\theta}{2}$ (justifier cette définition). Quelles valeurs prend t quand M décrit $\mathscr{C} \setminus \{A, B\}$? Exprimer les coordonnées cartésiennes de H en fonction de t.
On les notera désormais $x(t)$ et $y(t)$, et le point H sera noté $H(t)$. On notera $\mathscr{S} = \{H(t)\,;\ t \in \mathbb{R}\}$; cette courbe est appelée *strophoïde droite*.

4 - Montrer que la courbe $\mathscr{S}$ possède un axe de symétrie. Etudier les variations et limites des fonctions x et y sur un intervalle approprié.

5 - Représenter, sur une même figure, le cercle $\mathscr{C}$ et la courbe $\mathscr{S}$ ($a = 3cm$). On précisera les asymptotes éventuelles, et la position de $\mathscr{S}$ par rapport à ces asymptotes ; on montrera aussi que $\mathscr{S}$ possède un point double, et on déterminera les deux tangentes à $\mathscr{S}$ en ce point.

Problème 29

Transformation de Descartes

[Courbes paramétrées, groupes]

Dans tout le problème, Π désigne un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a une constante réelle strictement positive. On note Δ la droite d'équation $x = a$ et Δ' la droite d'équation $x = 0$.

Première Partie

Soit k une constante réelle strictement positive. On note Φ la courbe décrite par le point M_t de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) &= a + k\cos t \\ y(t) &= a\tan t + k\sin t \end{cases}$$

On note Ω_t le point de Δ d'ordonnée $a\tan t$.

1. Déterminer un intervalle d'étude auquel il suffit de se restreindre pour étudier Φ.
2. A quelle condition le point O appartient-il à Φ ?
3. Montrer que tout point de Φ vérifie l'équation cartésienne :
$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 = k^2x^2 \qquad (E).$$
4. Réciproquement, montrer que si les coordonnées d'un point $M(x, y)$ vérifient l'équation (E), alors M appartient à $\Phi \cup \{O\}$.
5. Donner une équation polaire de Φ.
6. A partir de la représentation paramétrique ou de l'équation polaire, étudier la courbe Φ (variations, étude asymptotique, points singuliers, représentations graphiques,. . .) dans chacun des trois cas suivants :
   (a) : $(a, k) = (1, 2)$; (b) : $(a, k) = (1, 1)$; (c) : $(a, k) = (1, \frac{1}{2})$.
7. Déterminer les points réguliers M_t de Φ et donner en ces points les coordonnées d'un vecteur normal.
8. Dans le cas oÃź M_t n'appartient pas à l'axe des abscisses, calculer les coordonnées du point d'intersection R_t de la normale en M_t avec la droite d'équation $y = a\tan t$. Que peut-on dire du triangle $R_tO\Omega_t$?

Deuxième Partie

Si P est un point du plan Π n'appartenant pas à Δ', on note Ω le point d'intersection des droites (OP) et Δ, et M le point du plan tel que $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OP}$.

Le point M est appelé transformé de Descartes du point P relativement au point O et à la droite Δ. On notera $M = \delta(P)$.

1. Si (x_P, y_P) désignent les coordonnées d'un point P, montrer que le point $M = \delta(P)$ a pour coordonnées :
$$x_M = a + x_P \quad ; \quad y_M = \frac{y_P}{x_P}(a + x_P).$$
2. On a ainsi défini une application $\delta : \Pi \setminus \Delta' \to \Pi$.
   (a) L'application δ est-elle injective ? Sinon, préciser les points du plan qui admettent plusieurs antécédents par δ.
   (b) L'application δ est-elle surjective ? Sinon, préciser les points du plan qui n'admettent aucun antécédent par δ.

3. Si Γ est une courbe du plan Π, on appelle transformée de Descarte de Γ la courbe $\delta\Gamma$ formée des points $\delta(M)$, pour M parcourant la courbe Γ privée de ses points d'abscisse nulle :

$$\delta\Gamma = \{\delta(M)\ ;\ M \in \Gamma \setminus \Delta'\}.$$

4. Donner une équation cartésienne de la transformée de Descartes $\delta\mathscr{P}$ (relative à O et à Δ) de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = cx^2$ (avec $c > 0$).
5. Etudier la transformée de Descartes $\delta\mathscr{C}$ (relative à O et à Δ) d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon k. Donner l'allure de $\mathscr{C}$.
6. Soit Γ le cercle passant par O, centré au point de coordonnées $(-\frac{a}{2}, 0)$.
   (a) Vérifier que $\rho = -a\cos\theta$, oÃź θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, est une équation polaire du cercle Γ privé de O.
   (b) Vérifier que sa transformée de Descartes est la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a\sin^2 t \\ y = a\tan t\sin^2 t \end{cases}$$

   (c) Donner une équation cartésienne de $\mathscr{C}$, puis une équation polaire. En déduire l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.
   (d) Montrer que $\mathscr{C}$ admet également la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a\frac{m^2}{1+m^2} \\ y = a\frac{m^3}{1+m^2} \end{cases}$$

Problème 30
Limite supérieure, limite inférieure

[Nombres entiers, nombres réels]

Dans tout le problème, on fixe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on suppose *bornée*.

0 - Montrer que, si A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$, alors :

$$A \subset B \;\Rightarrow\; \sup A \leqslant \sup B.$$

A - Définition

1 - a) Soit n un entier naturel. On pose $X_n = \{u_p\,;\ p \geqslant n\}$. Montrer que X_n admet une borne inférieure et une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sup X_n$ et $i_n = \inf X_n$. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que la suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Montrer que les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. On notera :

$$L_s = \limsup(u) = \lim_{n\to+\infty} s_n \qquad ; \qquad L_i = \liminf(u) = \lim_{n\to+\infty} i_n.$$

2 - Déterminer les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ainsi que leurs limites L_s et L_i dans chacun des cas suivants (les résultats devront être justifiés) :

a) La suite u est constante nulle. **b)** $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n$. **c)** $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{n+1}$.

B - Lien avec la convergence

3 - a) On suppose (pour cette question seulement) $L_s = L_i$. Montrer que la suite u est convergente.

b) Soit $v = (u_{\varphi}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que la suite v est convergente. Montrer que :

$$L_i \leqslant \lim(v) \leqslant L_s.$$

4 - On suppose ici la suite u convergente, de limite ℓ. Montrer que $L_s = L_i = \ell$.

5 - Montrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit convergente et de limite L_s.

On prouverait de même le résultat homologue pour L_i. On obtient ainsi une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Résumé. On appelle valeur d'adhérence de la suite u tout réel ℓ qui est la limite d'au moins une suite extraite de u. On a prouvé ici que, si la suite u est bornée, alors :

- *(i)* u admet au moins une valeur d'adhérence (Bolzano-Weierstrass) ;
- *(ii)* $\limsup(u)$ est la plus grande des valeurs d'adhérence de u ;
- *(iii)* $\liminf(u)$ est la plus petite des valeurs d'adhérence de u.

C - Un petit raffinement pour la route

6 - On suppose toujours u bornée, on note $v = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que :

$$\limsup(u) = \max\bigl\{\limsup(v), \limsup(w)\bigr\} \quad \text{et} \quad \liminf(u) = \min\bigl\{\liminf(v), \liminf(w)\bigr\}.$$

Problème 31 ✻

Moyenne arithmético-harmonique

[Suites numériques, nombres complexes, algèbre linéaire]

On considère deux nombres réels strictement positifs x et y. On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $u_0 = x$, $v_0 = y$ et pour tout $n \geqslant 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left[u_n + v_n\right] \\ \dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}\right] \end{array}\right.$$

1 - Soient a et b deux réels strictement positifs, montrer que l'on a : $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

2 - On se propose de montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

a) Montrer par récurrence que les nombres u_n et v_n sont bien définis, et que $v_n \leqslant u_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

c) Terminer en montrant que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3 - Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le produit $u_n v_n$.
En déduire la limite commune des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$.

4 - On choisit ici $x = 2$ et $y = 3$.

a) Calculer $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ sous forme de fractions (de préférence irréductibles, mais il n'est pas demander de vérifier qu'elles le sont).

b) Calculer, toujours sous forme de fractions irréductibles, $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$, $u_3 - v_3$.

c) A l'aide des résultats précédents, calculer successivement la valeur décimale approchée par défaut du réel $\sqrt{6}$ à 10^{-1} près, à 10^{-2} près, puis à 10^{-6} près.

Remarque : la question 4 demande des calculs relativement longs ; ceci sera pris en compte dans le barême. En particulier, vous serez amenés à calculer le quotient de deux entiers à 4 chiffres, avec 7 chiffres après la virgule ; il vous est demandé de poser la division sur votre copie.

Problème 32 *

Série harmonique et séries alternées

[Suites numériques]

A - La série harmonique

1 - a) Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n} \qquad ; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \quad \frac{1}{n} \leqslant \ln n - \ln(n-1).$$

2 - Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.
a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n.$$

b) En déduire la nature (convergente ou divergente) de la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$.

3 - Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = H_n - \ln n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente. On note γ sa limite. Il existe donc une suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ de limite nulle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n = \ln n + \gamma + v_n.$$

B - Une série alternée

4 - Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
a) Montrer que les suites extraites $(S_{2p})_{p \geqslant 1}$ et $(S_{2p+1})_{p \geqslant 1}$ sont adjacentes.
b) En déduire la nature de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$.

5 - On se propose maintenant de calculer la limite ℓ de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$.
a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.
b) A l'aide du résultat final de la question 3, déterminer la limite ℓ.

6 - En discutant selon la parité de l'entier $n \geqslant 1$, établir la majoration :

$$|S_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

C - Une série un peu plus élaborée

7 - Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos \frac{k2\pi}{3}$.
a) Déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_{3n} = a \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k} + b \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k-1} + c \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k-2}.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{3n} = \frac{1}{2} H_n - \frac{1}{2} H_{3n}$.

8 - a) Montrer que la suite $(T_{3n})_{n \geqslant 1}$ est convergente, et préciser sa limite.
b) Déterminer la nature de la suite $(T_n)_{n \geqslant 1}$, et préciser sa limite éventuelle.
[On demande une argumentation précise et complète.]

Problème 33
Fractions continues

[Suites numériques, nombres irrationnels]

Dans ce problème, les questions 3 et 4 sont indépendantes.

On considère une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $a_0 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \in \mathbb{N}^*$.

On définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ et, pour $n \geqslant 2$:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{et} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

1 - Relations entre les p_n et les q_n

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $q_n \geqslant n$.

b) Pour $n \geqslant 1$, calculer $u_n = p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}$ en fonction de n.

(On pourra établir, pour $n \geqslant 2$, une relation entre u_n et u_{n-1}.)

c) Pour $n \geqslant 2$, calculer $v_n = p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2}$ en fonction de n et a_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

2 - Etude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) Pour $n \geqslant 1$, calculer $x_n - x_{n-1}$ et pour $n \geqslant 2$, calculer $x_n - x_{n-2}$ en fonction des a_i et des q_i.

b) En déduire que les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

c) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera α sa limite.

3 - Irrationnalité de α

On se propose de démontrer par l'absurde que α est un nombre irrationnel. On suppose que α est rationnel, et on fixe $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha = \frac{c}{d}$.

a) Après avoir justifié l'encadrement $0 < \alpha - x_{2n} < x_{2n+1} - x_{2n}$, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un entier k_n vérifiant $0 < k_n < \dfrac{d}{q_{2n+1}}$.

b) En déduire que α n'est pas rationnel.

4 - Un cas particulier

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul fixé.

On suppose désormais que la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\forall n \in \mathbf{N}, a_n = k$.

a) Pour $i \in [\![0, 3]\!]$, calculer p_i et q_i.

b) Pour $n \geqslant 1$, exprimer :

(i) q_n en fonction d'un des p_i, $i \in \mathbb{N}$.

(ii) x_n en fonction de q_n et q_{n+1}.

(iii) x_n en fonction de x_{n-1}.

c) En déduire la valeur de la limite α de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On pourra situer, par rapport à k, les racines du polynôme $X^2 - kX - 1$.

d) On prend $k = 3$.

(i) Calculer q_n pour $n \in [\![0, 6]\!]$.

(ii) En déduire deux nombres rationnels qui encadrent α à $1/20\,000$e près.

(iii) En déduire deux nombres rationnels qui encadrent $\sqrt{13}$ à 10^{-4} près.

Problème 34 **

Une suite définie par récurrence

[Suites numériques]

1 - On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto 1 - x^2$.

On rappelle qu'un réel x est un point fixe de f si $f(x) = x$, et qu'un intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$. Une suite est dite stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

a) Déterminer les points fixes de f (on les notera α et β, avec $\alpha < \beta$).

b) Démontrer que les intervalles suivants sont tous stables par f : $[0, 1]$, $]\alpha, 1]$, et $]-\infty, \alpha[$.

c) Tracer, sur un même dessin, la droite d'équation $y = x$ et le graphe de f (sur l'intervalle $[-2, 2]$). On étudiera préalablement leurs positions respectives.

2 - On considère maintenant la fonction $g = f \circ f$.

a) Etudier, sur l'intervalle $[0, 1]$, les variations de g et le signe de la fonction $x \mapsto g(x) - x$. Tracer, sur un même dessin, la droite d'équation $y = x$ et le graphe de g.

b) Soit v une suite réelle telle que $v_0 \in [0, 1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. A l'aide des questions précédentes, montrer que la suite v est convergente, et préciser sa limite suivant la valeur de v_0. On aura intérêt à s'aider d'un dessin.

3 - On considère ici une suite réelle u telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - {u_n}^2$.

a) On suppose ici $u_0 \in [0, 1]$. Montrer que, si $u_0 \neq \beta$, la suite u est divergente de deuxième espèce (on pourra étudier les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$). Et si $u_0 = \beta$?

b) On suppose maintenant $u_0 \in]\alpha, 0[$.

(i) Montrer, par l'absurde, qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \in [0, 1]$.

