Polys du cours de Mathématiques

MPSI

Erwan Biland

Lycée Stanislas, classe de MPSI 1, 2009/2010

Signification de quelques symboles

Complément au chapitre « techniques de calcul »

Attention : Les symboles énumérés ci-dessous ne sont en aucun cas des abréviations. Ils ne doivent pas être utilisés dans des phrases en langage courant, mais uniquement dans des propositions logiques.

Quantificateurs

$\forall$: «pour tout» ou «quel que soit» (quantificateur universel)
$\exists$: «il existe ... tel que» (quantificateur existentiel)
$\exists!$: «il existe un unique ... tel que»

Symboles ensemblistes

$\in$: «appartient à» (appartenance d'un élément à un ensemble) ; négation $\notin$
$\subset$: «est contenu dans» (inclusion d'un ensemble dans un autre) ; négation $\not\subset$
$=$: «égal» (égalité ensembliste) ; négation $\neq$
$\varnothing$: «l'ensemble vide»
$\cup$: «union»
$\cap$: «inter» (intersection)
$\setminus$: «privé de» (différence de deux ensembles)
Δ : différence symétrique

Symboles relatifs aux nombres, fonctions, etc.

∞ : «l'infini»
$\geqslant, \leqslant$: «supérieur ou égal», «inférieur ou égal»
$>, <$: «strictement supérieur», «strictement inférieur»
$\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k$: «somme des a_k, l'entier k variant de p à q» $(= a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q)$
$\displaystyle\prod_{k=p}^{q} a_k$: «produit des a_k, l'entier k variant de p à q» $(= a_p \times a_{p+1} \times \ldots \times a_q)$

Connecteurs logiques

ET, OU : conjonction, disjonction de propositions logiques
NON : négation
$\Rightarrow$: «implique» (implication)
$\Leftrightarrow$: «équivaut à» (équivalence)

Lettre grecques (et une hébraïque)

α, A : alpha	β, B : beta	γ, Γ : gamma	δ, Δ : delta	ε, E : epsilon	ζ, Z : zeta
η, H : eta	θ, Θ : theta	ι, I : iota	κ, K : kappa	λ, Λ : lambda	μ, M : mu
ν, N : nu	ξ, Ξ : xi	o, O : omicron	π, Π : pi	ρ, P : rho	σ, Σ : sigma
τ, T : tau	υ, Υ : upsilon	φ, Φ : phi	χ, X : chi	ψ, Ψ : psi	ω, Ω : omega
$\aleph$: aleph					

Equations

Complément au chapitre «techniques de calcul»

1 Définition

On appelle équation toute égalité $(\star)$ du type « $\Phi(a) = b$ », où :

(i) Φ est une application d'un ensemble A dans un ensemble B ;

(ii) b est un élément fixé de l'ensemble B ;

(iii) a est un élément non déterminé de l'ensemble A, appelé inconnue de l'équation $(\star)$.

On appelle solution de l'équation $(\star)$ tout élément a de l'ensemble A tel que $\Phi(a) = b$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $(\star)$. Ainsi :

$$\mathscr{S} = \{a \in A \mid \Phi(a) = b\}.$$

1.1 Remarque L'équation $(\star)$ admet donc une solution (au moins) si, et seulement si, $b \in \Phi(A)$.

2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

2.1 Proposition *L'application $\Phi : A \to B$ est injective si, et seulement si, pour tout $b \in B$, l'équation $(\star)$ admet au plus une solution dans A.*

L'application $\Phi : A \to B$ est surjective si, et seulement si, pour tout $b \in B$, l'équation $(\star)$ admet au moins une solution dans A.

L'application $\Phi : A \to B$ est bijective si, et seulement si, pour tout $b \in B$, l'équation $(\star)$ admet une et une seule solution dans A.

3 Exemples

3.1 L'équation polynomiale, de degré d et à coefficients et inconnue complexes :

$$\alpha_d z^d + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0.$$

Ici d est un entier naturel non nul, et $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ des complexes (avec $\alpha_d \neq 0$). L'inconnue est z ; on cherche les solutions dans $\mathbb{C}$. Ainsi, avec les notations précédentes, on aurait par exemple :

$$A = B = \mathbb{C},\ b = 0 \text{ et, pour tout } z \in \mathbb{C},\ \Phi(z) = \alpha_d z^d + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0.$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha_d z^d + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0\}$.

[Cette équation admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$: c'est le «théorème fondamental de l'algèbre», démontré pour la première fois par C.Gauss en 1799. On montre même qu'elle admet, toujours dans $\mathbb{C}$, exactement d solutions si on les compte «avec multiplicité».]

3.2 L'équation différentielle du premier ordre à coefficients réels non constants :

$$\alpha(t)y' - \beta(t)y = \gamma(t).$$

Ici α, β et γ sont des applications au moins continues d'un intervalle réel I (non précisé) dans $\mathbb{R}$. L'inconnue, représentée par le symbole «y», est une fonction au moins dérivable de I dans $\mathbb{R}$. On a ainsi :

$$A = \mathscr{D}(I, \mathbb{R}),\ B = \mathscr{F}(I, \mathbb{R}),\ b = \gamma \text{ et, pour tout } f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}),\ \Phi(f) = \alpha f' - \beta f.$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R}) \mid \forall t \in I,\ \alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) = \gamma(t)\}$.

[La résolution de cette équation différentielle sera étudiée dans un prochain chapitre.]

3.3 Exemple Soient p et q des entiers naturels non nuls, $a_{1,1}, \ldots, a_{1,q}, a_{2,1}, \ldots, \ldots, a_{pq}$ une famille de pq nombres réels, et $b_1, \ldots, b_p$ une famille de p nombres réels. On pose

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^q & \to & \mathbb{R}^p \\ (x_1, \ldots, x_q) & \mapsto & (y_1, \ldots, y_p) \end{array}, \text{ où } y_i = a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,q}x_q \quad ; \quad b = (b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^p.$$

L'équation $(\star)$ devient le système linéaire de p équations à q inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,q}x_q & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \ldots + a_{p,q}x_q & = & b_p \end{array} \right.$$

[Il est conseillé de savoir résoudre ce type de système, pour p et q «petits», par la méthode du pivôt de C.Gauss (encore !). Nous y reviendront un peu plus tard dans l'année, dans une perpective plus large.]

3.4 Exemple Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et

$$\Phi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{N}^*)^3 & \to & \mathbb{Z} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^n + y^n - z^n \end{array} \quad ; \quad b = 0 \in \mathbb{Z}.$$

L'équation $(\star)$ devient l'équation de Fermat :

$$x^n + y^n = z^n.$$

[Il avait été conjecturé par P.de Fermat, en 1641, que cette équation n'admet pas de solution pour $n \geqslant 3$. *Cette affirmation a finalement été prouvée par A.Wiles, après des siècles de recherche, en 1994.]*

Groupes, anneaux, corps

Complément au chapitre «nombres complexes»

0.1 Définition Soit E un ensemble. On appelle **loi de composition interne** sur E toute application du produit cartésien $E \times E$ (noté aussi E^2) dans E.
Si $\star : E \times E \to E$ est une loi de composition interne, on notera habituellement, pour $(x, y) \in E^2$:

$$\star(x, y) = x \star y.$$

On dit que la loi $\star$ est **associative** si : $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.
On dit que la loi $\star$ est **commutative** si : $\forall (x, y) \in E^2 \quad x \star y = y \star x$.
Soit e un élément de E. On dit que e est un **élément neutre** pour la loi $\star$ si : $\forall x \in E \quad x \star e = e \star x = x$.

1 Groupes

1.1 Définition On appelle **groupe** tout couple $(G, \bullet)$, où G est un ensemble et $\bullet$ une loi de composition interne sur G telle que :

(i) la loi $\bullet$ est associative ;

(ii) G possède un élément e neutre pour la loi $\bullet$;

(iii) pour tout $g \in G$, il existe un élément $g' \in G$ tel que $g \bullet g' = g' \bullet g = e$.

Si la loi $\bullet$ est de plus commutative, on dit que $(G, \bullet)$ est un groupe commutatif, ou **abélien**.
L'élément g' de l'hypothèse *(iii)* est appelé **symétrique** (ou inverse, ou même opposé si le groupe est commutatif) de l'élément g.

2 Anneaux et corps

2.1 Définition On appelle **anneau** tout triplet $(A, +, \star)$, où A est un ensemble et $+$, $\star$ deux lois de composition internes sur A telles que :

(i) le couple $(A, +)$ est un groupe abélien (dont on note l'élément neutre 0_A) ;

(ii) la loi $\star$ est associative ;

(iii) la loi $\star$ est distributive sur la loi $+$: $\forall (a, b, c) \in A^3 \quad \begin{cases} a \star (b + c) = a \star b + a \star c \\ (a + b) \star c = a \star c + b \star c \end{cases}$;

(iv) A possède un élément neutre pour la loi $\star$, noté 1_A ;

Si la loi $\star$ est commutative, on dit que $(A, +, \star)$ est un anneau commutatif.
Si, pour tout $(a, b) \in A^2$, on a : $[a \neq 0 \text{ et } b \neq 0] \;\Rightarrow\; ab \neq 0$, on dit que $(A, +, \star)$ est un **anneau intègre**.
2.2 Définition On appelle **corps** tout anneau $(K, +, \star)$ tel que :

(i) la loi $\star$ est commutative ;

(ii) pour tout $x \in K \setminus \{0\}$, il existe un élément $x' \in K$ tel que $x \star x' = x' \star x = 1_K$;

(iii) les éléments 0_K et 1_K sont distincts (K a donc au moins deux éléments distincts).

3 Morphismes

3.1 Définition Si $(G, \bullet)$ et $(H, \star)$ sont deux groupes, on appelle **morphisme de groupes** de $(G, \bullet)$ dans $(H, \star)$ toute application $\varphi : G \to H$ telle que :

$$\forall (g, g') \in G^2, \quad \varphi(g \bullet g') = \varphi(g) \star \varphi(g').$$

3.2 Définition Si $(A, +_A, \star_A)$ et $(B, +_B, \star_B)$ sont deux anneaux, on appelle **morphisme d'anneaux** de $(A, +_A, \star_A)$ dans $(B, +_B, \star_B)$ toute application $\varphi : A \to B$ telle que :

(i) $\forall (a, a') \in A^2, \quad \varphi(a +_A a') = \varphi(A) +_B \varphi(A')$;

(ii) $\forall (a, a') \in A^2, \quad \varphi(a \star_A a') = \varphi(A) \star_B \varphi(A')$;

(iii) $\varphi(1_A) = 1_B$.

Représentation des fonctions : aide-mémoire

Complément au chapitre «fonctions usuelles»

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points (ou plus rarement une réunion d'intervalles), et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On notera $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1 Propriétés générales

On étudiera, si nécessaire, le domaine de définition de la fonction f. Normalement, la question ne devrait pas se poser : l'ensemble de départ de la fonction découle de sa définition même.

On déterminera ensuite les symétries de la fonction f : périodicité, parité. Si elle est paire, impaire et/ou périodique, on pourra, pour la suite de l'étude, se placer sur un sous-intervalle bien choisi de l'ensemble de départ de f.