(ii) En déduire le comportement de la suite u, suivant la valeur de u_k.

c) On suppose $u_0 = \alpha$. Que dire de la suite u ?

d) On suppose $u_0 < \alpha$. Etudier la monotonie de la suite u. En déduire qu'elle admet une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$, et préciser cette limite.

e) On suppose $u_0 > 1$. Montrer que $u_1 < 0$. Préciser, suivant la valeur de u_0, le comportement de la suite u (on pourra utiliser la parité de f).

4 - On se propose de montrer, indépendamment de la question **3**, que la suite u ne peut être convergente dans $\mathbb{R}$ que si elle est stationnaire.

On va raisonner par l'absurde, en supposant que la suite u converge vers un réel ℓ, et qu'elle ne prend jamais la valeur ℓ.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = |u_n - \ell|$.

a) Montrer que ℓ est un point fixe de f, et que $\frac{w_{n+1}}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |2\ell|$.

b) Montrer que $|2\ell| > 1$, et en tirer une contradiction.

c) Conclure en prouvant que, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors u est stationnaire en ℓ.

Problème 35 **

Suites de Cantor

[Suites numériques]

Définition

Soit $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres entiers. On dit que a est une *suite de Cantor* si :

$$a_1 \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 2,\ a_k \in [\![0, k-1]\!].$$

A - Étude de cas particuliers

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1 - a) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $\forall k \geqslant n_0,\ 2^k \leqslant k!$.

b) Montrer que, pour $n \geqslant n_0$, $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{n_0-1}}$.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$.

d) En étudiant sa monotonie, montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et donner un encadrement de sa limite à $\frac{1}{10}$ près.

On admet que cette limite est le nombre de Neper e.

2 - Soit $n \geqslant 1$ un entier (fixé pour cette question).

a) Montrer que, pour tout $k \geqslant n+1$, $2^{k-n-1}(n+1)! \leqslant k!$.

b) En déduire, pour $n' \geqslant n+1$, un encadrement de $x_{n'}$, puis montrer que $x_n \leqslant e \leqslant x_n + \frac{2}{(n+1)!}$.

c) Montrer qu'il existe un entier ε_n tel que $\varepsilon_n \leqslant n!e \leqslant \varepsilon_n + \frac{2}{(n+1)!}$.

3 - a) Montrer que, si $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux suites de nombres réels, alors :

$$\alpha_n - \beta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \cos \alpha_n - \cos \beta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

b) En déduire que $cos(n!2\pi e) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

c) Déterminer, en fonction de n, la parité de l'entier ε_n.

d) Montrer que la suite $(\cos(n!\pi e))_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

4 - a) Soit x un nombre réel tel que $\frac{x}{2\pi} \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\cos(n!x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

b) En déduire que $\frac{e}{2}$ est irrationnel, puis que e lui-même est irrationnel.

B - Séries de Cantor et suites $(\cos(n!x))_{n \in \mathbb{N}^*}$

On cherche ici à montrer que, pour tout $\ell \in [-1, 1]$, il existe un réel x tel que $\cos(n!x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Soit $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de Cantor. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!}$.

1 - Notons $u_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \frac{k-1}{k!}$ (pour deux entiers n et p tels que $n > p \geqslant 0$).

a) Exprimer $u_{n,p}$ en fonction de n et p.

On remarquera qu'il s'agit d'une somme télescopique, ou somme en cascade.

b) Montrer que, avec les mêmes notations, on a : $0 \leqslant s_n - s_p \leqslant u_{n,p}$.

c) En déduire que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Sa limite, qui dépend bien sûr de la suite de Cantor a, sera notée S_a.

d) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ $s_p \leqslant S_a \leqslant s_p + \frac{1}{p!}$.

2 - Donner, sans démonstration, une suite de Cantor a telle que $S_a = e$.

3 - On fixe $\ell \in [-1, 1]$, et $\theta = \arccos \ell$. Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \lfloor n\frac{\theta}{2\pi} \rfloor$.

a) Vérifier que la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cantor.
On note $x = 2\pi S_a$.

b) Etudier la convergence de la suite $\left(2\pi\dfrac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et préciser sa limite.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier ε_n tel que $\varepsilon_n + \frac{a_{n+1}}{n+1} \leqslant n!S_a \leqslant \varepsilon_n + \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}$.

d) En déduire que $\cos(n!x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

C - Développement de Cantor d'un réel : existence

Soit x un réel. On veut montrer qu'il existe une suite de Cantor a telle que $x = S_a$.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \lfloor n!\, x \rfloor$ et on définit une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant :

$$a_1 = p_1 \quad \text{et, pour } n \geqslant 2,\ a_n = p_n - np_{n-1}.$$

1 - a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $np_{n-1} \leqslant p_n \leqslant n!x < p_n + 1 \leqslant n(p_{n-1} + 1)$.

b) En déduire que la suite a est une suite de Cantor.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note comme précédemment $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!}$. Exprimer s_n en fonction de p_n.

d) Montrer que $S_a = x$.

La suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie ci-dessus est appelé le développement de Cantor du réel x.

2 - Montrer que x est rationnel si, et seulement si, la suite a est nulle à partir d'un certain rang.
On aura intérêt à montrer séparément les deux implications demandées.

D - Développement de Cantor d'un réel : unicité

Soit x un réel. On cherche à savoir à quelle condition sur x il existe deux suites de Cantor a et b distinctes telles que $S_a = S_b = x$.

1 - Supposons qu'il existe deux telles suites de Cantor a et b. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ le plus petit indice tel que $a_p \neq b_p$. On a donc, pour tout $k \leqslant p - 1$, $a_k = b_k$. Supposons par exemple $a_p < b_p$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!}$ et $s'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k!}$.

a) A l'aide de l'encadrement obtenu à la question **B 1-d)**, montrer que :

$$b_p = a_p + 1\ ,\quad S_b = s'_p \quad \text{et} \quad S_a = s_p + \frac{1}{p!}.$$

On pourra raisonner par l'absurde.

b) En déduire que x est rationnel.

c) Montrer de plus que, pour tout $k \geqslant p + 1$, $b_k = 0$ et $a_k = k - 1$.

2 - a) Montrer que, si x est irrationnel, alors il existe une unique suite de Cantor a telle que $x = S_a$, et que cette suite est son développement de Cantor.

b) Montrer que, si x est rationnel, alors il existe exactement deux suites de Cantor a et b telles que $x = S_a = S_b$, et que l'une des deux est son développement de Cantor.

Problème 36 *

Des développements asymptotiques

[Développements limités]

Les deux exercices proposés sont totalement indépendants.

A - Développement asymptotique d'une suite

Soit u la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! = \frac{1!+2!+\ldots+n!}{n!}$.
On cherche un développement asymptotique d'ordre 4 de la suite u au voisinage de $+\infty$, sous la forme :

$$u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \frac{e}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

1 - Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
[On pourra commencer par montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant 2$.]

2 - Soit v la suite réelle définie pour tout entier $n \geqslant 6$ par : $v_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-5} k! = \frac{1!+2!+\ldots+(n-5)!}{n!}$.
Montrer que, quand n tend vers $+\infty$, $v_n = o(\frac{1}{n^4})$.

3 - Déterminer le développement asymptotique à l'ordre 4 quand n tend vers $+\infty$ de :
a) $n \mapsto \frac{1}{n(n-1)}$ **b)** $n \mapsto \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$ **c)** $n \mapsto \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

4 - Montrer que u admet un développement asymptotique (que l'on déterminera) sous la forme souhaitée.

B - Etude d'une suite définie implicitement

L'objectif du problème est d'étudier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(E_p) \quad x + \ln x = p.$$

1 - Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que l'équation (E_p) possède une unique solution, qu'on notera x_p. Montrer que $x_p \in [1, p]$.

2 - Montrer que la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, et que $x_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$.

3 - Montrer que $x_p \sim p$ lorsque $p \to +\infty$.

4 - Montrer que $\frac{x_{p+1}}{x_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$, et en déduire la limite lorsque $p \to +\infty$ de $x_{p+1} - x_p$.

5 - Montrer que, lorsque $p \to +\infty$, $x_p = p - \ln p + o(1)$.
[On remarquera que $x_p - p = -\ln x_p$.]

6 - Montrer que, lorsque $p \to +\infty$, $x_p = p - \ln p + \frac{\ln p}{p} + o(\frac{1}{p})$.

7 - Pouvez-vous pousser le développement plus loin ?

Problème 37

L'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$

[Fonctions d'une variable, nombres rationnels]

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour tout l'exercice, on fixe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)+f(y)$.

1 - On suppose ici qu'il existe un intervalle I, contenant au moins deux points distincts, et tel que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant 0.$$

a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[a-r, a+r] \subset I$. On a donc :

$$\forall x \in [a-r, a+r], \quad f(x) \geqslant 0.$$

b) Montrer que la fonction f est minorée sur le segment $[-r, r]$.

c) Montrer que la fonction f est majorée sur le segment $[-r, r]$ (on pourra étudier la parité de f).

2 - On a montré que la fonction f est bornée sur l'intervalle $[-r, r]$ (avec $r > 0$).

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.

b) En revenant à la définition «en epsilon», montrer que la fonction f est continue en 0.

3 - On a montré que la fonction f est continue en 0.

a) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(rx) = rf(x)$.

c) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x$.

Problème 38 ✻

Valeurs prises par une fonction dans tout voisinage de $+\infty$

[Continuité des fonctions, suites numériques]

On fixe dans tout l'exercice une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconque. On considère l'ensemble :

$$X_f = \{ \ y \in \mathbb{R} \mid \forall A \in \mathbb{R}, \ \exists x \geqslant A, \ f(x) = y \ \}.$$

1 - Soit $T > 0$ fixé. On suppose que f est T-périodique. Montrer que $X_f = f([0, T[)$.

2 - On suppose maintenant que f est une fonction injective. Montrer que l'ensemble X_f est vide.

3 - On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que, là encore, l'ensemble X_f est vide.

4 - On suppose que la fonction f admet en $+\infty$ une limite réelle ℓ.

a) Montrer que $X_f \subset \{\ell\}$.

b) Montrer par des exemples (avec les justifications nécessaires) que l'inclusion réciproque peut être vraie ou fausse.

5 - On suppose que la fonction f est continue. Montrer que X_f est un intervalle de $\mathbb{R}$ (on commencera par rappeler la définition d'un intervalle).

Problème 39 ***

Étude d'une fonction et d'une suite de polynômes

[Borne supérieure dans $\mathbb{R}$, limites de fonctions]

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(0) = 0 \text{ et, pour } x \neq 0, \ f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

1 - Représentation de la fonction f

a) Etudier la continuité à gauche et à droite, la dérivabilité à gauche et à droite de f en 0.

b) Etudier les limites et variations de f (à résumer dans un tableau) ; préciser les branches infinies.

c) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de cette fonction dans un repère orthonormal (unité : 2 cm).
On donne : $e^{-2} \approx 0{,}135$; $e^{-1} \approx 0{,}36$; $e \approx 2{,}72$.

2 - Dérivées successives de la fonction f et polynômes associés

a) Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Démontrer de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = X^2 P_n' + [1 - 2(n+1)X]P_n$.

c) Calculer P_n pour $n \in [\![0, 4]\!]$.

d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P_n.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier la limite à droite en 0 de $f^{(n)}$.
En déduire que la fonction $f_{|[0,+\infty[}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

3 - Nouvelles relations entre les polynômes P_n

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2 f(x)$.

a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n+1)} = f^{(n)}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $g^{(n+1)}$, démontrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad P_{n+1}(x) = [1 - 2(n+1)x]P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x).$$

d) En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[, \ P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.

4 - Etude des racines du polynôme P_n

On notera $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynômiale associée au polynôme P_n.

a) A l'aide de la relation établie à la question **3 - c)**, montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0, +\infty[$, $p_n(x) \neq 0$ ou $p_{n-1}(x) \neq 0$.

b) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, si la fonction p_n s'annule en x, alors $p_n'(x) \neq 0$. En déduire que la fonction p_n change de signe au point x.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction polynomiale p_n a au plus un nombre fini de points d'annulation sur $]0, +\infty[$. Notons k ce nombre et plaçons-nous dans le cas où $k \geqslant 2$; notons $x_1 < \ldots < x_k$ ces points d'annulation.

- *(i)* Déterminer le signe de p_n sur les intervalles $[0, x_1[, \ ]x_1, x_2[, \ \ldots, \ ]x_{k-1}, x_k[$.
- *(ii)* Montrer que $p_n'(x_i)$ est du signe de $(-1)^i$.
- *(iii)* Etudier le signe de p_{n+1} en chacun des x_i.
- *(iv)* Etudier la limite de p_{n+1} en $+\infty$.

(v) Supposons ici $k = n$. Que peut-on en déduire sur les points d'annulation de la fonction p_{n+1} ?

d) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n possède au moins n racines dans $]0, +\infty[$. Peut-on être plus précis ?

Problème 40

Preuve du caractère $\mathscr{C}^\infty$ d'une fonction

[Dérivation, développements limités]

Ce problème est composée de deux parties totalement indépendantes, à l'exception d'un résultat de la première partie, qui pourra être utilisé dans la deuxième partie même s'il n'a pas été démontré.

A - Un théorème d'existence de limite

L'objectif de cette partie est d'établir le théorème suivant :

Théorème 1. *Si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne au voisinage de 0, alors elle admet une limite finie en 0.*

On étudiera ensuite des résultats proches, avec des hypothèses plus fortes, ou plus faibles, dont l'un sera utilisé dans la deuxième partie.

1 - On fixe ici une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs K et r tels que la fonction f soit K-lipschitzienne sur l'intervalle $]0, r]$.

a) Montrer que la fonction f est bornée sur l'intervalle $]0, r]$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]0, r]$ et de limite nulle (on peut choisir par exemple $u_n = \frac{r}{2^n}$, mais c'est sans importance).

b) Montrer l'existence d'une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que la suite $\big(f(u_{\varphi(n)})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. On notera ℓ sa limite.

c) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{\varphi(n)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2K}$ et $|f(u_{\varphi(n)}) - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

d) En déduire que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell$, ce qui achève de prouver le théorème 1.