2 Etude des variations

Si la fonction est dérivable (ce qu'on justifiera rapidement), l'étude du signe de la dérivée permet de déterminer ses variations. Sinon, il faudra s'y prendre "à la main" (cas rare ; seuls quelques points poseront éventuellement problème).

Dans tous les cas, on conclura en établissant un tableau des variations sur l'intervalle considéré.

3 Etude aux bornes

Si la fonction est définie sur un segment, rien à faire.

Etude en $+\infty$ (ou en $-\infty$) :

1. Si f admet en $+\infty$ une limite finie ℓ, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = \ell$.
2. Si f admet en $+\infty$ une limite infinie, on recherchera l'existence d'une direction asymptotique en étudiant la quantité $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.
   (a) Si $\frac{f(x)}{x} \to \pm\infty$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction verticale (vers le haut ou vers le bas).
   (b) Si $\frac{f(x)}{x} \to a \in \mathbb{R}$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet la direction asymptotique d'équation $y = ax$. On recherche alors l'existence éventuelle d'une asymptote en étudiant la quantité $f(x)) - ax$ au voisinage de $+\infty$.
      i. Si $f(x) - ax \to b \in \mathbb{R}$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$.

ii. Si $f(x) - ax \to \pm\infty$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

Etude à gauche (ou à droite) d'un réel c :

1. Si f admet en c une limite finie ℓ, la courbe $\mathscr{C}_f$ aura la même allure que si la fonction f était continue à gauche (resp. à droite) en c, avec $f(c) = \ell$.
2. Si f admet en c une limite infinie, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote la droite d'équation $x = c$.

Si on n'est dans aucun de ces cas, il faudra se faire une idée de l'allure de la courbe par ses propres moyens (exemple : fonction oscillant indéfiniment au voisinage de $+\infty$ ou d'un réel c).

4 Placement de deux courbes l'une par rapport à l'autre

Si on est amené à tracer les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g définies sur un même intervalle I, deux possibilités :

soit on étudie le signe de la différence $f - g$;

soit on compare le quotient $\frac{f}{g}$ à 1 (mais **seulement** si f et g sont à valeurs strictement positives !).

Trois théorèmes d'analyse

Préliminaire au chapitre «fonctions usuelles»

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.
Les résultats énoncés ci-dessous seront démontrés pendant l'année.

1 Existence de primitives

1.1 Définition On appelle primitive de l'application f sur l'intervalle I toute application $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que :

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x).$$

1.2 Théorème *Toute application continue sur l'intervalle I admet des primitives sur I.*
Plus précisément, soit $a \in I$. Si f est continue sur I, elle admet une unique primitive F sur I qui s'annule en a ; F est définie par :

$$\forall x \in I \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Les autres primitives de f sur I sont les applications $F + c$, avec c une application constante sur I.

2 Monotonie et bijectivité

2.1 Définition L'application f est dite strictement monotone sur I si elle y est strictement croissante ou strictement décroissante, c'est-à-dire si :

$$[\ \forall (x, y) \in I^2 \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\ ] \quad \text{ou} \quad [\ \forall (x, y) \in I^2 \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)\ ].$$

2.2 Définition Soit J une partie de $\mathbb{R}$. On dit que l'application f induit une bijection de I sur J si tout élément y de J admet un unique antécédent par f dans I.
On définit alors l'application réciproque, notée $f^{-1} : J \to I$ qui, à tout élément $y \in J$, associe l'unique élément $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Par abus de notation, on peut aussi considérer f^{-1} comme une application de J dans $\mathbb{R}$.

2.3 Théorème *Si f est une application continue et strictement monotone de l'intervalle I vers $\mathbb{R}$, alors :*

- *(i) $f(I) = \{f(x),\ x \in I\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$;*
- *(ii) f induit une bijection de I sur $f(I)$;*
- *(iii) l'application réciproque f^{-1} est une application continue et strictement monotone de $f(I)$ vers $\mathbb{R}$; f^{-1} et f sont toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes.*

3 Dérivation de l'application réciproque

3.1 Théorème *Si l'application f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I, et si de plus f est dérivable en tout point de I, alors pour tout $y \in f(I)$:*

- *(i) si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y et $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$;*
- *(ii) si $f'(f^{-1}(y)) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en y, mais, graphiquement, sa courbe représentative admet une tangente verticale au point $\big(y, f^{-1}(y)\big)$.*

Qu'est-ce qu'un polynôme ?

Complément au chapitre «nombres complexes»

L'objectif de ce polycopié est de tenter de définir ce qu'est un polynôme, et surtout de préciser ce qui peut donner le droit d'«identifier» les coefficients de deux polynômes, pour en finir avec l'identification sauvage (qui sera sévèrement réprimée à l'avenir).

1 Non-définition

Considérons un polynôme, par exemple $X^3 + 2X + 1$. Notons-le P. On écrira donc :

$$P = X^3 + 2X - 3 \quad \text{ou} \quad P(X) = X^3 + 2X - 3.$$

Précisons d'abord ce qu'un polynôme n'est pas :

– Le polynôme P n'est pas un nombre, et ce que l'on note X non plus.
  Par contre, si on note a un nombre réel ou complexe, on peut définir le nombre $P(a) = a^3 + 2a - 3$.
  Ainsi, pour $a = 2$, on obtient $P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2 - 3 = 8 + 4 - 3 = 9$.

– Le polynôme P n'est pas une équation, et X n'est pas une inconnue.
  Ceci dit, il est bien sûr très intéressant de résoudre l'équation $P(x) = 0$, d'inconnue x réelle ou complexe. Les racines de cette équation sont appelée les racines du polynôme P.
  En l'occurence, ce sont (dans l'ordre décroissant) : 1, $\frac{-3+\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-3-\sqrt{3}}{2}$.

– Enfin, le polynôme P n'est pas une fonction.
  Cependant, si A est une partie de $\mathbb{C}$, on associe tout naturellement à P une fonction, notée $\tilde{P}$, de A dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), définie par : $\forall a \in A,\ \tilde{P}(a) = P(a) = a^3 + 2a - 3$.
  On choisira souvent comme partie A un intervalle de $\mathbb{R}$, ou l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Qu'est-ce donc que le polynôme P ? On peut dire que c'est une «expression formelle» en X (ce qui ne dit pas grand-chose...). Quant à X, on l'appellera l'indéterminée, ce qui signifie qu'on ne cherchera surtout pas à déterminer plus précisément ce que c'est !

2 Définition

Un polynôme est une somme (finie) de puissances de l'indéterminée, chacune affectée d'un coefficient (généralement réel ou complexe). Dire que Q est un polynôme à coefficients réels en l'indéterminée X signifie donc qu'il existe un entier n et des réel $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que :

$$Q = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

Bien sûr, si on choisit un entier m strictement supérieur à n, on pourra tout aussi bien écrire :

$$Q = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n + a_{n+1}X^{n+1} + \dots + a_mX^m,$$

en convenant que les coefficients $a_{n+1}, \dots, a_m$ sont tous nuls. Ainsi, on peut écrire :

$$P = -3 + 2X + 0.X^2 + 1.X^3 + 0.X^4 + 0.X^5 + \dots$$

En pratique, pour éviter la référence à l'indice n, on notera parfois :

$$Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_k X^k + \ldots$$

(étant entendu que la somme est en fait finie, c'est-à-dire que les coefficients a_k sont tous nuls à partir d'un certain rang).

3 Egalité de deux polynômes

Un polynôme est donc essentiellement une suite de coefficients, tous nuls à partir d'un certain rang. Par convention, on dira que deux polynômes sont égaux s'ils ont les mêmes coefficients. Par exemple, le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ est égal au polynôme $P = X^3 + 2X - 3$ si, et seulement si :

$$a_0 = -3,\ a_1 = 2,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1 \text{ et, pour tout entier } k \geqslant 4,\ a_k = 0.$$

Attention : il ne suffit pas que les polynômes P et Q prennent les mêmes valeurs en quelques réels pour qu'ils soient égaux. Par exemple, pour $P = X^3 + 2X - 3$ et $Q = 3X^2 - 3$, on a $P \neq Q$, et pourtant :

$$P(0) = Q(0) = -3, \quad P(1) = Q(1) = 0, \quad P(2) = Q(2) = 9.$$

Ecrire $P(x) = Q(x)$ ou $P(n) = Q(n)$ ne donne aucune indication sur P et Q si ces égalités ne sont vraies que pour un nombre fini de valeurs de x ou de n.

4 Un résultat important

On prouvera, plus tard dans l'année, le :

Théorème. Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels ou complexes. Supposons qu'il existe une partie infinie A de $\mathbb{C}$ telle que, pour tout élément a de A, $P(a) = Q(a)$.

Alors les polynômes P et Q sont égaux, c'est-à-dire que leurs coefficients sont, deux à deux, égaux.

Par exemple, si on peut prouver que, pour tout entier naturel n, $P(n) = Q(n)$, alors les polynômes P et Q sont égaux : on peut «identifier» leurs coefficients.

Il est FORMELLEMENT INTERDIT d'«identifier» les coefficients de deux polynômes si on n'a pas prouvé qu'ils sont égaux à l'aide de ce théorème.

Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}^2$

Complément au chapitre «nombres complexes»

Les propositions énoncées ici peuvent être considérée, jusqu'à nouvel ordre, comme des définitions.

1 Fonctions d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, et $f : I \to \mathbb{C}$ une application.

Donner l'application f, c'est donner les deux applications «partie réelle» x et «partie imaginaire» y, à valeurs réelles, telles que $\forall t \in I \quad f(t) = x(t) + iy(t)$. Ces applications sont définies par :

$$x : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \Re e\, f(t) \end{array} \qquad \text{et} \qquad y : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \Im m\, f(t) \end{array}.$$

1.1 Proposition *Soit a un point de I ou une borne de I. L'application f admet une limite au point a si, et seulement si, les applications x et y admettent des limites au point a, auquel cas :*

$$\lim_{t \to a} f(t) = \lim_{t \to a} x(t) + i \lim_{t \to a} y(t).$$

1.2 Proposition *L'application f est continue sur I si, et seulement si, les deux applications x et y sont continues sur I.*

1.3 Proposition *Soit t un point de I. L'application f est dérivable au point t si, et seulement si, les deux applications x et y sont dérivables au point t, auquel cas :*

$$f'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

On montre que les théorèmes usuels sur la dérivation (*resp.* la continuité, la limite) d'une somme ou d'un produit de fonctions dérivables (*resp.* continues, admettant des limites), ou d'un quotient de fonctions dérivables (*resp.* continues, admettant des limites) dont le dénominateur ne s'annule pas, se prolongent aux fonctions à valeurs complexes. On a aussi le :

1.4 Théorème *Toute application continue $f : I \to \mathbb{C}$ admet des primitives sur I. Si $F : I \to \mathbb{C}$ est une primitive de f sur I, les autres primitives sont les applications $F + c$, avec c une application constante sur I.*

2 Fonctions d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$

Rappelons que l'ensemble $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des **couples** *(x, y) de réels. Il est muni d'une loi d'addition définie par $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$, et d'une multiplication scalaire définie par $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

Se donner l'application f, c'est se donner les deux applications «coordonnées» x et y, à valeurs réelles, telles que $\forall t \in I \quad f(t) = (x(t), y(t))$.