2 - Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose de plus que la fonction dérivée f' admet une limite $\ell' \in \mathbb{R}$ en 0.

a) Montrer que la fonction f' est bornée au voisinage de 0.

b) A l'aide du **théorème 1**, en déduire le résultat suivant :

Théorème 2. *Si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, et si la fonction f' admet une limite finie en 0, alors la fonction f admet une limite finie en 0.*

3 - En s'inspirant de la méthode utilisée à la question **1**, démontrer le résultat plus fort :

Théorème 3. *Si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction uniformément continue, alors la fonction f admet une limite finie en 0.*

B - Étude d'une fonction

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.

L'objectif de cette partie est de montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$, puis de la prolonger en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un développement limité de la fonction f à l'ordre n au voisinage de 0.

2 - a) Montrer que la fonction f est dérivable, d'une part en 0, d'autre part sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer sa dérivée en tout point.

b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Était-il nécessaire pour cela de connaître la valeur de $f'(0)$?

c) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$.

3 - a) Justifier le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux polynômes P_n et Q_n, à coefficients entiers, tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{2^n x^{n-1}} P_n(x) + \frac{\sin\sqrt{x}}{2^n x^{n-1}\sqrt{x}} Q_n(x).$$

On explicitera P_1 et Q_1 et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on exprimera P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^{n-1} f^{(n)}(x)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre $n-1$ (on ne cherchera pas à calculer les coefficients).

d) Calculer les polynômes P_2, Q_2, P_3, Q_3. Établir le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto x^2 f^{(3)}(x)$, puis montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}^+$.

4 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. D'après la question précédente, la fonction $f^{(n+1)}$ (définie a priori sur $\mathbb{R}_+^*$ seulement) admet, au voisinage de 0, un développement asymptotique de la forme :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{a_n}{x^n} + \ldots + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_1}{x} + a_0 + \underset{x\to 0}{o}(1).$$

a) Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $f^{(n)}$ admet, au voisinage de 0, le développement asymptotique :

$$f^{(n)}(x) = -\frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}} - \ldots - \frac{a_2}{x} + a_1 \ln x + \ell + \underset{x\to 0}{o}(1).$$

[On pourra appliquer à une fonction bien choisie le **théorème 2** *de la première partie de ce devoir.]*

b) En déduire que, si la fonction $f^{(n)}$ admet une limite finie en 0, alors il en est de même pour la fonction $f^{(n+1)}$.

c) Montrer alors, par récurrence, que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

5 - A l'aide de la question **1**, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $f^{(n)}(0)$ en fonction de n.

6 - Soit $g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cosh(\sqrt{-x})$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer un développement limité de la fonction g à l'ordre n en 0.

b) On admet que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^-$.
On définit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $h(x) = f(x)$ si $x \geqslant 0$ et $h(x) = g(x)$ si $x < 0$.
Montrer que la fonction h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

c) Donner, aussi précisément que possible, l'allure du graphe de la fonction h sur un intervalle convenable.

FIN DU PROBLÈME

La suite aurait pu consister en une étude plus fine des polynômes P_n et Q_n, visant par exemple à déterminer, en fonction de n, leurs degrés, leurs coefficients dominants, leurs coefficients constants...

Problème 41 **

Approximation de la constante d'Euler

[Suites numériques, théorème des accroissements finis]

Ce problème a pour objet une étude de la constante d'Euler notée γ.
Le théorème des accroissements finis intervient à plusieurs reprises. Vous devrez préciser chaque fois clairement pour quelle fonction et entre quelles bornes vous l'utilisez.
Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln n$.

Partie I

1 - a) Prouver pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'encadrement : $\frac{1}{k+1} \leq \ln \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k}$.
b) A l'aide d'un encadrement de $u_{n+1} - u_n$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leq u_n \leq 1$.
c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note γ sa limite (*constante d'Euler*).

2 - a) Étudier, sur l'intervalle $[k, k+1]$ ($k \in \mathbb{N}^*$), le signe de la fonction f_k définie par

$$f_k(x) = \frac{1}{k} + (\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k})(x-k) - \frac{1}{x}$$

b) En considérant une fonction F_k telle que $F_k' = f_k$, en déduire l'encadrement

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}).$$

c) Prouver que $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$.

3 - Déterminer un équivalent pour la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie II

4 - a) Après avoir étudié leurs variations, étudier le signe des fonctions g_1 et g_2 définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -\frac{1}{x+1} + \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{2x^2} \\ g_2(x) &= g_1(x) + \frac{2}{3x^3} \end{aligned}$$

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} \leq u_n - u_{n+1} \leq \frac{1}{2n^2}.$$

5 - Dans cette question $n \geq 2$ et $p \geq n$.
a) En utilisant le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $x \to \frac{1}{x}$ entre k et $k+1$ (k entier), former un encadrement de $\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2}$.
b) Former par une méthode analogue à celle de la question précédente un encadrement de $\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^3}$.
c) En déduire

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{3(n-1)^2} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

6 - Donner une valeur de l'entier n telle que l'encadrement précédent permette, à partir de u_n, de déterminer γ à moins de 10^{-2} près.

Problème 42 ***

Une construction de la fonction exponentielle népérienne

[Dérivation, récurrence]

L'objectif de ce problème étant la construction de la fonction exponentielle népérienne, aucun résultat relatif à l'existence ou aux propriétés des fonctions exponentielles ou logarithmes ne pourra être utilisé. Par contre, on disposera de tous les résultats classiques d'analyse, portant par exemple sur les suites numériques, les limites, la continuité et la dérivabilité des fonctions, y compris le théorème liant le sens de variation d'une fonction au signe de sa dérivée.

0 - Préliminaire

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant -n$. On définit la fonction $\varphi : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ en posant :

$$\varphi(h) = \left(1 + \frac{x+h}{n+1}\right)^{n+1} - (1+h)\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

a) Etudier les variations de la fonction φ et en déduire que, pour tout $h \in [-1, +\infty[$, $\varphi(h) \geqslant 0$.

b) Démontrer que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$.

c) On suppose $-n \leqslant x < n$. Montrer que :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \leqslant \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{-(n+1)} \leqslant \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} .$$

1 - Définition de $e(x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que la suite $(u_n(x))_{n \geqslant n_0}$ soit croissante et majorée. En déduire que la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

On notera désormais $e(x) = \lim_{n \to +\infty} u_n(x)$.

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e(x) > 0$. Calculer $e(0)$.

2 - Dérivabilité de la fonction e

a) Démontrer que, pour $x \in \mathbb{R}$:

(i) $\forall h \in [-1, +\infty[$, $(1+h)e(x) \leqslant e(x+h)$;

(ii) $\forall h \in]-1, 1[$, $(1-h)e(x+h) \leqslant e(x)$;

(iii) $\forall h \in]-1, 1[$, $0 \leqslant e(x+h) - e(x) - h\,e(x) \leqslant \frac{h^2}{1-h} e(x)$.

b) En déduire que la fonction e est dérivable, et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

3 - Propriété algébriques

a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $e(-x)e(x+y) = e(y)$

b) En déduire que la fonction e induit un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers le groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Problème 43 ***

Groupes à 2, 3, 4 éléments

[Théorie des ensembles, dénombrement]

Soit G un ensemble fini. Si $\star$ est une loi de composition interne (LCI) sur l'ensemble G, on appellera table de la loi $\star$ le tableau $\mathbf{T}_\star$ci-dessous, où on lit dans la ligne x et la colonne y le «produit» $x \star y$ (dans cet ordre).

$\star$	e	$\dots$	y	$\dots$
e	$e \star e$		$e \star y$	
$\vdots$				
x	$x \star e$		$x \star y$	
$\vdots$				

$\mathbf{T}_\star$ (table de la loi $\star$)

On recherche les lois de composition interne $\star$ sur G telles que $(G, \star)$ est un groupe, c'est-à-dire :

(i) la loi $\star$ est associative,

(ii) la loi $\star$ admet un élément neutre dans G,

(iii) tout élément $g \in G$ possède un symétrique dans G (que l'on notera g^{-1}) pour la loi $\star$.

On suppose que $\star$ est une telle loi. On notera désormais e l'élément neutre de G pour la loi $\star$. On le fera toujours apparaître en première position dans la table $\mathbf{T}_\star$.

1 - a) Soit $x \in G$ fixé. Montrer que $f_x : G \to G,\ y \mapsto x \star y$ est bijective (on déterminera la bijection réciproque). Que peut-on en déduire sur les lignes de la table de la loi $\star$?

b) Soit $x \in G$ fixé. Montrer de même que $h_x : G \to G,\ y \mapsto y \star x$ est bijective. Que peut-on en déduire sur les colonnes de la table de la loi $\star$?

2 - a) On suppose ici que G est de cardinal 2. On note $G = \{e, a\}$. Démontrer que la table de la loi $\star$ est nécessairement la table ci-dessous :

$\star$	e	a
e	e	a
a	a	e

Table d'un groupe de cardinal 2

On expliquera clairement pourquoi il n'y a qu'une façon possible de remplir la table $\mathbf{T}_\star$.

b) On suppose ici que G est de cardinal 3. On note $G = \{e, a, b\}$.

(i) Montrer que $a \star a = b$ (on pourra raisonner par l'absurde en essayant de remplir la table $\mathbf{T}_\star$).

(ii) En déduire qu'il n'y a qu'une table possible pour la loi $\star$.

3 - On suppose ici que G est de cardinal 4. On va distinguer deux «familles» de loi de groupe sur G.

a) On suppose ici que, pour tout $x \in G$, $x \star x = e$. On note $G = \{e, a, b, c\}$. Montrer qu'il n'y a dans ce cas qu'une table $\mathbf{T}_\star$ possible.

b) On suppose ici qu'il existe $a \in G$ tel que $a \star a \neq e$. On pose $b = a \star a$.

(i) Montrer que $b \neq a$. On note alors c le quatrième élément de G.

(ii) Montrer qu'il n'y a qu'une façon possible de remplir la table de $\star$.

c) (subsidiaire) Combien existe-t-il de lois de composition interne sur G de cardinal 4 telles que $(G, \star)$ soit un groupe ?

Problème 44
Sous-groupe distingué, groupe quotient

[Groupes, dénombrement]

On fixe dans cet exercice deux groupes $(G, \cdot)$ et $(G', \cdot')$ notés multiplicativement. On considère H un sous-groupe de G et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

Pour $x \in G$, on note $xH = \{xh\ ;\ h \in H\}$ et $Hx = \{hx\ ;\ h \in H\}$.

1 - Autour du théorème de Lagrange.

a) Pour x et y dans G, on note $x \equiv_H y$ si, et seulement si, il existe $h \in H$ tel que $x = yh$. Montrer que $\equiv_H$ est une relation d'équivalence sur G, et que l'ensemble de ses classes d'équivalence est :

$$\mathscr{C}_H = \{xH;\ x \in G\}.$$

On suppose maintenant que le groupe G est fini, et on note $|G| = \operatorname{Card} G$ son ordre.

b) Montrer que $\mathscr{C}_H$ est fini, et que $|G| = |H|.\operatorname{Card}\mathscr{C}_H$. En déduire le théorème de Lagrange.

c) On suppose ici $H = \ker f$. Montrer que, pour tout $y \in G'$, l'image réciproque $f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble vide ou un élément de $\mathscr{C}_H$. En déduire l'égalité :

$$|G| = |\ker f|.|\operatorname{im}\ f|\ .$$

2 - Sous-groupes distingués

On dit que H est un sous-groupe *distingué* de G si, pour tout $x \in G$ et tout $h \in H$, $xhx^{-1} \in H$.

a) Montrer que H est un sous-groupe distingué si, et seulement si : $\forall x \in G,\ xH = Hx$.

b) Montrer que, si $(G', \cdot)$ est un groupe et $f : G \to G'$ un morphisme de groupe, alors $\ker f$ est un sous-groupe distingué de G.

c) Donner un exemple de groupe admettant un sous-groupe non distingué (on pourra penser à un groupe de permutations).

3 - Groupe quotient

On supose désormais (jusqu'à la fin du problème) que H un sous-groupe distingué de G. Si A et B sont deux partie de G, on note $A \star B = \{ab\ ;\ (a, b) \in A \times B\}$

a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in G^2$, $(xH) \star (yH) = (xy)H$.

b) En déduire que $(\mathscr{C}_H, \star)$ est un groupe.

c) On note $\pi : G \to \mathscr{C}_H$ l'application définie par $\pi(x) = xH$. Montrer que π est un morphisme de groupes de $(G, \cdot)$ dans $(\mathscr{C}_H, \star)$. Préciser son noyau et son image.

4 - Propriété universelle du groupe quotient

a) Montrer que, s'il existe un morphisme de groupes $g : \mathscr{C}_H \to G'$ tel que $f = g \circ \pi$, alors $H \subset \ker f$.

b) Réciproquement, on suppose $H \subset \ker f$. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $g : \mathscr{C}_H \to G'$ tel que $f = g \circ \pi$.

c) Avec les hypothèses précédentes, montrer que :

(i) g est surjectif $\Leftrightarrow$ f est surjectif ;

(ii) g est injectif $\Leftrightarrow$ f est surjectif .

On dit que $(\mathscr{C}_H, \star)$ est le groupe quotient de $(G, \cdot)$ par le sous-groupe H, et on le note en général G/H. Nous avons par exemple étudié en cours le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On peut aussi définir le groupe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et montrer qu'il est isomorphe au groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1...

Problème 45 $\ast$

Le morphisme de décalage des suites

[Algèbre linéaire, suites numériques]

Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$ et bornées.

1 - Montrer que $\mathscr{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (muni de sa structure habituelle de $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

2 - Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de $\mathscr{B}$, on note $T(u)$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ [T(u)]_n = u_{n+1}.$$

a) Montrer qu'on définit ainsi une application $T : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$, et que cette application est linéaire.
b) Déterminer le noyau de T. S'agit-il d'une application injective ?
c) Déterminer l'image de T. S'agit-il d'une application surjective ?