2.1 Proposition *Soit a un point de I ou une borne de I. L'application f admet une limite au point a si, et seulement si, les applications x et y admettent des limites au point a, auquel cas :*

$$\lim_{t \to a} f(t) = \left(\lim_{t \to a} x(t), \lim_{t \to a} y(t) \right).$$

2.2 Proposition *L'application f est continue sur I si, et seulement si, les deux applications x et y sont continues sur I.*

2.3 Proposition *Soit t un point de I. L'application f est dérivable au point t si, et seulement si, les deux applications x et y sont dérivables au point t, auquel cas :*

$$f'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big) .$$

On montre que les théorèmes usuels sur la dérivation (*resp.* la continuité, la limite) d'une somme de fonctions dérivables (*resp.* continues, admettant des limites) se prolongent aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Pour trouver une solution particulière

Complément au chapitre «équations différentielles»

L'objet de ce polycopié et de donner quelque techniques pour obtenir des solutions particulières d'équations différentielles linéaires (*EDL*) simples. On n'oubliera pas d'y ajouter le principe de superposition (vu en cours). On sait que la connaissance d'une solution particulière, ajoutée à la résolution de l'équation homogène, permet de résoudre entièrement une *EDL* avec second membre.

On étudiera uniquement les équations différentielles linéaires à coefficients constants (abrégé en *EDLcc*) d'ordre 1 ou 2. On notera quand même que les résultats obtenus se généralisent sans difficulté à des *EDLcc* d'ordre 3 ou plus.

1 Equation caractéristique

On fixe désormais un corps $\mathbb{K}$, qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On fixe a, b, c des élément de $\mathbb{K}$, en supposant $a \neq 0$, et $m : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction.

A une *EDLcc* d'ordre 1 ou 2, on associe une *équation caractéristique*, polynomiale de degré 1 ou 2, de la façon suivante :

$$\begin{array}{rlcrl} ay' + by = m(t) & (E) & \longrightarrow & ax + b = 0 & (EC) \\ ay'' + by' + cy = m(t) & (E) & \longrightarrow & ax^2 + bx + c = 0 & (EC). \end{array}$$

2 Second membre exponentielle-polynôme

On suppose désormais que le second membre de l'équation (E) est une fonction du type *exponentielle-polynôme*, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$, et un élément λ de $\mathbb{K}$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad m(t) = P(t)e^{\lambda t}.$$

Remarque. Cette définition inclut le cas où m est une fonction exponentielle (le polynôme P est alors constant), et le cas où m est une fonction polynôme (en prenant $\lambda = 0$).

Proposition. Avec les notations ci-dessus, l'équation (E) possède au moins une solution du type exponentielle-polynôme. Plus précisément, il existe un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que l'équation (E) admette pour solution particulière la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}, \quad t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}.$$

On peut même préciser le degré du polynôme Q :

(i) si λ n'est pas solution de l'équation (EC), alors $\deg(Q) = \deg(P)$;

(ii) si λ est solution *simple* de l'équation (EC), alors $\deg(Q) = \deg(P) + 1$;

(iii) si λ est solution *double* de l'équation (EC), alors $\deg(Q) = \deg(P) + 2$;

Démonstration On verra peut-être dans le chapitre «espace vectoriels de dimension finie» une démonstration très simple de ce résultat. N'hésitez pas à me la réclamer ! En attendant les outils plus performants que nous aurons alors, il nous faut faire le travail «à la main».

Notons que la proposition ci-dessus est un résultat d'existence, sans notion d'unicité. La démonstration que je vous propose va un peu plus loin, en disant dans quelle mesure le polynôme Q est unique. Je raisonnerai donc par *analyse/synthèse* Je traiterai uniquement le cas où l'équation différentielle (E) est de degré 1, l'autre cas étant similaire (bien qu'un peu plus compliqué).

On considère un polynôme Q, à coefficients dans $\mathbb{K}$, et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K},\ t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$. On notera d le degré de P, et $p_0, \dots, p_d$ ses coefficients (avec $p_d \neq 0$).

La fonction f est clairement dérivable, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = Q'(t)e^{\lambda t} + Q(t)\lambda e^{\lambda t} = [Q'(t) + \lambda Q(t)]e^{\lambda}t.$$

On en déduit, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$af'(t) + bf(t) = [aQ'(t) + (a\lambda + b)Q(t)]e^{\lambda}t.$$

Comme $t \mapsto e^{\lambda t}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad aQ'(t) + (a\lambda + b)Q(t) = P(t).$$

Or deux polynômes prennent les mêmes valeurs en tout point de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, ils sont égaux. La fonction f est donc solution de (E) si, et seulement si :

$$aQ'(X) + (a\lambda + b)Q(X) = P(X) \quad (\star).$$

Analyse. Supposons que la fonction f est solution de (E), c'est-à-dire que l'identité $(\star)$ est vérifiée.

Cas 1. Supposons $a\lambda + b = 0$, c'est-à-dire que λ est solution (simple) de (EC). Alors l'identité $(\star)$ devient $aQ'(X) = P(X)$. On en déduit immédiatement $\deg(Q) = \deg(P) + 1 = d + 1$, et même qu'il existe $q_0 \in \mathbb{K}$ tel que :

$$Q(X) = q_0 + \frac{p_0}{a}X + \frac{p_1}{2a}X^2 + \dots + \frac{q_{d-1}}{da}X^d + \frac{q_d}{(d+1)a}X^{d+1}.$$

Cas 2. Supposons maintenant $a\lambda + b \neq 0$. Alors le polynôme $Q'(X) + (a\lambda + b)Q(X)$ est de même degré que Q, donc $\deg(Q) = \deg(P) = d$. Notons $q_0, \dots, q_d$ les coefficients de Q. En identifiant les coefficients de part et d'autre de l'identité $(\star)$ (par définition de l'égalité de deux *polynômes*), on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} & & (a\lambda + b)q_d & = & p_d \\ daq_d & + & (a\lambda + b)q_{d-1} & = & p_{d-1} \\ & & & \vdots & \\ 2aq_2 & + & (a\lambda + b)q_1 & = & p_1 \\ aq_1 & + & (a\lambda + b)q_0 & = & p_0 \end{array}\right. \quad (S).$$

La résolution du système (S) est immédiate (calcul de q_d, puis q_{d-1}, *etc.*). On en déduit l'unicité du polynôme Q tel que f soit solution de (E).

Synthèse Dans les deux cas, elle est immédiate (il suffit de «remonter les calculs». En fait, on aurait pu raisonner par équivalence, à condition d'être prudent dans la rédaction au moment de distinguer les cas.

$\square$

3 Second membre sinus-polynôme

On se place ici dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{R}$, et deux réels α et ω tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad m(t) = P(t)e^{\alpha t}\sin\omega t.$$

Remarque. Le résultat qui suit vaut aussi pour $m(t) = P(t)e^{\alpha t}\cos\omega t$, et même pour $m(t) = P_1(t)e^{\alpha t}\cos\omega t + P_2(t)e^{\alpha t}\sin\omega t$.

Proposition. Avec les notations ci-dessus, il existe des polynômes Q_1 et Q_2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ tel que l'équation (E) admette pour solution particulière la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto m(t) = Q_1(t)e^{\alpha t}\cos\omega t + P_2(t)e^{\alpha t}\sin\omega t.$$

On peut même préciser les degrés des polynômes Q_1 et Q_2, en notant $\lambda = \alpha + i\omega$:

(i) si λ n'est pas solution de (EC), alors : $\max\{\deg(Q_1), \deg(Q_2)\} = \deg(P)$;

(ii) si λ est solution *simple* de (EC), alors : $\max\{\deg(Q_1), \deg(Q_2)\} = \deg(P) + 1$;

(iii) si λ est solution *double* de (EC), alors : $\max\{\deg(Q_1), \deg(Q_2)\} = \deg(P) + 2$.

Schéma de démonstration. Il suffit d'écrire $e^{\alpha t}\sin\omega t = \frac{1}{2i}[e^{(\alpha+i\omega)t} - e^{(\alpha-i\omega t)}]$. On applique alors le résultat du paragraphe précédent et, par principe de superposition, on trouve une solution de (E) qui est somme de deux fonctions exponentielles-polynômes :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto R_1(t)e^{(\alpha+i\omega)t} + R_2(t)e^{(\alpha-i\omega t)}.$$

Pour connaître le degré de R_1 et R_2, on remarque que l'équation (EC) est à coefficients réels, donc $\alpha - i\omega = \bar{\lambda}$ est solution de (EC) si, et seulement si, λ l'est. Enfin, en écrivant $e^{(\alpha+i\omega)t} = e^{\alpha t}\cos\omega t + ie^{\alpha t}\sin\omega t$ et $e^{(\alpha-i\omega)t} = e^{\alpha t}\cos\omega t - ie^{\alpha t}\sin\omega t$, on obtient le résultat voulu.

Attention ! Même s'il n'y a que du «sinus» dans le second membre, il y a en général du «sinus» **et** du «cosinus» dans la solution particulière.

4 Méthodes de variation des constantes

Cette méthode a été (ou sera) vue en cours pour les *EDL* d'ordre 1. A noter qu'il existe une méthode de «variation des deux constantes» pour les *EDLcc* d'ordre 2, mais qui n'est pas au programme.

Géométrie dans l'espace

Complément au chapitre «géométrie élémentaire du plan et de l'espace»

Prérequis

On suppose ici connue toute la géométrie de collège et de lycée, en particulier les notions de distance, d'angle (et donc alignement, orthogonalité), de barycentre. On note $\mathscr{E}$ l'espace géométrique.

Rappelons qu'une base de l'espace est un triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de vecteurs non coplanaires. Un repère est un quadruplet $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, où O est un point et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ une base.

Si M est un point de $\mathscr{E}$, il existe alors un unique triplet de réels (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$, appelé coordonnées du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

La base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est dite orthonormée si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont des vecteurs orthogonaux et de norme 1. On dit alors que le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est orthonormé.

Il existe deux types de bases (et donc de repères) : les bases directes et les bases indirectes. En pratique, on les distingue grâce aux règles dites «du tire-bouchon» ou «des trois doigts de la main droite» (nous verrons une méthode plus «scientifique» utilisant le déterminant).

A retenir : si $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est une base directe de l'espace, alors les triplets $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a})$ et $(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ (où on a permuté circulairement les trois vecteurs) sont des bases directes, tandis que les triplets $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$, $(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a})$ et $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b})$ (où on a, à chaque fois, échangé deux vecteurs) sont des bases indirectes.