3 - Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On dit que λ est une *valeur propre* de l'endomorphisme T s'il existe un élément $u \in \mathscr{B}$ tel que :

$$u \neq 0_{\mathscr{B}} \quad \text{et} \quad T(u) = \lambda u.$$

a) Montrer que λ est une valeur propre de T si, et seulement si, $\ker(T - \lambda \mathrm{Id}_{\mathscr{B}}) \neq \{0_{\mathscr{B}}\}$.
b) On pose ici $\lambda = \frac{1}{2}$. Déterminer toutes les suites $u \in \mathscr{B}$ telles que $T(u) = \frac{1}{2}u$.
c) On pose ici $\lambda = 2$. Déterminer toutes les suites $u \in \mathscr{B}$ telles que $T(u) = 2u$.
d) On revient au cas général. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le nombre complexe λ pour que λ soit une valeur propre de l'endomorphisme T.

4 - Soit $S : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ une application linéaire telle que $T \circ S = \mathrm{Id}_{\mathscr{B}}$.
a) Montrer, par un exemple, qu'une telle application existe (on pourra se contenter de définir l'application S, sans prouver qu'elle est linéaire).
b) Montrer (dans le cas général) que l'endomorphisme $S \circ T$ est un projecteur de $\mathscr{B}$.
c) Montrer que $\ker(S \circ T) = \ker T$ et $\mathrm{im}\ (S \circ T) = \mathrm{im}\ S$.
d) Que peut-on dire de l'injectivité et de la surjectivité de l'application S ?

Problème 46 **

Algèbre linéaire dans l'espace des polynômes

[Algèbre linéaire, suites numériques, arithmétique dans $\mathbb{Z}$]

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels, que l'on munit de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'objectif de ce problème est l'étude de l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P'' - XP' \end{array}.$$

En vue de simplifier la rédaction, on pourra noter, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $P_f = f(P)$.

1 - a) Montrer que f est une application linéaire.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $f(X^n)$. En déduire, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, le degré de $f(P)$ et son coefficient dominant, en fonction de ceux de P.
c) Déterminer le noyau de l'application f.
d) L'application f est-elle surjective ? *[On ne demande pas de déterminer son image.]*

2 - Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit pair (resp. impair) si ses coefficients de degrés impairs (resp. pairs) sont tous nuls. On note $\mathscr{P}_X$ et $\mathscr{I}_X$ (c'est un "i"), respectivement, l'ensemble des polynômes pairs et celui des polynômes impairs de $\mathbb{R}[X]$.
a) Montrer que $P \in \mathscr{P}_X \;\Leftrightarrow\; P(-X) = P(X)$ et $P \in \mathscr{I}_X \;\Leftrightarrow\; P(-X) = -P(X)$.
b) Montrer que les sous-espaces $\mathscr{P}_X$ et $\mathscr{I}_X$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
c) Montrer que les sous-espaces $\mathscr{P}_X$ et $\mathscr{I}_X$ sont stables par l'application f.

3 - On note $\tilde{f} : \mathscr{I}_X \to \mathscr{I}_X$ l'application induite par f.
a) Déterminer le noyau de $\tilde{f}$.
b) Montrer que l'application $\tilde{f}$ est surjective. On pourra montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que le sous-espace $\mathscr{I}_X \cap \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ est contenu dans l'image de $\tilde{f}$.
c) L'application $\tilde{f}$ est donc un automorphisme de $\tilde{f}$. Déterminer les images, par l'automorphisme réciproque $\tilde{f}^{-1}$, des polynômes X, X^3, X^5.

4 - On va maintenant chercher à déterminer l'image de l'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$. Pour cela, on se donne une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, et on définit l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k P^{(k)}(0) \end{array}.$$

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que le réel $\varphi(P)$ est bien défini, et l'exprimer en fonction des coefficients du polynôme P.
b) Montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur f, et qu'elle est surjective.
c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée k-ième du polynôme $f(P)$ en fonction des dérivées successive de P. En déduire une expression du réel $\varphi \circ f(P)$ en fonction des dérivées succesives de P.
d) Montrer que $\operatorname{im} f \subset \ker \varphi$ si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \circ f(X^k) = 0$. Montrer que cette dernière condition se ramène à une relation de récurrence portant sur la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
e) En déduire que le noyau de φ contient l'image de f si, et seulement si :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ \lambda_{2k+1} = 0 \text{ et } \lambda_{2k} = \frac{\lambda_0}{2^k k!}.$$

f) Montrer enfin que $\operatorname{im} f = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{2^k k!} = 0 \right\}$.

On pourra s'inspirer de la démarche de la question **3 - b)**.

Problème 47

Une équation différentielle

[Equations différentielles, algèbre linéaire]

On note $\mathscr{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables deux fois, et E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables deux fois et solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + 2xy' + x^2y = 0 \quad (H).$$

1 - a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) Soit $f \in E$. On définit la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = f'(x) + xf(x)$. Montrer que $\tilde{f} \in E$.

On définit ainsi une application $U : E \to E,\ f \mapsto \tilde{f}$. On admet que c'est une application linéaire.

2 - a) Montrer que U est une symétrie vectorielle de E.

b) On note F l'ensemble des fonctions appartenant à E et solutions de l'équation différentielle $(H_1)\ :\ y' + (x-1)y = 0$, et G l'ensemble des fonctions appartenant à E et solutions de l'équation différentielle $(H_2)\ :\ y' + (x+1)y = 0$.

Montrer, à l'aide de la question précédente, que $E = F \oplus G$.

c) Résoudre les équations différentielles (H_1) et (H_2). En déduire l'ensemble E.

3 - Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2xy' + x^2y = x^4 + 2.$$

Problème 48
Pseudo-inverse d'une application linéaire

[Algèbre linéaire]

L'objet du problème est de généraliser la notion d'inverse d'une application linéaire.
Soit E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

1 - Soit E' un supplémentaire dans E de $\ker u$ et F' un supplémentaire dans F de $\mathrm{im}\ u$.

a) Prouver que l'application induite $\tilde{u} : E' \to \mathrm{im}\ u,\ x \mapsto u(x)$ est un isomorphisme.

b) Soit $y \in F$. Prouver qu'il existe un couple unique $(x', y') \in E' \times F'$ tel que $y = u(x') + y'$.
L'élément x' est alors noté $v(y)$.

c) Prouver que l'on définit ainsi une application linéaire $v : F \to E$.

d) Que dire de v lorsque u est un isomorphisme ?

2 - On revient à $u \in \mathscr{L}(E, F)$ quelconque, et on considère l'application $v \in \mathscr{L}(F, E)$ définie à la question précédente.

a) Déterminer le noyau et l'image de v.

b) Prouver que $u \circ v \circ u = u$ et que $v \circ u \circ v = v$.

On dit que le morphisme v est un pseudo-inverse de u.

3 - Réciproquement, soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, E)$ tels que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

a) Prouver que $u \circ v$ et $v \circ u$ sont des projecteurs dont on précisera le noyau et l'image (en fonction de ceux de u et v).

b) En déduire que $E = \ker u \oplus \mathrm{im}\ v$ et $F = \mathrm{im}\ u \oplus \ker v$.

c) On note $\tilde{u} : \mathrm{im}\ v \to \mathrm{im}\ u$ et $\tilde{v} : \mathrm{im}\ u \to \mathrm{im}\ v$ les applications induites par u et v.
Montrer que $\tilde{v}$ est l'isomorphisme réciproque de $\tilde{u}$.

Problème 49
Supplémentaires en dimension finie

[Algèbre linéaire]

Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$. En particulier, $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$; c'est donc un ensemble infini. On fixe également un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, de dimension *finie*.

On dit que A est un sous-espace vectoriel *strict* de E si A est un sous-espace vectoriel de E et $A \neq E$. On dit que A est un hyperplan de E si, de plus, $\dim A = \dim E - 1$ (aucune autre caractérisation ne sera ici nécessaire).

A - Préliminaire

1 - *(Question de cours)*
Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E, et $\varphi : A \times B \to E,\ (a, b) \mapsto a + b$.
a) Montrer que l'application φ est linéaire ; préciser son image.
b) Montrer, en précisant l'isomorphisme, que $\ker \varphi$ est isomorphe à $A \cap B$.
c) En déduire la formule de Grassmann.

2 - a) Soit A un sous-espace vectoriel de E, et $x \in E \setminus A$. Montrer que $\dim(A + \mathrm{vect}\{x\}) = \dim A + 1$.
b) On suppose $\dim E \geqslant 2$. Soient A et B deux hyperplans distincts de E. Montrer que $A \cap B$ est un hyperplan de B.
c) Soit A un sous-espace vectoriel strict de E. Montrer qu'il existe un hyperplan de E contenant A.

B - Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel fixé

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On veut montrer que l'ensemble des supplémentaires de B est en bijection avec l'ensemble $\mathscr{L}(A, B)$ des applications linéaires de A dans B.

1 - Soit $f \in \mathscr{L}(A, B)$, et $\varphi_f : A \to E,\ a \mapsto a + f(a)$. On note $A_f = \mathrm{im}\ \varphi_f$.
a) Montrer que φ_f est linéaire et injective. En déduire $\dim A_f$.
b) Montrer que A_f est un supplémentaire de B.

2 - a) Montrer que, si f et g sont deux applications linéaires de A dans B, alors $A_f = A_g \Rightarrow f = g$.
b) Soit C un supplémentaire quelconque de B, et $p \in \mathscr{L}(E)$ le projecteur sur B parallèlement à C. On note $f \in \mathscr{L}(A, B)$ l'application de A dans B induite par $-p$. Montrer que $A_f = C$.

3 - Conclure, en précisant le rôle des questions précédentes.

4 - a) Montrer que, si $\dim E \geqslant 2$, l'ensemble des hyperplans de E est infini.
b) *(Hors programme et hors barême)* Dans le cas où le corps $\mathbb{K}$ est fini de cardinal q, et E de dimension n, montrer que E est fini. Combien a-t-il d'éléments ?
Combien un sous-espace vectoriel B de dimension s admet-il de supplémentaires ?
Pourquoi le résultat qui est l'objectif de la partie **C** est-il faux dans ce cas ?

C - Existence d'un supplémentaire commun

Dans cette partie, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que, si $A_1, \dots, A_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E de même dimension $m \in [\![1, \dim E - 1]\!]$, alors il existe un sous-espace vectoriel B qui est un supplémentaire de *chacun* des A_i.

1 - On se place ici dans le cas où $\dim E = 2$.
Dans ce cas, pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, A_i est une droite vectorielle (et aussi un hyperplan).

Montrer qu'il existe dans E une droite B distincte de $A_1, \dots, A_p$, puis que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, B est un supplémentaire de A_i dans E.

2 - On suppose maintenant $\dim E \geqslant 2$.
a) Montrer que, si $A_1, \dots, A_p$ sont des hyperplans de E, alors $A_1 \cup \dots \cup A_p \neq E$.
[On pourra raisonner par récurrence, et utiliser le résultat de la question **B 4-a)***.]*
b) On suppose seulement que $A_1, \dots, A_p$ sont des sous-espaces vectoriels stricts de E.
Montrer que $A_1 \cup \dots \cup A_p \neq E$.

3 - On suppose maintenant que $A_1, \dots, A_p$ sont de même dimension $m \in [\![1, \dim E - 1]\!]$. On veut montrer le résultat annoncé, à savoir l'existence d'un supplémentaire commun à $A_1, \dots, A_p$.
On se propose de raisonner par récurrence sur la codimension des A_i dans E.
a) Montrer le résultat si les A_i sont des hyperplans de E.
b) Montrer le résultat dans le cas général.

Problème 50 **

Commutant des endomorphismes cycliques

[Algèbre linéaire, anneaux]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $u : E \to E$ un endomorphisme de E.
On notera Id_E l'endomorphisme identité de E. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera u^n pour $u \circ \ldots \circ u$ (n facteurs), et on notera, selon la convention usuelle, $u^0 = \mathrm{Id}_E$.

A - Etude du commutant d'un endomorphisme

On appelle commutant de u l'ensemble $\mathrm{Z}(u)$ des endomorphismes de E qui commutent avec u :

$$\mathrm{Z}(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}.$$

0 - Déterminer $\mathrm{Z}(\mathrm{Id}_E)$.

1 - a) Montrer que $\mathrm{Z}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
b) Montrer que $\mathrm{Z}(u)$ est stable par la loi de composition «$\circ$». En déduire que c'est un sous-anneau de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$.
c) Soit $v \in \mathrm{Z}(u)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par v si $v(F) \subset F$.
Montrer que le noyau et l'image de u sont stables par v.

2 - Pour tout polynôme $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$, (où n est un entier supérieur ou égal au degré de P), on définit un endomorphisme de E, noté $P(u)$, en posant :

$$P(u) = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + \ldots + a_n u^n.$$

On note $\mathscr{P}_u = \{P(u)\,;\ P \in \mathbb{R}[X]\}$.
a) Montrer que $u \in \mathrm{Z}(u)$.
b) En déduire que $\mathscr{P}_u \subset Z(u)$. *[On pourra commencer par les polynômes de type X^n, pour $n \in \mathbb{N}$.]*
c) L'inclusion établie à la question précédente peut-elle être stricte ? *[On demande un résultat justifié avec précision.]*

B - Etude des endomorphismes cycliques

On dit que u est un endomorphisme cyclique de E s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\mathscr{F}_x = (x, u(x), u^2(x))$ soit une base de E.
Le but de cette partie est de montrer que, si u est un endomorphisme cyclique, alors $\mathrm{Z}(u) = \mathscr{P}_u$.
On suppose donc que u est un endomorphisme cyclique, et on fixe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\mathscr{F}_x = (x, u(x), u^2(x))$ soit une base de E.