1 Modes de repérage dans l'espace

a) Changement de repère en coordonnées cartésiennes

Soient $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $\mathscr{R}' = (\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ deux repères de l'espace $\mathscr{E}$. Soit M un point, dont on notera (x, y, z) (resp. (X, Y, Z)) les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{R}'$). Par définition, on a :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \qquad ; \qquad \overrightarrow{\Omega M} = X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v} + Z\overrightarrow{w}.$$

On note, dans le repère $\mathscr{R}$: $\Omega(x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{u}(a, b, c)$, $\overrightarrow{v}(a', b', c')$, $\overrightarrow{w}(a'', b'', c'')$. On tire immédiatement, de l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, les formules :

$$\begin{cases} x = x_0 + aX + a'Y + a''Z \\ y = y_0 + bX + b'Y + b''Z \\ z = z_0 + cX + c'Y + c''Z \end{cases}.$$

b) Coordonnées cylindriques

Dans ce paragraphe et le suivant, on fixe un repère orthonormal direct (ou ROND) $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Pour tout réel φ, on note $\overrightarrow{u}_\varphi = \cos\varphi\,\overrightarrow{i} + \sin\varphi\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}_\varphi = -\sin\varphi\,\overrightarrow{i} + \cos\varphi\,\overrightarrow{j}$. Etant donné un point M de l'espace, on dit qu'un triplet $(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un système de ccordonnées cylindriques (ou SCC) du point M dans le repère $\mathscr{R}$ si :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u}_\varphi + z\,\overrightarrow{k}.$$

Si on note H le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy), le couple (r, φ) est un système de coordonnées polaires de H dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Ainsi r et z sont définis de façon unique, et si $M \notin (0z)$, alors φ est «unique modulo 2π».

On retrouve les coordonées cartésiennes de M au moyen des formules :

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{array}\right. .$$

Pour $M \notin (Oz)$, on définit le repère cylindrique attaché au point M, qui est le ROND $\mathscr{R}_\varphi = (O, \overrightarrow{u}_\varphi, \overrightarrow{v}_\varphi, \overrightarrow{k})$.

Remarque. Si on fixe $r_0 > 0$, l'ensemble des points M tels que $r = r_0$ est un cylindre d'axe (Oz), ce qui justifie l'appellation «coordonnées cylindriques».

c) Coordonnées sphériques

Gardons les notations précédentes. Pour tout réel φ et tout $\theta \in [0, \pi]$, notons $\overrightarrow{u}_{\varphi,\theta} = \cos\theta \overrightarrow{k} + \sin\theta u_\varphi$.

Etant donné un point M de l'espace, on dit qu'un triplet $(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times [0, \pi]$ est un système de coordonnées sphériques (ou SCS) du point M dans le repère $\mathscr{R}$ si :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{u}_{\varphi,\theta}.$$

On a $\rho = OM$ et $\theta = (\widehat{\overrightarrow{k}, \overrightarrow{OM}})$; comme précédemment, pour $M \notin (Oz)$, on a $\varphi \equiv (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OH}})\ [2\pi]$, et φ est «unique modulo 2π».

On retrouve les coordonées cartésiennes de M, et un système de coordonnées cylindriques, au moyen des formules :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} r = \rho\sin\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{array}\right. .$$

Pour $M \notin (0z)$, on définit le repère sphérique attaché au point M, qui est le ROND $\mathscr{R}_{\varphi,\theta} = (O, \overrightarrow{u}_{\varphi,\theta}, \overrightarrow{v}_{\varphi,\theta}, \overrightarrow{w}_{\varphi,\theta})$, où :

$$\overrightarrow{v}_{\varphi,\theta} = v_\varphi \quad ; \quad \overrightarrow{w}_{\varphi,\theta} = \sin\theta \overrightarrow{k} - \cos\theta \overrightarrow{u}_\varphi.$$

Remarque. Si on fixe $\rho_0 > 0$, l'ensemble des points M tels que $\rho = \rho_0$ est une sphère de centre O, ce qui justifie l'appellation «coordonnées sphériques». Et si on fixe θ_0, que dire de l'ensemble de points M dont la «colatitude» θ vaut θ_0 ?

2 Produit scalaire, produit vectoriel, déterminant

a) Produit scalaire

Rappelons que, si $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont des vecteurs non nuls de l'espace, on dispose de l'angle *non orienté* $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \in [0,\pi]$.

Définition. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

$$\begin{array}{rl} \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0}, & \vec{u}.\vec{v}=0\ ; \\ \text{sinon}, & \vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}). \end{array}$$

Proposition. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\vec{u}.\vec{v}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

Proposition. Le produit scalaire est bilinéaire et symétrique.

Proposition. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de coordonnées (x,y,z) et (x',y',z') dans une base *orthonormale* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, alors :

$$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'.$$

Application. Si A et B sont des points de coordonnées (a,b,c) et (a',b',c') dans un repère *orthonormal* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, alors :

$$AB^2=(a'-a)^2+(b'-b)^2+(c'-c)^2.$$

b) Produit vectoriel

Définition. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ défini par :

(i) si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$;

(ii) sinon, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est l'unique vecteur $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, de norme $\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, et tel que la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit une base *directe* de l'espace.

Proposition. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Proposition. Le produit vectoriel est bilinéaire, antisymétrique, alterné.

Lemme. Si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormale directe, alors :

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=-(\vec{j}\wedge\vec{i})=\vec{k} \quad ; \quad \vec{j}\wedge\vec{k}=-(\vec{k}\wedge\vec{j})=\vec{i} \quad ; \quad \vec{k}\wedge\vec{i}=-(\vec{i}\wedge\vec{k})=\vec{j}.$$

Proposition. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') dans une base *orthonormale directe* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, alors :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k}.$$

Proposition. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, on a :

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge w = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{u}\ .$$

Remarque. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires d'un plan P, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est un vecteur normal à P.

c) Déterminant

Définition. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. On appelle déterminant (ou produit mixte) du triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ le réel :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}\ .$$

Géométriquement, sa valeur absolue est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Proposition. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, on a :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ sont coplanaires.}$$

Proposition. Le déterminant est trilinéaire, antisymétrique, alterné.

Lemme. Si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormale directe, alors :

$$\det(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) = 1$$

Proposition. Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont des vecteurs de coordonnées (x, y, z), (x', y', z') et (x'', y'', z'') dans une base *orthonormale directe* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, alors :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x'' - yx'z'' - xz'y''$$

3 Plans : équation, paramétrage, distance à un point

On fixe dans cette section et les suivantes un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Equation cartésienne. Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace, dont on suppose connaître un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur normal non nul $\overrightarrow{u}(a, b, c)$. On a alors, pour tout point $M(x, y, z)$,

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{les vecteurs } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad ax + by + cz = ax_A + by_A + cz_A\ , \end{aligned}$$

ce qui fournit une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ sous la forme :

$$ax + by + cz = d \quad (\star).$$

Réciproquement, si X est une partie du plan définie par une équation du type $(\star)$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, il est immédiat que X est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{u}(a, b, c)$.

Equation normale. On dit que l'équation ($\star$) est une équation normale du plan $\mathscr{P}$ si $a^2+b^2+c^2=1$ (ce qui revient à choisir le vecteur $\overrightarrow{u}$ unitaire). Si ce n'est pas le cas, on obtient une équation normale en remplaçant le vecteur $\overrightarrow{u}$ par le vecteur $\overrightarrow{n}=\frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$, de coordonnées $(\alpha,\beta,\gamma)=(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}})$, ce qui revient à diviser toute l'équation ($\star$) par $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Distance d'un point M au plan $\mathscr{P}$. Soit $M(x,y,z)$ un point quelconque de l'espace, et H son projeté orthogonal sur $\mathscr{P}$. Le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est alors colinéaire à $\overrightarrow{u}$, tandis que $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$. On obtient donc : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{HM}=\pm\|\overrightarrow{u}\|.HM$, d'où :

$$d(M,\mathscr{P})=HM=\frac{|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM}|}{\|\overrightarrow{u}\|}=\frac{|ax+by+cz-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

En remplaçant le vecteur $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{n}$, c'est-à-dire dans le cas où l'équation ($\star$) est normale, on a :

$$d(M,\mathscr{P})=HM=|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM}|=|\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta|.$$

Exercice. Dans ce dernier cas, on pourra démontrer que le projeté orthononal H du point M sur le plan $\mathscr{P}$ est tel que $\overrightarrow{HM}=(\alpha x+\beta y+\gamma z-\delta)\overrightarrow{n}$.

Paramétrage cartésien. Le plan $\mathscr{P}$ peut aussi être défini par la donnée du point $A(x_A,y_A,z_A)$ et de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{v}(a',b',c')$ et $\overrightarrow{w}(a''),b'',c'')$ contenus dans $\mathscr{P}$. Pour tout point $M(x,y,z)$, on a alors :

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{P} &\Leftrightarrow \exists(s,t)\in\mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM}=s\overrightarrow{v}+t\overrightarrow{w}\\ &\Leftrightarrow \exists(s,t)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x=x_A+a's+a''t\\ y=y_A+b's+b''t\\ z=z_A+c's+c''t\end{cases} \qquad (S)\end{aligned}$$

Le système (S) fournit alors un paramétrage du plan $\mathscr{P}$. Si on préfère une équation cartésienne, on peut utiliser la méthode vue précédemment, en remarquant que le vecteur $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ (et non nul puisque $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires).

Un autre cas possible. On connaît trois points non alignés A, B, C du plan $\mathscr{P}$. On laisse au lecteur le soin de se ramener à l'un des cas précédents.

4 Droites : paramétrage, système d'équations, distance à un point

Paramétrage cartésien Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point $A(x_A,y_A,z_A)$ et dirigée par le vecteur non nul $\overrightarrow{u}(a,b,c)$. Alors , pour tout point $M(x,y,z)$ du plan,

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{D} &\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{u}\\ &\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x=x_A+at\\ y=y_A+bt\\ z=z_A+ct\end{cases} \qquad (S)\end{aligned}$$

Le système (S) est un paramétrage de la droite $\mathscr{D}$.

Distance d'un point M à la droite $\mathscr{D}$. Soit $M(x,y,z)$ un point quelconque de l'espace, et H son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$. Le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est alors orthogonal à $\overrightarrow{u}$, tandis que $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$. On obtient donc : $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{HM}$, d'où : $\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}\|=\|\overrightarrow{u}\|.HM$, et :

$$d(M,\mathscr{D})=HM=\frac{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

Système d'équations cartésiennes La droite $\mathscr{D}$ peut aussi être définie par la donnée du point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de deux vecteurs $\overrightarrow{v}(a', b', c')$ et $\overrightarrow{w}(a'', b'', c'')$ non colinéaires et orthogonaux à $\mathscr{D}$. Pour tout point $M(x, y, z)$, on a alors :

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathscr{D} & \Leftrightarrow & \text{le vecteur } \overrightarrow{AM} \text{ est orthogonal à } \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{v}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{w}.\overrightarrow{AM} = 0 \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a'x + b'y + c'z = a'x_A + b'y_A + c'z_A \\ a''x + b''y + c''z = a''x_A + b''y_A + c''z_A \end{array} \right. \end{array},$$

ce qui fournit un système d'équations cartésiennes de $\mathscr{D}$ sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{array} \right. \qquad (\star)$$

Réciproquement, si X est une partie du plan définie par un système du type $(\star)$, avec des triplets (a', b', c') et (a'', b'', c'') non nuls et non proportionnels *(en d'autres termes, un système de rang 2)*, il est immédiat que X est une droite de vecteurs normaux $\overrightarrow{v}(a', b', c')$ et $\overrightarrow{w}(a'', b'', c'')$.