3 - Soit $v \in \mathrm{Z}(u)$.
a) Montrer qu'il existe des réels α, β, γ tels que $v(x) = \alpha x + \beta u(x) + \gamma u^2(x)$.
b) Montrer que $v = \alpha \mathrm{Id}_E + \beta u + \gamma u^2$. *[On pourra considérer l'image par les endomorphismes v et $\alpha \mathrm{Id}_E + \beta u + \gamma u^2$ de chacun des vecteurs de la base $\mathscr{F}_x$.]*

4 - Montrer que $\mathrm{Z}(u) = \mathscr{P}_u$.

C - Un exemple

Etant donné un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit le polynôme $u(P) = [XP(X)]'$.

5 - a) Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme u de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ (dont on rappellera la dimension).

b) Calculer le déterminant : $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$.

c) Etant donnés des réels a, b, c, on pose $P = a + bX + cX^2$. On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le déterminant, dans cette base, de la famille $(P, u(P), u^2(P))$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b et c pour que la famille $(P, u(P), u^2(P))$ soit une base de E.

d) En déduire que u est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}_2[X]$.

6 - Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui commute avec u. Montrer qu'il existe des réels α, β, γ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad v(P) = \alpha P + \beta X P' + \gamma X^2 P''.$$

D - Deux autres exemples

7 - On suppose que u est un endomorphisme nilpotent de E, et plus précisément que $u^2 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que u est un endomorphisme cyclique.
[On pourra considérer un vecteur $x \in E \setminus \ker(u^2)$.]

8 - On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Déterminer l'ensemble $Z(A)$ des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice A.
[On pourra étudier l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.]

Problème 51
Etude d'une matrice

[Algèbre linéaire, matrices]

On considère la matrice à coefficients réels $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$.

On note les éléments de $\mathbb{R}^3$ sous forme de matrices colonnes : par exemple, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On note $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On note $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $\forall X \in \mathbb{R}^3 \; u(X) = AX$.
On note enfin $\ker A$ et $\mathrm{im}\; A$ le noyau et l'image de u.

1 - a) Déterminer le noyau de A. On précisera sa dimension, et on en donnera une base.
b) En déduire le rang de A.
c) Calculer A^2 et A^3. Observer une relation liant A et A^3.

2 - On considère un couple (λ, X), où λ est un réel, et $X \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul tel que $AX = \lambda X$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n X = \lambda^n X$.
b) En déduire que $\lambda^3 = \lambda$. Quelles sont les valeurs possibles de λ ?
On notera ces valeurs λ_1, λ_2, λ_3. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose $E_{\lambda_i} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = \lambda_i X\}$.
c) Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, déterminer E_{λ_i}. On montrera que E_{λ_i} est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$, dont on donnera un vecteur directeur e_i.

3 - On considère la famille $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ obtenue à la question **2 - c)** .
a) Démontrer que la famille $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Ecrire la matrice D de l'application u_A dans la base $\mathscr{E}$.
c) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{E}$.
d) Calculer la matrice de passage Q de la base $\mathscr{E}$ à la base $\mathscr{C}$. Que peut-on dire des matrices P et Q ?
e) Ecrire une relation liant les matrices A, D, P et Q.

Problème 52
b, a, ba

[Matrices]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$; soient a, b, c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

On considère le vecteur $w = ae_1 + be_2 + ce_3$, et l'application linéaire $u : E \to E$ dont la matrice, dans la base $\mathscr{E}$, est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}.$$

1 - a) Calculer la matrice $A^2 + I$ (où $I \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ désigne la matrice unité).

b) En déduire que, pour tout vecteur $x \in E$, il existe un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u \circ u(x) = \alpha w - x$. *(On pourra décomposer le vecteur x dans la base $\mathscr{E}$.)*

c) Déterminer le noyau de u, puis son rang.

2 - Soit $x \in E$ un vecteur.

a) Démontrer que la famille $(w, x, u(x))$ est une base de E si, et seulement si, $x \notin \ker u$.

b) On suppose $x \notin \ker u$. Déterminer la matrice de l'application u dans la base $(w, x, u(x))$.

3 - On considère la matrice $W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) Montrer qu'il existe une infinité de $\mathscr{B}$ de E telles que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = W$.
Déterminer l'ensemble X de ces bases.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{P} = \{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \; ; \; (\mathscr{B}, \mathscr{B}') \in X^2\}$.
(où $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ désigne la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$)

c) L'ensemble $\mathscr{P}$ est-il un sous-groupe du groupe $(GL_3(\mathbb{R}), \cdot)$?

Problème 53
Deux suites vérifiant un système de relations de récurrence

[Suites numériques, matrices]

On veut déterminer les deux suites réelles u et v définies par $u_0 = v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$$

On va pour cela envisager deux méthodes. Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez.

1 - Première méthode

a) Montrer que la suite $w = u + v$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire une relation de récurrence vérifiée par la suite u, puis déterminer u et v.

2 - Deuxième méthode

On va considérer les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$.

a) Démontrer que la matrice $A - 2I$ est nilpotente (où I désigne la matrice identité d'ordre 2).

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de la matrice A^n en fonction de I, A et n (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton).

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$, puis exprimer U_n en fonction de U_0, U_1 et n.

d) Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Problème 54

Matrice de Vandermonde et applications

[Dimension finie, matrices, polynômes]

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ de sa base canonique $\mathscr{C} = (1, X, \dots, X^n)$, et le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$ de sa base canonique que l'on écrira $\mathscr{E} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$. On fixe enfin des réels $a_0, \dots, a_n$ deux à deux distincts.

1 - Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ l'application définie par $\varepsilon(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$.
a) Montrer que l'application ε est linéaire, injective, puis que c'est un isomorphisme.
b) Déterminer la matrice A de l'application ε dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{E}$. Que dire de cette matrice ?

2 - On veut étudier la famille $\mathscr{B} = (B_0, \dots, B_n)$ telle que, pour $i \in [\![0, n]\!]$, $B_i = (X + a_i)^n$.
Pour cela, on introduit l'application $\delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\delta(P) = (P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0))$. On admet qu'elle est linéaire.
a) Déterminer la matrice B de la famille $(\delta(B_0), \dots, \delta(B_1))$ dans la base $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.
b) Comparer les matrices A et ${}^tB$, et montrer que la famille $(\delta(B_0), \dots, \delta(B_1))$ est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$.
c) En déduire que la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et que δ est un isomorphisme.

3 - Soit $\mathscr{A} = \{\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X]) \mid \forall a \in \mathbb{R},\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P(X + a)) = [\varphi(P)](X + a)\}$.
a) Montrer que $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel et un sous-anneau, de $(\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X]), +, \circ, \perp)$. Montrer que, comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\mathscr{A}$ est de dimension finie.
b) On considère l'application $F : \mathscr{A} \to \mathbb{R}_n[X],\ \varphi \mapsto \varphi(X^n)$.
Montrer, à l'aide de la question **2**, que F est linéaire et injective.
c) Montrer que l'application $\gamma : P \mapsto P'$ est élément de $\mathscr{A}$, et en déduire que F est surjective. Déterminer alors la dimension de $\mathscr{A}$.

Problème 55 *

Des matrices semblables à leur inverse

[Algèbre linéaire, matrices]

D'après un sujet du concours des Mines de première année, 2002

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension 3**.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n fois).

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est **semblable** à la matrice B s'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$.

On rappelle que si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, si P est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathscr{B}'$ et de matrice B dans la base $\mathscr{B}$ alors $A = P^{-1}BP$ (c'est-à-dire, la matrice A est semblable à la matrice B).

Partie A

1 - On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B.

Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une relation réflexive, symétrique et transitive.

On pourra désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.

2 - Démontrer que deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.

3 - Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.

On considère l'application w de $\ker u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.

a) Montrer que $\operatorname{im} w \subset \ker u^i$.

b) En déduire que $\dim(\ker u^{i+j}) \leq \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$.

4 - Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\operatorname{rang} u = 2$.

a) Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **3b**.).

b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.

c) Écrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

5 - Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\operatorname{rang} u = 1$.

a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.

b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.

c) Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

6 - Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

7 - Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

8 - On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

9 - On suppose dans cette question que $\text{rang}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question **4.**, une matrice semblable à la matrice M.
b) Calculer M^3 et déterminer $\text{rang}(M)$.
c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.
d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

10 - On suppose dans cette question que $\text{rang}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

11 - Exemple : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.
a) Montrer que $\ker(u - id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2).
b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E, et écrire la matrice de u dans cette base.
c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

12 - Réciproquement, toute matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Problème 56

Trace et formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

[Matrices, développements limités]

On fixe dans ce problème un entier $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de sa structure canonique de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et de la multiplication habituelle des matrices.

On note $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^\star$ son dual.

Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle trace de A le réel :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

1 - a) Démontrer que l'application trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Démontrer que, pour toutes matrices A, B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
c) Calculer, en fonction des coefficients de A, le réel $\operatorname{tr}({}^tAA)$.
d) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Calculer, en fonction des coefficients de A, les réels $\operatorname{tr}(E_{i,j}A)$ et $\operatorname{tr}(AE_{i,j})$.

2 - a) Etant donnée une matrice $U \in M_n(\mathbb{R})$ **non nulle**, on définit $\tau_U : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto \operatorname{tr}(UA)$. Vérifier que τ_U est une forme linéaire, et déterminer la dimension de $H_U = \ker \tau_U$.
b) On construit ainsi une application :

$$T : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^\star \\ U & \mapsto & \tau_U \end{array}.$$

Montrer que T est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3 - Soit $r \in [\![0,n]\!]$; on note J_r la matrice carrée de taille n qui s'écrit par blocs : $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Rappeler le théorème de caractérisation du rang des matrices qui fait référence aux matrices du type J_r.

b) On pose $K = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer la matrice J_rK et sa trace.

4 - A l'aide des questions précédentes, démontrer que tout hyperplan H de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contient au moins une matrice inversible.

5 - *(bonus)* Démontrer que $\ker \operatorname{tr} = \operatorname{vect}\{AB - BA\,;\ (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2\}$.

Problème 57
Polynômes de Legendre

[Polynômes, développements limités]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme à coefficients réels $\Phi_n = (X^2 - 1)^n$ et son polynôme dérivé n-ième $P_n = \Phi_n^{(n)}$.

Par convention, on notera les polynômes en majuscules et les fonctions polynomiales associées en minuscules.

On fixe désormais $n \in \mathbb{N}$.

1 - a) Calculer les polynômes P_k pour $k \in [\![0, 4]\!]$.
b) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
c) Etudier, en fonction de n, la parité du polynôme P_n (rappelons que P_n est pair si $P_n(-X) = P_n$, et impair si $P_n(-X) = -P_n$).
d) Calculer $P_n(1)$.

2 - a) Montrer que le polynôme P_n admet au moins n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$.
On pourra démontrer par récurrence sur k une proposition portant sur le nombre de racines de $\Phi_n^{(k)}$ dans $]-1, 1[$.
b) Montrer que les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les seules racines réelles ou complexes de P_n. Que dire de leurs multiplicités ?

3 - a) En applicant la formule de Leibniz à Φ_{n+1} et Φ'_{n+1} , démontrer les relations suivantes :

$$P_{n+1} = 2(n+1)XP_n + 2(X^2 - 1)P'_n \quad (\star) \ ;$$
$$P'_{n+1} = 2(n+1)^2 P_n + 2(n+1)XP'_n \quad (\star\star).$$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation liant P_n, P'_n et P''_n.
c) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les polynômes P_n et P'_n en fonction de P_{n+1} et P'_{n+1}.

4 - On note $\beta_1 < \dots < \beta_{n+1}$ les racines du polynôme P_{n+1}.
a) Déterminer, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, le signe de $P'_{n+1}(\beta_i)$ en fonction de i et n.
b) En déduire, pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, le signe de $P_n(\beta_i)$, puis démontrer que les racines $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ de P_n s'intercalent entre celles de P_{n+1}.

5 - On note α_1, $\beta_1 < \beta_2$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$ et $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \delta_4$ les racines respectives de P_1, P_2, P_3 et P_4.
a) Ranger toutes ces racines dans l'ordre croissant, en précisant bien sûr celles qui sont égales. Il pourra être utile de déterminer le signe de $P_4(\gamma_3)$.
b) On note $Q_n = \frac{1}{P_n(1)} P_n$, et $q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale associée.
Sur une même figure de taille respectable, et à l'aide des questions précédentes, tracer l'allure des courbes représentatives sur le segment $[-1, 1]$ des fonctions q_k, pour $k \in [\![0, 4]\!]$.

Problème 58
Polynômes et trigonométrie

[Relations entre coefficients et racines d'un polynôme]

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $P_n = i(X-i)^{2n+1} - i(X+i)^{2n+1}$.

1 - a) Montrer que P_n est un polynôme à coefficients réels, dont on étudiera la parité.
b) Déterminer les coefficients de P_n, en particulier ceux de plus haut et de plus bas degré.

2 - a) Rechercher les racines réelles de P_n ; on précisera le signe de chacune de ces racines.
b) En déduire la factorisation de P_n en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
c) Obtenir alors la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \tan \frac{k\pi}{2n+1}$.

3 - On pose maintenant $\displaystyle u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right)$, et $\displaystyle v_n = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi}{2n+1}$.
a) Exprimer u_n à l'aide du nombre $P_n(i)$.
b) En déduire la valeur de v_n en fonction de n.

Problème 59
Polynômes prenant des valeurs entières sur $\mathbb{Z}$

[Polynômes]

A - Une famille de polynômes

On considère la suite de polynômes $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$E_0 = 1 \quad , \quad E_1 = X \quad \text{et, pour tout } k \geqslant 2, \quad E_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer les racines réelles de E_k, en précisant leurs multiplicités.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer que la famille $(E_0, \dots, E_n)$ est libre, puis que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit toujours $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n, et $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ ses coordonnées dans la base $(E_0, \dots, E_n)$.

Exprimer les réels $P(0), \dots, P(n)$ à l'aide de $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ et de coefficients binomiaux. En déduire, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, une expression λ_k en fonction de $P(k)$ et des $P(i)$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

[On pourra traiter à part le cas où $k = 0$.]

d) Ici $n = 3$. Calculer les coordonnées des polynômes 1, X, X^2 et X^3 dans la base (E_0, E_1, E_2, E_3).

B - Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P^δ le polynôme défini par :

$$P^\delta = P^\delta(X) = P(X+1) - P(X).$$

On note $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P^\delta$.

a) Montrer que Δ est linéaire.

b) Calculer E_0^δ. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, E_k^δ en fonction de E_{k-1}.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ.

On note $\Delta_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application induite. Déterminer son image et son noyau.

d) En déduire que Δ est une application surjective, et préciser son noyau.

C - Polynômes entiers, polynômes à coordonnées entières

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. On dit que P est un polynôme entier si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$.

On fixe $N \geqslant \deg P$, et on note $(\lambda_0, \dots, \lambda_N)$ les coordonnées de P dans la base $(E_0, \dots, E_N)$ de $\mathbb{R}_N[X]$. On dit que P est un polynôme à coordonnées entières si les réels $\lambda_0, \dots, \lambda_N$ sont des entiers relatifs.

L'objectif de cette partie est de montrer que le polynôme P est entier si, et seulement si, il est à coordonnées entières. Pour cela, on sera amené-e à utiliser les résultats des parties précédentes.

a) Montrer que P est un polynôme entier si, et seulement si, $P(0) \in \mathbb{Z}$ et P^δ est un polynôme entier.

b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le polynôme E_k est entier.

c) Montrer que, si P est à coordonnées entières, alors P est un polynôme entier.

d) Montrer que P est un polynôme à coordonnées entières si, et seulement si, $P(0) \in \mathbb{Z}$ et P^δ est à coordonnées entières.

e) En déduire que, si P est un polynôme entier, alors P est à coordonnées entières.

D - Un résultat plus fort

On fixe $N \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $\deg P \leqslant N$. On suppose seulement que les valeurs $P(0), \ldots, P(N)$ sont des entiers relatifs.

a) A l'aide de la partie **A**, montrer que P est à coordonnées entières.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$.

E - Bonus

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles, et $N \in \mathbb{N}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = P(k)$;

(ii) pour tout entier $n \geqslant N+1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} u_k = 0$.

Problème 60 ***

Les nombres de Bernoulli

[Algèbre linéaire, polynômes, dérivation, intégration]

D'après une épreuve du concours de l'ENS Fontenay-Saint Cloud, 1984.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{Q}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients rationnels de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que tous les résultats vus en cours sur les polynômes sont vrais, en particulier, dans $\mathbb{Q}[X]$.

A - Questions préliminaires

a) Montrer que, si P et Q sont des polynômes à coefficients rationnels tels que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $P(k) = Q(k)$, alors $P = Q$.

b) Soit $f : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que f'' s'annule, sur $]0, 1[$, uniquement au point $\frac{1}{2}$, et qu'elle change de signe en $\frac{1}{2}$. On suppose de plus que $f(0) = f(\frac{1}{2}) = f(1) = 0$. Montrer alors que f s'annule, sur $]0, 1[$, uniquement au point $\frac{1}{2}$, et qu'elle change de signe en $\frac{1}{2}$.
Préciser le signe de f à gauche et à droite de $\frac{1}{2}$ en fonction de celui de f''.

B - Les polynômes de Bernoulli

On fixe, dans cette partie, un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1 - Pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$, on définit le polynôme $\Delta(P) = P(X) - P(X - 1)$.

a) Montrer qu'on définit ainsi une application linéaire $\Delta : \mathbb{Q}_{n+1}[X] \to \mathbb{Q}_{n+1}[X]$.

b) Soit $P \in \mathbb{Q}_{n+1}[X]$ un polynôme de degré $d \in [\![0, n + 1]\!]$ et de coefficient dominant $\alpha \neq 0$. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $\Delta(P)$.

c) Déterminer le noyau de l'aplication Δ.

d) Déterminer l'image de l'application Δ (on pourra utiliser le théorème du rang).

e) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}_{n+1}[X]$, $\Delta(P') = [\Delta(P)]'$.
[On note P' le polynôme dérivé de P.]

2 - a) Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(k) = \sum_{i=0}^{k-1} i^n$;

(ii) $\Delta(P) = (X - 1)^n$ et $P(1) = 0$.

[Pour prouver (i)→(ii)*, on pourra calculer $[\Delta(P)](k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$.]*

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{Q}_{n+1}[X]$ qui vérifie ces propositions. On le notera désormais Q_n.

c) Déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n.

d) Montrer que $Q_n(0) = Q_n(1) = 0$.

e) Déterminer Q_1 et Q_2 ; vérifier que $Q_3 = \frac{X^2(X-1)^2}{4}$.

3 - Soit un entier $n \geqslant 2$.

a) Calculer le polynôme $\Delta(Q'_n - nQ_{n-1})$.

b) En déduire qu'il existe un nombre rationnel a_n tel que $Q'_n + a_n = nQ_{n-1}$.

4 - On a ainsi défini une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes telle que :

$$Q_1 = \frac{X(X-1)}{2} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} Q''_{n+1} = (n+1)Q'_n \\ Q_{n+1}(0) = Q_{n+1}(1) = 0 \end{cases}$$

Montrer que, si $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite de polynômes vérifiant la même propriété, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ R_n = Q_n.$$

C - Les nombres de Bernoulli

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tilde{Q}_n = Q_n(1-X)$.
a) Calculer $\tilde{Q}_1$, $\tilde{Q}_2$, $\tilde{Q}_3$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comparer $\Delta(\tilde{Q}_n)$ et $\Delta(Q_n)$, et en déduire une relation entre $\tilde{Q}_n$ et Q_n.
[On pourra utiliser les valeurs de Q_n et $\tilde{Q}_n$ en 0 , pour trouver une relation du type $\tilde{Q}_n = (-1)^? Q_n$.]
c) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Q_{2p}(\frac{1}{2}) = 0$, $Q'_{2p+1}(\frac{1}{2}) = 0$, et $a_{2p+1} = 0$.
d) Exprimer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, Q''_{2p+2} en fonction de Q_{2p}, et Q''_{2p+1} en fonction de Q_{2p-1} et a_{2p}.

2 - Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale associée au polynôme Q_n.
a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Établir que, sur le segment $[0,1]$, la fonction q_{2p} ne s'annule qu'en 0, $\frac{1}{2}$ et 1, et change de signe en $\frac{1}{2}$. Montrer que le signe de q_{2p} sur $]0, \frac{1}{2}[$ est celui de $(-1)^{p+1}$.
[On raisonnera par récurrence en utilisant la question 5d).]
b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction q_{2p+1} est de signe constant sur l'intervalle ouvert $]0,1[$, et que ce signe est celui de $(-1)^{p+1}$. Vérifier que c'est encore vrai pour $p = 0$.
c) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, a_{2p} n'est pas nul et qu'il est du signe de $(-1)^p$.

3 - On appelle B_p le rationnel positif $(-1)^p a_{2p}$. A l'aide de la question B-4, calculer les nombres B_1, B_2 et B_3 (on pourra établir que $a_n = n \displaystyle\int_0^1 Q_{n-1}(t)\, dt$).

D - Une méthode d'approximation des intégrales

Les polynômes Q_n et les nombres B_n sont ceux introduits dans la première partie. Parmi leurs propriétés, on utilisera uniquement les suivantes :

(i) $Q_1 = \frac{X(X-1)}{2}$;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q'_{2n+2} + (-1)^{n+1} B_{n+1} = (2n+2) Q_{2n+1}$;

(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q''_{2n+1} + (2n+1)(-1)^n B_n = (2n+1)(2n) Q_{2n-1}$;

(iv) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_{2n+1}(0) = Q_{2n+1}(1) = Q'_{2n+1}(0) = Q'_{2n+1}(1) = 0$;

(v) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynomiale q_{2n+1} est de signe constant sur $[0,1]$.

1 - Soit f une fonction 3 fois continuement dérivable sur le segment $[0,1]$. Montrer l'égalité :

$$f(1) - f(0) = \frac{f'(0) + f'(1)}{2} + \int_0^1 Q_1(x) f^{(3)}(x)\, dx.$$

2 - Soit n un entier naturel et f une fonction $2n+3$ fois continuement dérivable sur le segment $[0,1]$.
a) Montrer l'égalité : $f(1) - f(0) = \dfrac{f'(0) + f'(1)}{2} + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!} \left[f^{(2p)}(1) - f^{(2p)}(0) \right] + R_n$,

où le reste R_n est égal à l'intégrale : $\dfrac{1}{(2n+1)!} \displaystyle\int_0^1 Q_{2n+1}(x) f^{(2n+3)}(x)\, dx$.
[Par récurrence...]
b) On pose $M = \sup_{x \in [0,1]} |f^{(2n+3)}(x)|$. Justifier cette définition.
c) Montrer que la valeur absolue de R_n est majorée par $\frac{B_{n+1} M}{(2n+2)!}$.

3 - Établir, pour une fonction g $2n+2$ fois continuement dérivable sur un segment $[a, b]$ et un entier m supérieur ou égal à 2, la formule de calcul approché de l'intégrale :

$$\int_{x=a}^{b} g(x)\,dx = \frac{b-a}{2m}\left[g(a)+g(b)+2\sum_{k=1}^{m-1} g(a+k\frac{b-a}{m})\right]$$
$$+\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p B_p}{(2p)!}(\frac{b-a}{m})^{2p}\left[g^{(2p-1)}(b)-g^{(2p-1)}(a)\right]+R'_n$$

où la valeur absolue du reste R'_n est majorée par :

$$\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}m\Big(\frac{b-a}{m}\Big)^{2n+3}M', \quad \text{où } M' = \sup_{x\in[0,1]}|g^{(2n+2)}(x)|.$$

Problème 61

Polynômes de Hilbert, fractions rationnelles et séries télescopiques

[Fractions rationnelles, développements limités]

L'objectif de ce problème est de montrer que l'introduction de sommes télescopiques dans le problème «approximation rationnelle de π» ne relève pas du miracle mais d'une méthode généralisable. Pour autant, les deux problèmes sont totalement indépendants.

1 - Polynômes de Hilbert et développements asymptotiques

Rappelons que la suite $(H_d)_{d\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Hilbert unitaires est définie en posant $H_0 = 1$, $H_1 = X$ et, pour $d \geqslant 2$, $H_d = X(X-1)\dots(X-d+1)$.

Pour un entier $d \in \mathbb{N}$, on considérera la fraction rationnelle $J_d = \dfrac{1}{H_d}$.

On fixe, pour tout le problème, un entier $d \geqslant 2$.

a) Montrer que la fonction polynomiale $\tilde{H}_d$ admet, au voisinage de $+\infty$, un développement asymptotique sous la forme :

$$\tilde{H}_d(x) = x^d + \alpha x^{d-1} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(x^{d-2}\right) \qquad \text{(où } \alpha \text{ est un réel à calculer).}$$

b) Préciser le domaine de définition de la fonction rationnelle $\tilde{J}_d$, et montrer que celle-ci admet, au voisinage de $+\infty$, un développement asymptotique sous la forme :

$$\tilde{J}_d(x) = \frac{1}{x^d} + \frac{\beta}{x^{d+1}} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^{d+2}}\right).$$

c) Soit a un réel. Déterminer un développement asymptotique, sous la même forme, de la fonction rationnelle $x \mapsto J_d(x+a)$.

2 - Approximation d'une suite à l'aide des polynômes de Hilbert

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé, et $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite admettant un développement asymptotique sous la forme :

$$u_n = \frac{\lambda}{n^d} + \frac{\mu}{n^{d+1}} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{d+2}}\right) \qquad \text{(où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont réel, et } \lambda \neq 0\text{).}$$

a) Montrer qu'il existe un réel a, que l'on exprimera en fonction de λ, μ et d, tel que :

$$u_n - \lambda\tilde{J}_d(n+a) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{d+2}}\right).$$

b) Montrer enfin l'existence d'un entier n_1 et d'un réel M positifs tels que :

$$\forall n \geqslant n_1, \quad \left| u_n - \lambda\tilde{J}_d(n+a) \right| \leqslant M \,.\, \tilde{J}_{d+2}(n).$$

3 - Séries télescopique

Si (n,p) est un couple d'entiers tel que $p > n \geqslant n_1$, on note $v_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} u_k$, et $w_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} J_d(k+a)$.

a) Exprimer la fraction rationnelle $J_{d-1}(X-1) - J_{d-1}(X)$ en fonction de J_d.

b) En déduire, pour $p > n \geqslant n_1$, une expression simple de $w_{n,p}$.

c) On fixe désormais $n \geqslant n_1$. Montrer que, pour tout $p \geqslant n+1$,

$$\left| v_{n,p} - \lambda w_{n,p} \right| \leqslant \frac{M}{d+1}\left(\tilde{J}_{d+1}(n) - \tilde{J}_{d+1}(p)\right).$$

d) Montrer que la suite $(v_{n,p})_{p\geqslant n+1}$ est monotone à partir d'un certain rang, et bornée.
En déduire qu'elle converge.

e) On note $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \lim_{p\to+\infty} v_{n,p}$. Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \frac{\lambda}{d-1} J_{d-1}(n+a) \right| \leqslant \dfrac{M}{d+1} J_{d+1}(n)$.

4 - Exemple En appliquant ce raisonnement à la suite $u_n = \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}$, obtenir une méthode d'approximation de la constante γ d'Euler avec une précision en $\frac{1}{n^3}$.

Problème 62 ✻

Méthode de Newton

[Suites numériques, dérivation, comparaison des suites]

Soient deux réels $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbb{C}^2$, et Γ sa courbe représentative. On suppose :

(i) $f(a) < 0 < f(b)$;

(ii) $\forall x \in [a, b]\ f'(x) > 0$;

(iii) $\forall x \in [a, b]\ f''(x) > 0$.