Si on préfère un paramétrage de la droite $\mathscr{D}$, on peut utiliser la méthode vue précédemment, en remarquant que le vecteur $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. En sens inverse, je vous laisse réfléchir à la construction de deux vecteurs normaux à $\mathscr{D}$ connaissant un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (on peut utiliser le produit vectoriel avec les vecteurs de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$).

Perpendiculaire commune à deux droites. On dit que deux droites sont perpendiculaires si elles sont à la fois orthogonales et sécantes. On va montrer que, si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites non parallèles, alors il **existe** une **unique** perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Pour cela, fixons $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ des vecteurs directeurs de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, respectivement. Notons $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'$, $\mathscr{P}$ le plan contenant la droite $\mathscr{D}$ et le vecteur $\overrightarrow{v}$, et $\mathscr{P}'$ le plan contenant la droite $\mathscr{D}'$ et le vecteur $\overrightarrow{v}$. Ces deux plans ne sont ni parallèles, ni confondus, car sinon les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}$ seraient coplanaires. Leur intersection est donc une droite Δ, dont les vecteurs directeurs sont les vecteurs contenus à la fois dans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, ce qui est le cas de $\overrightarrow{v}$. Ainsi Δ est dirigée par $\overrightarrow{v}$, donc orthogonale à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$. Par ailleurs les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont coplanaires et non parallèles : elles sont donc sécantes en un point B. De même pour $\mathscr{D}'$ et Δ, en un point B'. Ceci prouve que Δ est une droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$. Le lecteur vérifiera que c'est la seule.

Exercice. Montrer que, si A et A' sont des points de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ respectivement, la plus courte distance d'un point de $\mathscr{D}$ à un point de $\mathscr{D}'$ est :

$$d(\mathscr{D}, \mathscr{D}') = BB' = \left| \frac{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{AA'}}{\|\overrightarrow{v}\|} \right| = \left| \frac{Det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{AA'})}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'\|} \right|.$$

5 Sphères : équation, problèmes d'intersections

Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $A(a,b,c)$ et de rayon $r>0$. Une équation cartésienne dans le ROND $\mathscr{R}$ en est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Proposition. Soit $\mathscr{D}$ une droite. L'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et de la droite $\mathscr{D}$ est :

(i) vide si $d(A,\mathscr{D})>r$;

(ii) réduite au point H, projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$, si $d(A,\mathscr{D})=r$ (on dit alors que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{D}$ sont tangentes au point H) ;

(iii) composée de deux points symétriques par rapport à H si $d(A,\mathscr{D})<r$.

Proposition. Soit $\mathscr{P}$ un plan . L'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est :

(i) vide si $d(A,\mathscr{P})>r$;

(ii) réduite au point H, projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$, si $d(A,\mathscr{P})=r$ (on dit alors que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}$ sont tangents au point H) ;

(iii) un cercle de centre H si $d(A,\mathscr{D})<r$.

Proposition. Soit $\mathscr{S}'$ une sphère de centre A' distinct du point A, et de rayon $r'>0$. On note $d=AA'$. L'intersection des sphère $\mathscr{S}$ et S' est :

(i) vide si $d>r+r'$ ou $d<|r-r'|$;

(ii) réduite à un point H de la droite (AA') si $d=r+r'$ ou $d=|r-r'|$ (on dit alors que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ sont tangentes, intérieurement ou extérieurement, au point H) ;

(iii) un cercle de centre $B\in(AA')$, contenu dans un plan orthogonal à la droite (AA'), si $|r-r'|<d<r+r'$.

Chacune de ces proposition se démontre sans difficulté quand on a fait le choix d'un repère adapté. On va, par exemple, prouver la troisième.

Démonstration. Soit $\overrightarrow{c}=\frac{1}{AA'}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{a}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{c}$, et $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a}$. Le triplet $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ est alors une base orthonormale directe de l'espace $\overrightarrow{E}$. On va désormais utiliser les coordonnées cylindriques dans le ROND $(A,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$.

On a les coordonnées $A(0,-,0)$, $A'(0,-,d)$[1]. Soit un point $M(R,\varphi,z)$ quelconque. On a :

$$\begin{aligned}
M\in\mathscr{S}\cap\mathscr{S}' &\Leftrightarrow AM=r \text{ et } A'M=r'\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} R^2+z^2=r^2\\ R^2+(z-d)^2=r'^2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} R^2=r^2-z^2\\ 2zd=r^2-r'^2+d^2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} R^2=r^2-\frac{(r^2-r'^2+d^2)^2}{4d^2}\\ 2zd=r^2-r'^2+d^2\end{cases} \qquad (\star)
\end{aligned}$$

[1]Pour les points situés sur «l'axe des z», on convient de remplacer la coordonnée φ par le signe «$-$»

Notons $z_{r,r',d} = \frac{r^2-r'^2+d^2}{2d}$ et $\Delta_{r,r',d} = r^2 - \frac{(r^2-r'^2+d^2)^2}{4d^2}$. Alors :

(i) si $\Delta_{r,r',d} < 0$, le système $(\star)$ n'admet pas de solution en R, donc l'ensemble $\mathscr{S} \cap \mathscr{S}'$ est vide ;

(ii) si $\Delta_{r,r',d} = 0$, on obtient $R = 0$ et $z = z_{r,r',d}$: l'ensemble $\mathscr{S} \cap \mathscr{S}'$ est donc réduit au point $B(0, -, z_{r,r',d})$;

(iii) si enfin $\Delta_{r,r',d} > 0$, on obtient $R = \sqrt{\Delta_{r,r',d}}$ et $z = z_{r,r',d}$, donc l'ensemble $\mathscr{S} \cap \mathscr{S}'$ est le cercle $\mathscr{C}_{r,r',d} = \{M(\sqrt{\Delta_{r,r',d}}, \varphi, z_{r,r',d})\ ;\ \varphi \in \mathbb{R}\}$.

Il reste à montrer que ces différents cas se ramènent à ceux de l'énoncé de la proposition. Un «petit» calcul montre que :

$$\Delta_{r,r',d} = \frac{1}{4d^2}[(r+r')^2 - d^2][d^2 - (r-r')^2].$$

On en déduit le résultat souhaité.

Représentation des courbes paramétrées

Introduction au chapitre « courbes paramétrées »

Important : ce polycopié servira de base au cours sur les courbes paramétrées. Il devra donc avoir été, au préalable, lu et compris. Pour vérifier que vous avez compris, vous traiterez l'exercice final, qui utilise uniquement les notions expliquées précédemment. Bien sûr, vous aurez l'occasion de poser toutes vos questions avant d'attaquer la suite du cours.

On se placera dans tout ce polycopié dans le plan géométrique $\mathscr{P}$, muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On pourra donc identifier un point de $\mathscr{P}$ avec le couple (x, y) de ses coordonnées, élément de $\mathbb{R}^2$.

On se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$, et deux fonctions x et y de I dans $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in I$, on note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$. On définit ainsi une application $f : I \to \mathscr{P},\ t \mapsto M(t)$.

On appelle **arc paramétré**, et on notera γ, le couple (I, f). On appelle trajectoire de l'arc γ l'ensemble $\Gamma = \{M(t)\ ;\ t \in I\}$.

L'objectif de ce polycopié est de savoir représenter la trajectoire Γ grâce à l'étude des propriétés des fonctions x et y. L'interprétation cinématique de cette situation est la suivante : la variable t représente le temps, et le point $M(t)$ est la position, à l'instant t, d'un mobile ponctuel. Le problème consiste alors à étudier le déplacement du mobile au cours du temps, et à représenter sa trajectoire.

1 Etude globale

a) Etude des symétries de la courbe Γ

Ce sous-paragraphe un peu plus difficile que la suite peut être sauté en première lecture.

On commence par les vérifications élémentaires.

Dans le cas où $I = \mathbb{R}$, on étudie la périodicité de x et y : s'il existe un réel $T > 0$ tel que les fonctions x et y soient toutes deux T-périodiques, alors on obtient : $\forall t \in \mathbb{R},\ M(t+T) = M(t)$. Ceci implique que :

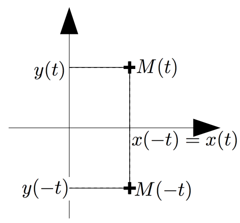
$$\Gamma = \{M(t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\} = \{M(t)\ ;\ t \in [0, T]\}.$$

Il suffit donc de d'étudier l'arc γ sur $[0, T]$ pour obtenir sa trajectoire sur $\mathbb{R}$ tout entier (on peut bien sûr remplacer $[0, T]$ par n'importe quel segment de longueur T).

Dans le cas où l'intervalle I est centré en 0, on étudie la parité de x et y. Notons Γ_+ (resp. Γ_-) la trajectoire de l'arc γ sur l'intervalle $I \cap [0, +\infty[$ (resp. $I \cap]-\infty, 0]$). Clairement $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$.

(i) Si x et y sont paires, alors pour tout $t \in I$, le point $M(-t)$ a pour coordonnées $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, donc $M(-t) = M(t)$. Ainsi $\Gamma_- = \Gamma_+$.

(ii) Si x est paire et y impaire, alors pour tout $t \in I$, le point $M(-t)$ a pour coordonnées $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, donc $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox). Ainsi Γ_- s'obtient à partir de Γ_+ par symétrie d'axe (Ox).



(iii) Si x est impaire et y paire, alors pour tout $t \in I$, le point $M(-t)$ a pour coordonnées $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, donc $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Oy). Ainsi Γ_- s'obtient à partir de Γ_+ par symétrie d'axe (Oy).

(iv) Si x et y sont impaires, alors pour tout $t \in I$, le point $M(-t)$ a pour coordonnées $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, donc $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport au point O. Ainsi Γ_- s'obtient à partir de Γ_+ par symétrie de centre O.

Ces deux critères (parité, périodicité) peuvent bien sûr être combinés pour restreindre l'étude d'abord à un intervalle du type $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, puis à $[0, \frac{T}{2}]$.

On peut ensuite chercher des symétries plus subtiles. Le principe de base est de trouver une bijection $\psi : I \to I$ et une transformation du plan $\mathscr{T} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, telles que :

$$\forall t \in I, \quad M(\psi(t)) = \mathscr{T}(M(t)).$$

On restreint alors l'étude à un sous-intervalle de J de I, et on obtient la trajectoire Γ en entier grâce à la transformation $\mathscr{T}$.

Quelques exemples :

(i) $I =]0,1[$ et, pour tout $t \in I$, $x(1-t) = y(t)$ et $y(1-t) = x(t)$: on se restreint à l'intervalle $]0, \frac{1}{2}]$, et on obtient Γ par symétrie d'axe Δ (première bissectrice du repère).

(ii) $I = \mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t+\pi) = x(t) - 1$ et $y(t+\pi) = y(t) + 3$: on se restreint à l'intervalle $[0, \pi]$, et on obtient Γ par translations successives de vecteur $\overrightarrow{u}(-1, 3)$ (et son opposé).