1 - a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution ω dans l'intervalle $]a, b[$.

b) On pose $m_1 = \inf\limits_{[a,b]} f'$ et $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} f''$. Après avoir justifié (rapidement) leur existence, montrer que les réels m_1 et M_2 sont strictement positifs.

2 - On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à Γ au point d'abscisse x_n.

a) Représenter sur un dessin (de taille respectable) la construction de x_0, x_1, x_2, x_3.

b) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et à valeurs dans $]\omega, b]$. On pourra faire intervenir une application $\varphi :]\omega, b] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

c) Etudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et démontrer qu'elle converge vers ω

3 - a) Exprimer $x_{n+1} - \omega$ en fonction de $x_n - \omega$, et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < x_{n+1} - \omega \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(x_n - \omega)^2.$$

[On pourra utiliser une formule de Taylor entre deux points bien choisis.]

b) Montrer l'existence d'un entier N tel que $\dfrac{M_2}{2m_1}(x_N - \omega) < 1$. En déduire qu'il existe deux constantes $c > 0$ et $k \in]0, 1[$ telles que, pour *n assez grand*,

$$0 < x_n - \omega \leqslant c \cdot k^{2^n}.$$

c) Montrer en particulier que la suite $(x_n - \omega)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant n'importe quelle suite géométrique (ce qui donne une idée de la rapidité de convergence).

4 - Supposons avoir obtenu $c = 1$, $k = \frac{1}{2}$. Calculer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une valeur approchée de ω à 10^{-10} près ? à 10^{-100} près ? à 10^{-1000} près ?
On pourra comparer, par exemple, avec une suite géométrique de raison 10^{-10}...

5 - Questions complémentaires

a) Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un point fixe ω, et dérivable en ω. Montrer que, si $|g'(\omega)| < 1$, alors il existe un réel $r > 0$ tel que :

(i) l'intervalle $[\omega - r, \omega + r]$ est stable par r ;

(ii) pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $x_0 \in [\omega - r, \omega + r]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$, alors $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega$.

Montrer de plus que, avec les notations du *(ii)*, si $0 < \alpha < g'(\omega) < \beta$, alors $\alpha^n = \underset{n\to\infty}{o}(x_n - \omega)$ et $x_n - \omega = \underset{n\to\infty}{o}(\beta^n)$.

b) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbb{C}^2$ s'annulant en un point ω inconnu. Construire une fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ admettant ω pour point fixe. Construire une fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ admettant ω pour point fixe et telle que $|g'(\omega)| < 1$. Construire une fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ admettant ω pour point fixe et telle que $|g'(\omega)| = 0$.

Problème 63

Une fonction définie par une intégrale à paramètre

[Dérivation, intégration, primitives]

1 - Rappeler et démontrer l'égalité de Taylor avec reste intégral à l'ordre n (avec ses hypothèses), pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$, on note : $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos t)^n e^{x \cos t} dt.$

2 - Soit a un réel fixé. On veut étudier la dérivabilité de la fonction $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point a.

a) On fixe, pour cette question seulement, un réel t, et on note $\varphi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{x \cos t}$.

(i) Montrer que la fonction φ_t est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et déterminer les fonctions φ_t' et φ_t''.

(ii) En utilisant la question **1**, montrer qu'il existe une fonction $\alpha_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \varphi_t(x) = \varphi_t(a) + (x-a)\varphi_t'(a) + \alpha_t(x) \\ |\alpha_t(x)| \leqslant \frac{(x-a)^2}{2} e^{|x|+|a|} \end{cases}$$

b) En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f_0(x) = f_0(a) + (x-a)f_1(a) + \varepsilon(x) \\ |\varepsilon(x)| \leqslant \frac{(x-a)^2}{2} e^{|x|+|a|} \end{cases}$$

d) Montrer enfin que la fonction f_0 est dérivable en a, et que $f_0'(a) = f_1(a)$.

3 - Montrer, plus généralement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée est f_{n+1}. Que peut-on en déduire concernant f_0 ?

4 - Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que :

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos t)^n e^{x \cos t} dt$;

b) $f_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh(x \cos t) dt$; $\quad f_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t . \sinh(x \cos t) dt$;

c) si x est positif,

$f_0(x) \geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cosh(x \cos t) dt \geqslant \frac{2}{3} \cosh \frac{x}{2}$; $\quad f_1(x) \geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos t . \sinh(x \cos t) dt \geqslant \frac{1}{3} \sinh \frac{x}{2}$.

5 - Etudier les variations et branches infinies de f_0, et donner l'allure de sa courbe représentative.

6 - a) Montrer que la fonction f_0 est solution de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' - xy = 0.$$

b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $nf_n(0) = (n-1)f_{n-2}(0)$.

c) En déduire la valeur de $f_n(0)$ en fonction de n (on distinguera selon la parité de n ; on aura intérêt à émettre une conjecture qu'on démontrera ensuite de façon **rigoureuse**).

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_0 admet un développement limité à l'ordre n en 0, que l'on précisera.

Problème 64
Deux inégalités de convexité

[Intégration, primitives]

Les deux exercices proposés sont totalement indépendants.

A

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et telles que : $\forall x \in [0,1]\ f''(x) \leqslant 1$.

1 - Déterminer la partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ constituée des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et telles que : $\forall x \in [0,1]\ f''(x) = 1$.
Si $f \in \mathscr{F}$, déterminer f en fonction de $f(0)$ et $f(1)$.

2 - Soit $f \in \mathscr{E}$ fixé. On lui associe la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [0,1]\ g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} - (f(1) - f(0) - \frac{1}{2})x - f(0)$.
a) *Démontrer* que la fonction g est concave sur $[0,1]$.
b) En déduire que, pour tout $f \in \mathscr{E}$, on a : $f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1) \leqslant \frac{1}{4}$.

3 - Avec les notations de la question précédente, on suppose maintenant : $f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1) = \frac{1}{4}$.
Démontrer que $f \in \mathscr{F}$.

B - Inégalité de convexité de Hölder

Soient α, β deux réels strictement positifs fixés, tels que $\alpha + \beta = 1$.

1 - a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1 + e^x)$. Démontrer que f est convexe.
b) En déduire que, pour tout $(a, b, c, d) \in (\mathbb{R}^*)^4$, on a :

$$a^\alpha b^\beta + c^\alpha d^\beta \leqslant (a + c)^\alpha (c + d)^\beta.$$

2 - On fixe ici un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$.
a) Etablir l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\frac{1}{\beta}}\right)^\beta.$$

(On pourra raisonner par récurrence sur n, et utiliser le résultat précédent.)
b) Ecrire l'inégalité de Hölder pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, et en donner une interprétation géométrique.

Problème 65 **

Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan^2 x + \tan x + 1}\, dx$.

[Intégration, **A compléter !** *]*

1 - Déterminer les primitives de la fonction rationnelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\sqrt{3}x + 1}{\sqrt{3}x^2 - 2(1-\sqrt{2})x + \sqrt{3}(1-\sqrt{2})^2}.$$

2 - On considère le polynôme à coefficients réels $P = 3X^4 - 4\sqrt{3}X^3 + 14X^2 + 4\sqrt{3}X + 3$.

a) Déterminer deux polynômes $A \in \mathbb{R}_2[X]$ et $B \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

b) En déduire la factorisation de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.

[Si l'on n'a pas su répondre à la question précédente, rien n'empêche d'employer une autre méthode pour répondre à celle-ci !]

3 - Effectuer la «décomposition en éléments simples» de la fonction rationnelle $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad g(x) = \frac{3(x^2+1)^2}{xP(x)}.$$

4 - On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan^2 x + \tan x + 1}\, dx$.

a) Démontrer que l'intégrale I est bien définie.

b) Effectuer dans l'intégrale I le changement de variable $x = \arctan t$.

c) Effectuer dans l'intégrale alors obtenue le changement de variable $t = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh \varphi$.

d) Effectuer dans l'intégrale alors obtenue le changement de variable $\varphi = \ln u$.

[Pour chacun de ces changements de variable, on définira précisément la fonction de changement de variable, et on effectuera clairement toutes les vérifications nécessaires.]

A ce stade, on doit avoir obtenu $I = \int_{\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{3(x^2+1)^2}{xP(x)} dx$.

5 - Calculer le réel I.

[On se contentera de l'expression immédiatement déduite des calculs précédents, sans chercher à la simplifier, ni à l'approximer.]

Problème 66
Révisions d'analyse

[Equations différentielles, développements limités, formules de Taylor...]

D'après un sujet du concours des Mines de première année, 2004.

1 - Première partie.
On note I l'intervalle $]-\infty, 1[$. Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2 y' = (2-x) y$.
a) Calculer une primitive A de la fonction a définie sur I par : $a(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}$.
b) Intégrer (E) sur I.

2 - Deuxième partie.
Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.
a) Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.
b) Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :
$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$ pour tout réel x appartenant à I.
La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P_n'(X)$ et X. Expliciter cette relation.
c) Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3.
d) En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), prouver que pour tout entier positif n :

$$P_{n+1}(X) = \left[(2n+1) X + X^2\right] P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$$

3 - Troisième partie.
Le but de cette partie et de la suivante est d'établir quelques propriétés des nombres $a_n = f^{(n)}(0)$.
a) Pour tout entier positif n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.
b) Préciser, sans nouveau calcul : a_0, a_1, a_2, a_3. En déduire a_4.
c) Préciser le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.

3 - Quatrième partie.
On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par : $u_p = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!}$.
Etant donnés p et n des entiers naturels quelconques, on pose : $S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$.
a) En appliquant une formule de Taylor à la fonction exponentielle, prouver que la suite (u_p) converge vers e.
b) Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geqslant 1$.
Prouver que les suites $p \to S_p(0)$ et $p \to S_p(1)$ convergent et préciser leur limite en fonction de e.
c) Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :

$$S_p(n+1) - (2n+2) S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

d) En déduire que pour tout entier naturel n, la suite $p \to S_p(n)$ converge, et que sa limite est a_n.

Problème 67
Fonctions splines

[Intégration, approximation]

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^4$.

1 - Méthode en un pas

a) Montrer qu'il existe une unique fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, polynomiale de degré $d \leqslant 3$, telle que :

$$g(a) = f(a) \quad ; \quad f(b) = g(b) \quad ; \quad g'(a) = f'(a) \quad ; \quad g'(b) = f'(b).$$

La fonction g est appelée la fonction spline de f sur le segment $[a, b]$.

b) Montrer que, pour tout $t \in [a, b]$,

$$g(t) = \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - \frac{a + b}{2}) + \frac{f'(b) - f'(a)}{2(b - a)}(t - a)(t - b) + \varphi(t),$$

où $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale de degré 3 telle que $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)dt = 0$.

c) Exprimer le réel $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ en fonction de $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$ et $f'(b)$.

d) Montrer que, pour tout $c \in]a, b[$, il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$f(c) = g(c) + \frac{f^{(4)}(d)}{24}(c - a)^2(c - b)^2.$$

[On pourra introduire une fonction h telle que $h(a) = h(b) = h(c) = h'(a) = h'(b) = 0$.]

e) En déduire une majoration de la valeur absolue de la différence $\displaystyle\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt$ à l'aide du réel $M = \sup\limits_{[a,b]} \left|f^{(4)}\right|$. On justifiera l'existence du réel M.

2 - Méthode en n pas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_n)$ la subdivision régulière du segment $[a, b]$. On note $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction $g_{|[a_i, a_{i+1}]}$ est la fonction spline de $f_{|[a_i, a_{i+1}]}$.

On pose enfin $S_n = \displaystyle\int_a^b g_n(t)\, dt$.

a) Exprimer S_n en fonction des $f(a_i)$, de $f'(a)$ et $f'(b)$.

b) Montrer que $S_n - \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = \underset{n\to+\infty}{O}(\frac{1}{n^4})$.

3 - Application

On applique la méthode précédente pour $n = 2$ et $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{1+t}$.

a) Donner une valeur approchée S_2 de $\ln 2$, ainsi qu'un majorant de l'erreur commise.

b) Etudier le signe sur $[0, 1]$ de la fonction $f^{(4)}$ et préciser, à l'aide des questions précédentes, si S_2 est une valeur approchée de $\ln 2$ par excès ou par défaut.

Problème 68
Approximation rationnelle de π

[Intégration, approximation]

1 - Question de cours

a) Enoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre n, pour une fonction f entre des points a et x. On précisera les hypothèses nécessaires sur la fonction f.

b) Enoncer et démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange, dans les mêmes conditions.

2 - Polynôme de Taylor de la fonction arctan

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et on note $f = \arctan$.

a) Déterminer le développement limité à l'ordre $4n$, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
b) En déduire le développement limité à l'ordre $4n+1$, au voisinage de 0, de la fonction f.
c) Déterminer les valeurs en 0 des dérivées successives $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{(4n+1)}(0)$.

3 - Une série alternée de somme π

a) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une expression la fonction dérivée k-ième de f.
[Indication : on pourra déterminer des réels α et β tels que $\frac{1}{X^2+1} = \frac{\alpha}{X+i} + \frac{\beta}{X-i}$.]
b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|f^{(k)}(x)| \leqslant (k-1)!$
c) Appliquer une formule de Taylor, à l'ordre $4n+1$, à la fonction f entre 0 et 1. En déduire qu'il existe un réel R_n tel que :

$$\frac{\pi}{4} = S_n - R_n, \quad \text{avec} \quad S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} \quad \text{et} \quad |R_n| \leqslant \frac{1}{4n+2}.$$

d) Montrer que $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, puis que $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\pi}{4}$. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $R_n = \lim\limits_{p\to+\infty} \big(S_n - S_p\big)$.

L'objectif de la suite du problème est d'évaluer plus précisément le terme d'erreur R_n.