(iii) $I = \mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t+2) = -y(t)$ et $y(t+2) = x(t)$: on se restreint à l'intervalle $[0, 2]$, et on obtient Γ par rotations successives de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Remarque importante : c'est souvent après avoir tracé une première ébauche de la courbe Γ qu'on remarque des symétries qu'on n'avait pas devinées a priori.

b) Etude des variations de x et y

Dans l'immense majorité des cas, les fonctions x et y seront dérivables (et même infiniment dérivables) en tout point de I, sauf éventuellement un nombre fini. On peut donc étudier sans difficulté les variations de x et y. On fait alors un double tableau de variations, sur le modèle suivant :

t		a		b		c	
x'(t)	+	0	−		−	0	+
x(t)	↗		↘		↘		↗
y(t)	↗		↗		↘		↘
y'(t)	+		+	0	−		−

Ce tableau s'interprète de la façon suivante :

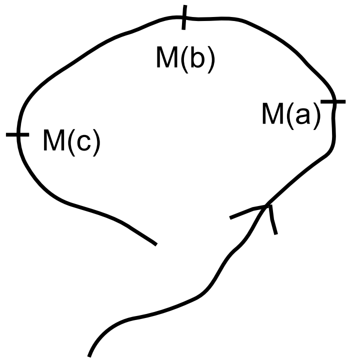
(i) à gauche de a, les fonctions x et y sont croissantes, ce qui signifie que l'abscisse et l'ordonnée de $M(t)$ augmentent. Graphiquement, le point $M(t)$ se dirigera donc vers la droite et vers le haut au cours du temps.

(ii) entre a et b, la fonctions x décroît tandis que y croît. Graphiquement, le point $M(t)$ se dirigera donc vers la gauche (abscisse décroissante) et vers le haut (ordonnée croissante) au cours du temps.

(iii) entre b et c, les fonctions x et y sont décroissantes. Graphiquement, le point $M(t)$ se dirigera donc vers la gauche et vers le bas au cours du temps.

(iv) enfin, à droite de c, la fonctions x croît tandis que y décroît. Graphiquement, le point $M(t)$ se dirigera donc vers la droite et vers le bas au cours du temps.

La trajectoire Γ ressemblera à ceci :

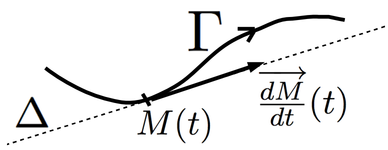


2 Etude locale

a) Etude des tangentes à Γ

Supposons les fonctions x et y dérivables sur I. On notera $\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t)$ le vecteur de coordonnées $(x'(t), y'(t))$. Toujours dans l'interprétation cinématique évoquée plus haut, le vecteur $\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t)$ représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant t.

Si ce vecteur est non nul, c'est-à-dire si $x'(t) \neq 0$ ou $y'(t) \neq 0$, on dit que l'arc γ est **birégulier** en t (ou au point $M(t)$). La trajectoire Γ admet alors au point $M(t)$ une tangente Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t)$:



En particulier, si $x'(t) = 0$ mais $y'(t) \neq 0$, le vecteur $\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t)$ est colinéaire à $\overrightarrow{j}$: la courbe Γ admet alors une tangente verticale au point $M(t)$. De même, si $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$, la courbe Γ admet une tangente horizontale au point $M(t)$.

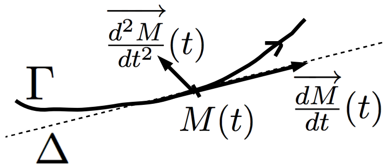
Rappel : vous devez être capable de déterminer une équation de la tangente Δ connaissant les coordonnées de $M(t)$ et $\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t)$; vous devez aussi savoir déterminer une équation de la **normale** à la coube Γ au point $M(t)$, c'est-à-dire la perpendiculaire à Δ passant par $M(t)$.

b) Position de Γ par rapport à ses tangentes

On suppose ici que les fonctions x et y sont dérivables au moins deux fois sur I. On notera $\overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}}(t)$ le vecteur de coordonnées $(x''(t), y''(t))$. Dans l'interprétation cinématique, ce vecteur est le vecteur accélération à l'instant t.

Si les vecteurs $\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t)$ et $\overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}}(t)$ ne sont pas colinéaires, on dit que l'arc γ est **birégulier** en t (ou au point d'abscisse $M(t)$). La courbe Γ, au voisinage du point $M(t)$, est alors située du même côté de sa tangente Δ que le vecteur $\overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}}(t)$. On dit qu'elle tourne sa concavité du côté de ce vecteur.

En pratique, il peut être utile de calculer le déterminant $\det\left(\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t), \overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}}(t)\right) = \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}$. L'arc γ est birégulier en t si, et seulement si, ce déterminant est non nul. S'il est positif, comme vu dans le chapitre 4, cela signifie que le vecteur $\overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}}(t)$ est «à gauche» de $\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t)$: la courbe Γ tourne sa concavité vers la gauche. Si par contre le déterminant est négatif, la courbe Γ tourne sa concavité vers la droite.



avec $\det\left(\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t), \overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}}(t)\right) > 0$

Lorsque l'arc paramétré γ n'est pas birégulier en un point, les choses sont plus compliquées. Ce problème pourra être abordé grâce à l'étude des développements limités qui sera faite plus tard dans l'année.

3 Etude aux bornes

Si l'intervalle I est un segment, ce paragraphe ne sert à rien. On va donc supposer ici que I est un intervalle ouvert $]a, b[$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On ne fera que l'étude au voisinage de b, l'étude au voisinage de a étant similaire.

Pour tout ce paragraphe, je n'ai pas eu le temps de faire les dessins ; je vous laisse vous en charger à l'aide de ce qui a été fait pour la fiche «aide-mémoire pour la représentation des fonctions».

a) Branches infinies de Γ

On dit que l'arc γ admet une **branche infinie** en b dès que : $OM(t) \xrightarrow[t\to b]{} +\infty$.
(où $OM(t)$ désigne la distance entre les points O et $M(t)$)

(i) Etude générale

On étudiera alors le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{OM(t)}}{OM(t)}$. S'il existe un réel φ tel que $\frac{\overrightarrow{OM(t)}}{OM(t)} \xrightarrow[t\to b]{} \overrightarrow{u}_\varphi$, alors on dit que la courbe Γ admet en b une branche infinie de **direction aymptotique** $\overrightarrow{u}_\varphi$.
On se placera alors dans le repère orthonormal direct $\mathscr{R}' = (O, \overrightarrow{u}_\varphi, \overrightarrow{u}_{\varphi+\frac{\pi}{2}})$. On notera $(X(t), Y(t))$ les coordonnées du point $M(t)$ dans ce repère, et on aura toujours $X(t) \xrightarrow[t\to b]{} +\infty$.
Si de plus $Y(t)$ admet une limite finie ℓ pour $t \to b$, l'arc γ admet pour **asymptote**, au voisinage de b, la droite d'équation $Y = \ell$ (dans le repère $\mathscr{R}'$).
Si par contre $Y(t)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ pour $t \to b$, l'arc γ admet, au voisinage de b, une **branche parabolique** de direction aymptotique $\overrightarrow{u}_\varphi$.

(ii) Etude à l'aide des fonctions x et y

En pratique, l'arc γ admet en b un branche infinie dès que $x(t)^2 + y(t)^2 \xrightarrow[t\to b]{} +\infty$.
On étudie alors le quotient $\frac{y(t)}{x(t)}$.
Si $\frac{y(t)}{x(t)}$ admet une limite finie α pour $t \to b$, l'arc γ admet en b une branche infinie de direction asymptotique le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(1, \alpha)$ (ou son opposé).
On étudie alors la limite de $x(t)$ (qui vaut $\pm\infty$) pour savoir si la branche est «vers la gauche» ou «vers la droite». Puis on étudie la limite éventuelle de $y(t) - \alpha x(t)$.
Si $y(t) - \alpha x(t)$ admet une limite finie β pour $t \to b$, alors l'arc γ admet pour asymptote, au voisinage de b, la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$.
Si $y(t) - \alpha x(t)$ admet une limite infinie pour $t \to b$, alors l'arc γ admet , au voisinage de b, une branche parabolique de direction $\overrightarrow{v}$.
Si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to b]{} \pm\infty$, l'arc$\gamma$ admet en b une branche infinie de direction asymptotique verticale. On étudie alors les limites de $y(t)$ (qui vaut $\pm\infty$) pour savoir si la branche est «vers le haut» ou «vers le bas», et de $x(t)$ (finie ou infinie, ou pas de limite), pour savoir si on a affaire à une asymptote verticale, à une branche parabolique de direction verticale, ou à un autre type de branche infinie.

b) Limites finies

On suppose ici qu'il existe un point $A(x_A, y_A)$ tel que $M(t) \xrightarrow[t\to b]{} A$, c'est-à-dire :

$$x(t) \xrightarrow[t\to b]{} x_A \text{ et } y(t) \xrightarrow[t\to b]{} y_A.$$

On cherchera alors à savoir si la courbe Γ admet une demi-tangente au voisinage du point A. Pour cela on étudiera le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{OM(t)}}{OM(t)}$.

S'il existe un réel φ tel que $\frac{\overrightarrow{OM(t)}}{OM(t)} \xrightarrow[t\to b]{} \overrightarrow{u}_\varphi$, alors la courbe Γ admet au voisinage du point A une demi-tangente dirigée et orientée par $\overrightarrow{u}_\varphi$.

En pratique, on étudiera le quotient $\frac{y(t)-y_A}{x(t)-x_A}$.

Si $\frac{y(t)-y_A}{x(t)-x_A}$ admet une limite finie α pour $t \to b$, la courbe Γ admet au voisinage de A une demi-tangente dirigée et orientée par le vecteur $\overrightarrow{V}$ de coordonnées $(1, \alpha)$ (ou son opposé : on choisira entre les deux à l'aide des variations de x et y, étudiées précédemment).

Si $\frac{y(t)-y_A}{x(t)-x_A} \xrightarrow[t\to b]{} \pm\infty$, la courbe Γ admet au voisinage de A une demi-tangente verticale.

4 Application

4.1 Exercice On considère l'arc Γ défini par le paramétrage : $x(t) = (1-t)^2 e^t$, $y(t) = 2(1-t)e^t$. Représenter Γ.

On étudiera les variations de x et y, puis leurs limites en $-\infty$ et $+\infty$, pour obtenir une première ébauche de la courbe Γ. Puis on affinera en déterminant les tangentes verticales et horizontales (et en particulier les coordonnées des points correspondants), la nature de la branche infinie en $+\infty$, et la demi-tangente pour $t \to -\infty$.

Définition monofocale des coniques

TD d'introduction au chapitre «coniques»

1 - Définition, équation polaire

On se place dans le plan géométrique euclidien, noté $\mathbb{P}$. Soit F un point, $\mathscr{D}$ une droite ne passant pas par F, et e un réel strictement positif. On appelle conique de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité e l'ensemble :

$$\mathscr{C}_e = \{\, M \in \mathbb{P} \mid FM = e.\mathrm{d}(M, \mathscr{D}) \,\}.$$

Si M est un point de $\mathbb{P}$, on notera toujours H son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$. Ainsi $\mathrm{d}(M, \mathscr{D}) = MH$. Soit en particulier K le projeté orthogonal de F sur $\mathscr{D}$, Δ la droite (FK), et $d = FK = \mathrm{d}(M, \mathscr{D})$.

a) Démontrer que l'ensemble $\mathscr{C}_e$ est symétrique par rapport à la droite Δ, appelé axe focal de la conique $\mathscr{C}_e$.

On note $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{FK}}{FK}$ et $\vec{j}$ l'unique vecteur tel que $(\vec{i}, \vec{j})$ soit une base orthonormale directe du plan $\mathbb{P}$.

b) Donner une équation polaire de la droite $\mathscr{D}$ dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$. Rappeler la formule donnant, à l'aide des coordonnées polaires d'un point M, sa distance à la droite $\mathscr{D}$.

c) En déduire une équation polaire de l'ensemble $\mathscr{C}_e$ dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$. On devrait trouver deux équations, et montrer qu'une seule suffit. On introduira le réel $p = de$, appelé paramètre de la conique.

2 - Equation cartésienne, classification

a) Déterminer les points d'intersection entre la droite Δ et l'ensemble $\mathscr{C}_e$. Préciser leurs positions par rapport au point F et à la droite $\mathscr{D}$.

Si $e \neq 1$, on trouve deux points d'intersection A et A' (A étant le plus proche de F). On note alors O le milieu du segment $[A, A']$. Si $e = 1$, on trouve un seul point d'intersection, qu'on note O.
Ces deux cas devront bien sûr être distingués dans les questions suivantes.

On se place désormais dans le repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Déterminer les coordonnées cartésiennes, dans le repère $\mathscr{R}$, des points F et K, ainsi qu'une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$.

c) On suppose $e = 1$. Montrer que la conique $\mathscr{C}_e$ admet pour équation cartésienne, dans le repère $\mathscr{R}$: $2px + y^2 = 0$. Représenter $\mathscr{C}_e$, ainsi que son foyer et sa directrice ; on dit que $\mathscr{C}_e$ est une parabole.

d) On suppose maintenant $e \neq 1$. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble $\mathscr{C}_e$ dans le repère $\mathscr{R}$. Montrer que celle ci peut se mettre sous la forme :

(i) si $e < 1$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a > b > 0$ ($\mathscr{C}_e$ est une ellipse) ;

(ii) si $e > 1$: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a > 0$ et $b > 0$ ($\mathscr{C}_e$ est une hyperbole).

On exprimera les réels a et b en fonction de l'excentricité e et du paramètre $p = de$. En notant $c = OF$, on trouvera des relations très simples liant a^2, b^2 et c^2, et on exprimera l'excentricité e en fonction de a et c.

e) Montrer que, si $e \neq 1$, la conique $\mathscr{C}_e$ possède un centre de symétrie et un deuxième axe de symétrie (axe secondaire). En déduire l'existence d'un point F' et d'une droite $\mathscr{D}'$ tels que $\mathscr{C}_e$ soit la conique de foyer F', de directrice $\mathscr{D}'$ et d'excentricité e.

3 - Paramétrage et représentation des coniques à centre

a) On suppose ici $e < 1$. On note $\mathscr{E} = \mathscr{C}_e$, et on conserve les notations précédentes.

Montrer que $\mathscr{E}$ admet le paramétrage $\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$ $(\varphi \in \mathbb{R})$.

Représenter alors $\mathscr{E}$, en expliquant votre démarche. Placer aussi les foyers et directrices.

Montrer que $\mathscr{E} \setminus \{A'\}$ admet le paramétrage $\begin{cases} x = a\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b\frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

b) On suppose ici $e > 1$. On note $\mathscr{H} = \mathscr{C}_e$, et on conserve les notations précédentes.

Montrer que $\mathscr{H}^+ = \{M(x, y) \in \mathscr{H} \mid x > 0\}$ admet le paramétrage $\begin{cases} x = a\cosh\varphi \\ y = b\sinh\varphi \end{cases}$ $(\varphi \in \mathbb{R})$.

On note $\vec{u} = \frac{1}{2}(a\vec{i} - b\vec{j})$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}(a\vec{i} + \vec{j})$. Déterminer une équation de $\mathscr{H}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Représenter alors $\mathscr{H}$, ainsi que ses foyers, directrices et asymptotes.

Montrer que $\mathscr{H}$ (tout entière) admet le paramétrage $\begin{cases} x = a(t + \frac{1}{t}) \\ y = b(t - \frac{1}{t}) \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R}^*)$.

4 - Synthèse

Résumer toutes les propriétés des trois types de coniques dans un tableau auquel vous pourrez vous référer pendant la suite du cours.

Relations d'ordre

Complément au chapitre traitant des entiers naturels

1 Relations binaires

1.1 Définition On appelle correspondance la donnée d'un triplet (E, F, Γ), où E et F sont des ensembles et Γ une partie du produit cartésien $E \times F$.

1.2 Exemple Les applications sont un type particulier de correspondances (avec une hypothèse supplémentaire sur le graphe Γ).

1.3 Définition Soit $\mathscr{R} = (E, F, \Gamma)$ une correspondance. Si $E = F$, on dit que $\mathscr{R}$ est une relation binaire sur l'ensemble E. Pour $(x, y) \in E^2$, on notera alors $x\mathscr{R}y$ si, et seulement si, $(x, y) \in \Gamma$.

1.4 Exemple Soit E un ensemble quelconque, et $\Delta = \{(x, x)\,;x \in E\}$ la diagonale de $E \times E$. La relation $\mathscr{R} = (E, E, \Delta)$ est la relation d'identité sur E : $x\mathscr{R}y \;\Leftrightarrow\; x = y$.

1.5 Définition Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que $\mathscr{R}$ est :

(i) réflexive si : $\forall x \in E \quad x\mathscr{R}x$.

(ii) symétrique si : $\forall (x, y) \in E^2 \quad x\mathscr{R}y \;\Rightarrow\; y\mathscr{R}x$.

(iii) antisymétrique si : $\forall (x, y) \in E^2 \quad [x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x] \;\Rightarrow\; x = y$.

(iv) transitive si : $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad [x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z] \;\Rightarrow\; x\mathscr{R}z$.

1.6 Exemple Soit $\mathscr{C}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mathscr{C}y \;\Leftrightarrow\; x \equiv y\ [2\pi]$. C'est une relation réflexive, symétrique et transitive : on dit que c'est une **relation d'équivalence** (notion actuellement hors-programme).

1.7 Exemple Soit $\mathscr{R}$ la relation définie sur $\mathbb{C}$ par $x\,\mathscr{R}\,y \;\Leftrightarrow\; x^2 = y$. Cette relation ne possède aucune des quatre propriétés énumérées ci-dessus (sauriez-vous le démontrer ?).

2 Relations d'ordre

2.1 Définition Soit E un ensemble. On appelle relation d'ordre sur l'ensemble E toute relation binaire sur E qui est réflexive, antisymétrique et transitive.

On appelle ensemble ordonné tout couple $(E, \prec)$, où le symbole $\prec$ désigne une relation d'ordre sur l'ensemble E (le symbole «$\prec$» peut se lire «plus petit que»).

2.2 Exemple Soit E l'ensemble $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E, de même que la relation $\geqslant$.
Par contre, la relation «d'ordre strict» $<$ n'est pas une relation d'ordre, car elle n'est pas réflexive : il existe $x \in E$ (par exemple $x = 0$) tel que $x < x$ ne soit pas vérifié.

2.3 Exemple Soit X un ensemble. Le relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathscr{P}(X)$.

2.4 Exemple Si a et b sont deux entiers naturels, on dit que a divise b, et on note $a|b$, si, et seulement si, $\exists n \in \mathbb{N},\ b = na$. La relation de divisibilité $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

2.5 Définition (hors-programme) On appelle relation de préordre sur l'ensemble E toute relation réflexive et transitive. Ainsi, les relations d'équivalence et les relations d'ordre sont des relations de préordre.

3 Majorant, minorant, plus petit élément, plus grand élément

3.1 Définition Soit E un ensemble, et $\prec$ une relation d'ordre sur E. Soit A une partie de E, et $x \in E$.

(i) On dit que x est un majorant de la partie A (pour l'ordre $\prec$) si : $\forall a \in A \quad a \prec x$.

(ii) On dit que x est un minorant de la partie A si : $\forall a \in A \quad x \prec a$.

(iii) On dit que x est le plus grand élément de la partie A si : $x \in A$ et $\forall a \in A \quad a \prec x$.

(iv) On dit que x est le plus petit élément de la partie A si : $x \in A$ et $\forall a \in A \quad x \prec a$.

3.2 Exemple Soit X un ensemble. Dans l'ensemble ordonnée $(\mathscr{P}(X), \subset)$, le plus petit élément de $\mathscr{P}(X)$ est l'ensemble vide $\emptyset$, et le plus grand est X.

3.3 Exemple Dans l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, |)$, le plus petit élément est 1, et le plus grand est 0... (A vérifier par vous-même si vous n'êtes pas convaincu !)

Dénombrement - quelques démonstrations

Complément au chapitre traitant des ensembles finis

1 Unicité du cardinal d'un ensemble

1.1 Théorème *Soit p et q deux entiers naturels non nuls. S'il existe une bijection $\varphi : [\![1,p]\!] \to [\![1,q]\!]$, alors $p=q$.*

Démonstration. On va démontrer, par récurrence sur l'entier $p \geqslant 1$, l'assertion $\mathscr{P}(p)$: «pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, s'il existe une bijection $\varphi : [\![1,p]\!] \to [\![1,q]\!]$, alors $p=q$».

Initialisation. On a $[\![1,1]\!] = \{1\}$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ quelconque, et supposons l'existence d'une bijection $\varphi : \{1\} \to [\![1,q]\!]$. Si $q \geqslant 2$, comme φ est surjective, il existe $x \in \{1\}$ tel que $\varphi(x)=1$, et $y \in \{1\}$ tel que $\varphi(y)=2$; mais alors nécessairement $x=y=1$, et $\varphi(1)=1=2$: contradiction. Donc $q=1$: on a prouvé $\mathscr{P}(1)$.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, et supposons l'assertion $\mathscr{P}(p)$ vraie. On veut prouver $\mathscr{P}(p+1)$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ quelconque, et supposons l'existence d'une bijection $\varphi : [\![1,p+1]\!] \to [\![1,q]\!]$. Déjà, on a $q \geqslant 2$. En effet, $p+1 \geqslant 2$ donc, si on supposait $q=1$, on aurait forcément $\varphi(1)=1=\varphi(2)$, ce qui contredirait l'injectivité de φ.

La clef de la démonstration est maintenant de construire une bijection $\psi : [\![1,p]\!] \to [\![1,q-1]\!]$. Deux cas se présentent.