4 - Une série à terme positifs

a) L'entier $n \geqslant 1$ est toujours fixé. Montrer que $S_n - S_p = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} \alpha_k$, où $\alpha_k = \dfrac{2}{16k^2-1}$.

b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $S'_p = -\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \beta_k$, où $\beta_k = \dfrac{2}{16k^2-4}$. En remarquant que la somme des β_k est télescopique, montrer que la suite $(S'_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, et calculer sa limite.
On note $R'_n = \lim\limits_{p\to+\infty} \big(S'_n - S'_p\big)$. Montrer que $R'_n = \dfrac{1}{4(2n+1)}$.

c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \beta_k - \alpha_k \leqslant \dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{6}{(4k^2-1)(4k^2-9)}$.

d) Pour $p \geqslant n+1$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} \frac{6}{(4k^2-1)(4k^2-9)}$. *[Encore une somme télescopique.]*

e) En déduire que $0 \leqslant R'_n - R_n \leqslant \dfrac{1}{16(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$.

5 - Application numérique

On a montré à la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\pi = 4(S_n - R'_n + \varepsilon_n) \ , \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{16(4n^2-1)(2n+3)}.$$

a) En prenant $n = 1$, obtenir une approximation rationnelle de π à $\frac{1}{60}$ près par défaut.
b) Quelle approximation de π obtient-on pour $n = 2$, et avec quelle précision ?
c) Quelle valeur de n faudrait-il choisir pour obtenir une valeur approchée de π à 10^{-5} près ?

Problème 69 **

Approximation d'un nuage de points par une droite

[Algèbre linéaire euclidienne, polynômes]

Soit n un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure canonique d'espace vectoriel. Si $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

1 - Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

2 - On fixe le vecteur $U = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Si X et Y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit :

(i) l'espérance de X : $\mathrm{E}(X) = \langle U, X\rangle$;

(ii) la covariance de X et Y : $\mathrm{Cov}(X, Y) = \langle X - E(X)U\ , Y - E(Y)U\rangle$;

(iii) la variance de X : $\mathrm{V}(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$.

Avec ces notations, démontrer que :

a) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \langle X, Y\rangle - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{V}(X) = \|X\|^2 - \mathrm{E}(X)^2$;

b) $|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leqslant \sqrt{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)}$;

c) $|\mathrm{Cov}(X, Y)| = \sqrt{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)}$ si, et seulement si, la famille (U, X, Y) est liée.

3 - Soit $X \in \mathbb{R}^n$ fixé.

a) Déterminer, en fonction de l'espérance et la variance de X, le projeté orthogonal du vecteur X sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(U)$, puis la distance de X à ce sous-espace vectoriel.

b) On suppose désormais $V(X) \neq 0$ et on note $F = \mathrm{vect}(U, X)$. Déterminer un vecteur $V \in F$ tel que la famille (U, V) soit une base orthonormale de F.

c) Soit Y un deuxième élément de $\mathbb{R}^n$.
Déterminer, en fonction des espérances, des variances et de la covariance de X et Y, les réels λ et μ tels que le vecteur $\lambda X + \mu U$ soit le projeté orthogonal du vecteur Y sur le sous-espace vectoriel F. Préciser la distance de Y à F.

4 - Application. On conserve les notations de la question **3**.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on note M_i le point du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x_i, y_i) dans la base canonique. La droite Δ d'équation $y = \lambda x + \mu$ est appelée la droite de meilleure approximation, au sens des moindres carrés, du nuage de points $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

a) On prend $n = 5$, $X = (0; 1; 2; 3; 4)$ et $Y = (2,8\ ;\ 2,7\ ;\ 1,7\ ;\ 2,1\ ;\ 1,2)$. Tracer, sur un schéma à l'échelle adaptée, les points M_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, et la droite Δ.

b) Proposer une interprétation, à l'aide des points M_i et de la droite Δ, de la distance $d(Y, F)$ obtenue à la question **3 - c)**.

Problème 70
Puissances, commutant de matrices

[Algèbre linéaire euclidienne, polynômes]

D'après un sujet du concours des Mines de première année, 1998

Dans tout le problème, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et rapportée à sa base canonique (orthonormée) notée (e_1, e_2, e_3).

Partie I

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

1. Montrer que s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $e'_1 = (1,1,1)$, $e'_2 = (1,-1,0)$, $e'_3 = (1,1,-2)$.
   (a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice S' de s dans la base (e'_1, e'_2, e'_3). Donner une relation entre les matrices S et S'.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer S'^n et donner une méthode pour calculer S^n. (on ne demande pas d'effectuer les calculs)
3. (a) La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
   (b) Montrer que S^2 peut s'exprimer comme combinaison linéaire de I_3 et S.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tels que
   $$S^n = a_n I_3 + b_n S$$
   (d) Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (e) Montrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et que la suite $(b_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire l'expression de a_n et b_n pour tous les n.
4. Soit $B = S - 2I_3$.
   (a) Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de S^n en fonction de I_3 et B.
   (b) Comparer avec le résultat de la question 3.
5. L'expression de S^n obtenue aux questions 3. et 4. est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Partie II

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. On pose

$$u = f \circ s^{-1}$$

et on note U la matrice de u dans la base canonique.

1. Calculer U, vérifier que u est un automorphisme orthogonal et que

$$u \circ s = s \circ u = f$$

2. Soit (e_1'', e_2'', e_3'') la famille obtenue en normant les vecteurs (e_1', e_2', e_3') de la question 2. de la première partie.
   (a) Montrer que (e_1'', e_2'', e_3'') est une base orthonormale.
   (b) Écrire la matrice U' de u dans cette base.
3. (a) Exprimer la matrice de s dans la base (e_1'', e_2'', e_3'') en fonction de S'.
   (b) En déduire la matrice de f dans la base (e_1'', e_2'', e_3'').
4. (a) Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par f ?
   (b) Soit $P = Vect(e_2'', e_3''))$. Montrer que $f(P) = P$. Soit g l'endomorphisme de P tel que $g(x) = f(x)$ pour tout x de P. Montrer que g est la composée de deux applications linéaires simples que l'on précisera.
5. On note $\mathscr{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ commutant avec f. C'est à dire l'ensemble des endomorphismes g tels que $g \circ f = f \circ g$.
   (a) Montrer que $\mathscr{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.
   (b) Soit $g \in \mathscr{C}(f)$.
      i. Montrer que le vecteur $g(e_1'')$ est invariant par f. Que peut-on en déduire ?
      ii. Soit M la matrice de g dans la base (e_1'', e_2'', e_3''). Montrer que M commute avec S'^3.
      iii. En déduire la forme générale de la matrice d'un endomorphisme de $\mathscr{C}(f)$ dans la base (e_1'', e_2'', e_3'').
   (c) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{C}(f)$?

Problème 71

Composée de deux rotations dans l'espace

[Géométrie dans l'espace]

E désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Le produit scalaire de deux vecteurs est noté $\langle u|v\rangle$. La norme d'un vecteur est noté $\|u\|$. On rappelle que $O(E)$ désigne le groupe des automorphismes orthogonaux de E, $SO(E)$ le groupe des des automorphismes orthogonaux de E de déterminant 1. Si $\omega \in E$ est un vecteur non nul, on notera $\mathbb{R}\omega = \mathrm{vect}(\omega)$ la droite qu'il dirige.

1. Δ étant une droite vectorielle de E, on appelle *demi-tour* d'axe Δ la symétrie orthogonale par rapport à Δ. Justifier qu'un demi-tour est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.
2. Soit ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles de E.
   (a) On suppose que ρ_1 et ρ_2 ont le même axe. Prouver $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$.
   (b) On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2 orthogonaux. Prouver $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$ et déterminer cette rotation.
3. Étude de la réciproque.
   (a) Soit ρ une rotation vectorielle distincte de Id_E, d'axe $\Delta = \mathbb{R}\omega$ où $\|\omega\| = 1$. On suppose qu'il existe une droite vectorielle $\mathscr{D}$ distincte de Δ et telle que $\rho(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$. Montrer que Δ et $\mathscr{D}$ sont orthogonales et que ρ est un demi-tour.
   (b) Soit ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles de E distinctes de Id_E, dont les axes respectifs Δ_1 et Δ_2 sont distincts. Montrer que si $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$, alors Δ_1 est une droite (globalement) invariante par ρ_2. En déduire que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux.
   (c) Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments de $SO(E)$ commutent.
4. Composée de deux demi-tours.
   (a) Soit ρ_1 et ρ_2 deux demi-tours d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2 orthogonaux. Montrer que $\{\mathrm{Id}_E, \rho_1, \rho_2, \rho_1 \circ \rho_2\}$ est un sous-groupe commutatif de $(SO(E), \circ)$.
   (b) Soit ρ_1 et ρ_2 deux demi-tours d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2 non nécessairement orthogonaux. Montrer que $\rho_1 \circ \rho_2$ et $\rho_2 \circ \rho_1$ sont des rotations dont on déterminera les éléments caractéristiques.
   (c) Soit ρ une rotation vectorielle distincte de Id_E, d'axe $\Delta = \mathbb{R}\omega$ où $\|\omega\| = 1$. Montrer que ρ est la composée de deux demi-tours d'axes orthogonaux à Δ, l'un de ces demi-tours pouvant être choisi arbitrairement.

Problème 72 ***

Les quarts de tours en dimension 4

[Algèbre linéaire euclidienne, géométrie vectorielle]

On fixe dans ce problème un espace vectoriel euclidien E de dimension 4. Etant donné $(x, y) \in E^2$, on note $\langle x, y\rangle$ leur produit scalaire, et $\|x\|$ la norme euclidienne de x.

On appelle quart de tour tout automorphisme orthogonal $q \in O(E)$ tel que $q \circ q = -\mathrm{id}_E$. On note $\mathscr{Q}$ l'ensemble des quarts de tours.

On note enfin $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1 - Soit q un quart de tour et $x \in E$ un vecteur unitaire. Montrer que $q(x)$ est un vecteur unitaire orthogonal à x.

2 - Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E, et $q \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(q) = M$. Montrer que q est un quart de tour.

3 - Soit q un quart de tour et $x \in E$ un vecteur unitaire. On pose $P = vect(x, q(x))$. Montrer que P est un plan vectoriel stable par q, et que $(x, q(x))$ en est une base orthonormale. Préciser la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit $q_P = (q_{|P})^{|P}$. Quelle est la nature géométrique de cet endomorphisme ?

4 - Montrer que le sous espace $P^\perp$ est également stable par l'endomorphisme q.

5 - A l'aide des questions 3 et 4, montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(q) = M$.
Quel est le déterminant de q ?

6 - Soit $q \in \mathscr{Q}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f = (\cos\alpha)\mathrm{id}_E + (\sin\alpha)q$. Montrer que $f \in O(E)$.
Soit $x \in E$ un vecteur unitaire. Montrer que x est contenu dans un plan P stable par f. Quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme induit par f sur P ?
Quel est le déterminant de f ?

7 - Soit (x, y) une famille orthonormale de E. Combien existe-t-il de quarts de tours q tels que $q(x) = y$?

Problème 73
Une équation aux dérivées partielles

[EDP]

On veut résoudre l'équation aux dérivées partielles $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ $(\star)$.

1 - Analyse

On considère $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ solution de $(\star)$.

On définit alors $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

a) Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$, et exprimer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.

b) En déduire que g est solution de l'équation $r\frac{\partial g}{\partial r} = 0$, et résoudre cette équation.

c) Déterminer $g(0, \theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et conclure.

2 - Synthèse

Achever de déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $(\star)$.

3 - Pour aller plus loin

a) Résoudre l'équation aux dérivées partielles $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ $(\star\star)$.

b) Pouvez-vous interpréter géométriquement les résultats obtenus dans ce problème ?

Problème 74

Une méthode de résolution de certaines EDP

[EDP]

1 - Résolution de l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (\star)$

On va raisonner par analyse et synthèse pour résoudre l'équation $(\star)$. On considère donc une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

On introduit alors la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f(e^u, v)$.

a) Calculer les dérivées partielles de la fonction g en fonction de celles de la fonction f. En déduire que g vérifie une équation aux dérivées partielles très simple, que l'on notera $(\star\star)$.

b) Résoudre l'équation $(\star\star)$.

c) En déduire qu'il existe une fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = a(\ln x - y).$$

d) On note $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $b(x) = f(x,0)$.
Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a(t) = b(e^t)$, et en déduire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = b(xe^{-y}).$$

e) Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(0,y) = b(0)$.

f) Achever de montrer que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation $(\star)$ est :

$$\mathscr{S} = \left\{ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;\middle|\; \exists b \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = b(xe^{-y}) \right\}.$$

2 - Généralisation de la méthode

On considère ici deux intervalles ouverts I et J de $\mathbb{R}$, et des fonctions au moins continues $\alpha : I \to \mathbb{R}$ et $\beta : J \to \mathbb{R}$. On suppose de plus que ces fonctions ne s'annulent pas sur leurs intervalles de définition.

On veut résoudre l'équation aux dérivées partielles : $\alpha(x)\dfrac{\partial f}{\partial x} + \beta(y)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (1).$

a) Justifier l'existence d'une primitive $A : I \to \mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\alpha(x)}$.
Démontrer que A induit une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de I sur un intervalle ouvert I_1, et que la bijection réciproque $A^{-1} : I_1 \to I$ est également de classe $\mathscr{C}^1$.
De même, la fonction $\frac{1}{\beta}$ admet une primitive $B : J \to \mathbb{R}$; B induit une bijection de J sur un intervalle ouvert J_1, et $B^{-1} : J_1 \to J$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

b) Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ solution de l'équation (1). On considère la fonction $g : I_1 \times J_1 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f(A^{-1}(u), B^{-1}(v))$.
Démontrer que g est solution de l'équation $(\star\star)$ introduite à la question **1**.

c) Rappelons que la fonction g n'est plus définie sur $\mathbb{R}^2$, mais sur $I_1 \times J_1$. Expliquer pourquoi la forme de la solution trouvée à la question **1-b)** reste tout de même valable.

d) Conclure quant aux solutions sur $I \times J$ de l'équation (1).

3 - Nouvel exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation $(1+x^2)\dfrac{\partial f}{\partial x} - (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2).$