Cas 1 : $\varphi(p+1)=q$. Alors, par injectivité de φ, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a $\varphi(i) \neq q$. Donc $\varphi([\![1,p]\!]) \subset [\![1,q-1]\!]$, ce qui permet de définir ψ comme l'application induite par φ de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,q]\!]$: $\forall i \in [\![1,p]\!]\ \psi(i)=\varphi(i)$.
L'application ψ est injective : en effet, par injectivité de φ, pour tout $i \neq j$ dans $[\![1,p]\!]$, on a $\varphi(i) \neq \varphi(j)$, c'est-à-dire $\psi(i) \neq \psi(j)$. Elle est aussi surjective : comme φ est surjective, pour tout $j \in [\![1,q-1]\!]$, il existe $i \in [\![1,p+1]\!]$ tel que $\varphi(i)=j$. Mais $j \neq q$ donc $i \neq p+1$, donc $i \in [\![1,p]\!]$ et $\varphi(i)=\psi(i)=j$.
On a ainsi prouvé que ψ est bijective.
Cas 2 : $\varphi(p+1) \neq q$. On pose alors $h=\varphi(p+1)$, et $k=\varphi^{-1}(q)$. On définit l'application $\psi : [\![1,p]\!] \to [\![1,q-1]\!]$ en posant :

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \setminus \{h\} \quad \psi(i)=\varphi(i) \qquad \text{et} \qquad \psi(h)=k.$$

Là encore, ψ est bien à valeurs dans $[\![1,q-1]\!]$ car φ est injective.
Montrons que ψ est injective. Soit $i \neq j$ dans $[\![1,p]\!]$. Si $i \neq h$ et $j \neq h$, on a $\psi(i)=\varphi(i) \neq \varphi(j)=\psi(j)$. Si par contre $i=h$ et $j \neq h$ (le cas $j=h, i \neq h$ étant identique), alors on a aussi $j \neq p+1$, donc $\psi(i)=k=\varphi(p+1) \neq \varphi(j)=\psi(j)$. Dans tous les cas, $\varphi(i) \neq \varphi(j)$, ce qui prouve l'injectivité.
Montrons que ψ est aussi surjective. Soit $j \in [\![1,q-1]\!]$. Si $j \neq k$, alors $\varphi^{-1}(j) \in [\![1,p]\!] \setminus \{h\}$ donc $j=\psi(\varphi^{-1}(j))$. Si $j=k$, alors $j=\psi(h)$. Dans tous les cas, j possède un antécédent, ce qui prouve la surjectivité : ψ est donc bijective.

Dans les cas 1 et 2, on a pu construire une bijection $\psi : [\![1,p]\!] \to [\![1,q-1]\!]$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit $p=q-1$, donc $p+1=q$. L'assertion $\mathscr{P}(p+1)$ est ainsi prouvée.

Conclusion. L'assertion $\mathscr{P}(p)$ est donc vraie pour tout entier naturel non p, ce qu'il fallait démontrer. □

2 Partie d'un ensemble fini

2.1 Théorème *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}^*$. Alors A est un ensemble fini, et il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$, et une application croissante et bijective $\varphi : [\![1, p]\!] \to A$. De plus le couple (p, φ) vérifiant cette propriété est unique.*

Démonstration. On va prouver, par récurrence sur l'entier $M \in \mathbb{N}^*$, que le théorème est vérifié pour toute partie A majorée par M, c'est-à-dire telle que $\forall a \in A \; a \leqslant M$.

Initialisation. $M = 1$. Si on suppose la partie A non vide et majorée par 1, alors nécessairement $A = \{1\}$. A est donc finie, de cardinal 1, ce qui impose $p = 1$. Il existe une unique application de $[\![1, 1]\!] = \{1\}$ dans $\{1\}$, qui se trouve être, clairement, bijective et croissante.

Hérédité. Soit $M \in \mathbb{N}$, et supposons la propriété prouvée pour toute partie A majorée par M. Soit maintenant A une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée par $M + 1$. D'après une propriété de l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leqslant)$, on sait que A possède un plus grand élément, que l'on notera m. On a $m \in A$, donc $m \leqslant M + 1$.

Évacuons tout de suite le cas où $A = \{m\}$: A est alors fini, de cardinal 1, et l'existence comme l'unicité du couple (p, φ) sont immédiates.

Supposons maintenant que l'ensemble $A' = A \setminus \{m\}$ est non vide. Pour tout $a \in A'$, on a $a \in A$ donc $a \leqslant m$, et de plus $a \neq m$, donc $a \leqslant m - 1$. Or $m - 1 \leqslant M$, donc A' est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée par M : on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence.

Ainsi A' est fini, donc $A = A' \cup \{m\}$ (union disjointe) est fini. Notons $p = Card(A)$ (c'est, d'après le théorème 1, la seule valeur possible de p) ; on a donc $Card(A') = p - 1$. Il existe une unique bijection croissante $\psi : [\![1, p-1]\!] \to A'$. Montrons maintenant l'existence et l'unicité de la bijection croissante $\varphi : [\![1, p]\!] \to A$.

Unicité. Soit φ une telle bijection croissante. Montrons que $\varphi(p) = m$. En effet, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $k \leqslant p$ donc $\varphi(k) \leqslant \varphi(p)$, ce qui prouve que $\varphi(p)$ est un majorant de la partie $\varphi([\![1, p]\!])$. Or φ est surjective, donc $\varphi([\![1, p]\!]) = A$. Ainsi $\varphi(p)$ est un majorant de A (et $\varphi(p) \in A$). Par unicité du plus grand élément de A, on en déduit $\varphi(p) = m$.

Comme φ est injective, on a alors $\varphi([\![1, p-1]\!]) \subset A'$. Et comme φ est bijective et croissante, on obtient immédiatement que l'application $\tilde{\varphi} : \varphi([\![1, p-1]\!]) \to A$ est bijective et croissante, donc $\tilde{\varphi} = \psi$.

On a ainsi prouvé que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$\varphi(k) = \psi(k) \text{ si } k \leqslant p - 1 \qquad ; \qquad \varphi(p) = m.$$

Ceci prouve l'unicité de φ.

Existence. On vérifie facilement que l'application φ ainsi définie est une bijection croissante de $[\![1, p]\!]$ sur A, ce qui prouve l'existence.

Conclusion. On a prouvé, par récurrence, l'existence et l'unicité du couple (p, φ). $\square$

2.2 Remarque En pratique, on a donc $p = Card(A)$. Quand à l'application φ, elle pourrait être définie ainsi : $\varphi(1)$ est le plus petit élément de A, $\varphi(2)$ son deuxième plus petit élément, etc. La définition de φ correspond à l'idée naturelle de «ranger les éléments de A dans l'ordre croissant».

2.3 Remarque L'application φ est strictement croissante et $\varphi(1) \geqslant 1$ (car $\varphi(1) \in A \subset \mathbb{N}^*$). On en déduit facilement, par récurrence, que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\varphi(k) \geqslant k$. Donc $\varphi(p) \geqslant p$. Or $\varphi(p) \in A$ donc $\varphi(p) \leqslant M$ (où M est un majorant de A). Finalement, $p \leqslant M$, c'est-à-dire :

$$Card(A) \leqslant M.$$

De $\varphi(p) \leqslant M$, on déduite par récurrence descendante (et par stricte croissance de φ) que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\varphi(k) \leqslant M - (p - k)$. Si on suppose de plus $p = M$, on obtient $k \leqslant \varphi(k) \leqslant p - (p - k)$, donc $\varphi(k) = k$. On a alors $A = \varphi([\![1, p]\!]) = [\![1, p]\!] = [\![1, M]\!]$.

2.4 Théorème *Soient E et F deux ensembles tels que $F \subset E$. Si E est fini, alors F est fini et $Card(F) \leqslant Card(E)$. De plus :*

$$Card(F) = Card(E) \quad \Leftrightarrow \quad F = E.$$

Démonstration. Si l'ensemble F est vide, le résultat est immédiat. On le supposera désormais non vide.

Si E est fini, soit $M = Card(E)$ et $f : [\![1, M]\!] \to E$ une bijection. Notons $A = f^{-1}(F)$. L'ensemble A est inclus dans $[\![1, M]\!]$, c'est donc une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide et majorée par $\mathbb{N}$. D'après tout ce qui précède, A est donc finie. Notons $p = \operatorname{Card} A$; il existe une bijection $\varphi : [\![1, p]\!] \to A$. Or la bijection f induit une bijection $\tilde{f} : A \to F$. On obient donc une bijection $g = \tilde{f} \circ \varphi$ de $[\![1, p]\!]$ sur F. Ceci prouve que F est fini, et $\operatorname{Card} F = p$.

Par ailleurs, d'après la remarque précédente, on a $p \leqslant M$, c'est-à-dire $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$. Si $F = E$, on a bien sûr $\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E$. Réciproquement, si $\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E$, alors $p = M$, donc $A = [\![1, M]\!]$, donc $F = f(A) = E$. $\square$

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Complément au chapitre «suites numériques»

On notera ici $\mathbb{K}$ un corps ; en pratique ce sera toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit E un ensemble. On appelle loi de composition interne sur E toute application $\star : E \times E \to E$.
On appelle loi de composition externe sur E à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application $\perp : \mathbb{K} \times E \to E$.
On notera alors :

$$\star(x, y) = x \star y \qquad \text{et} \qquad \perp(\lambda, x) = \lambda x.$$

1 Espaces vectoriels et algèbres

1.1 Définition On appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ tout triplet $(E, +, \perp)$, où E est un ensemble, $+$ une loi de composition interne sur E, et $\perp$ une loi de composition externe sur E à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que :

(i) $(E, +)$ est un groupe commutatif ;

(ii) $\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E, \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

(iii) $\forall(\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

(iv) $\forall(\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E, \quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;

(v) $\forall x \in E, \quad 1_{\mathbb{K}}x = x$.

1.2 Exemple On a vu que l'ensemble des vecteurs du plan géométrique (ou de l'espace géométrique) est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

1.3 Définition On appelle algèbre sur le corps $\mathbb{K}$ tout quadruplet $(A, +, \cdot, \perp)$, où A est un ensemble, $+$ et $\cdot$ deux lois de composition interne sur A, et $\perp$ une loi de composition externe sur A à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que :

(i) $(A, +, \perp)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$;

(ii) $(A, +, \cdot)$ est un anneau ;

(iii) $\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E, \quad \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$;

1.4 Exemple L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, muni des opérations usuelles, est une algèbre sur le corps $\mathbb{R}$.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition Soit $(E, +, \perp)$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace-vectoriel de E si :

(i) F est non vide ;

(ii) F est stable par la loi $+$, c'est-à-dire : $\forall(x, y) \in F \times F, \quad x + y \in F$;

(iii) F est stable par la loi $\perp$, c'est-à-dire : $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F, \quad \lambda x \in F$;

Les restrictions des lois $+$ et $\perp$ font alors de $(F, +_F, \perp_F)$ un espace vectoriel.

Généralités sur les fonctions

Préliminaire au chapitre «Fonctions : limites, continuité»

On notera ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Fonctions à valeurs réelles ou complexes

a) Structure

Soit X une partie de $\mathbb{R}$, supposée non vide. On note $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{K}$. Soient f et g deux telles fonctions, et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On définit les fonctions $f+g$, fg et λf, de X dans $\mathbb{R}$, en posant pour tout $x \in X$:

$$[f+g](x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad [fg](x) = f(x)g(x) \quad ; \quad [\lambda f](x) = \lambda f(x).$$

1.1 Théorème *Avec les définitions précédentes, le quadruplet* $(\mathscr{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot, \perp)$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre commutative, non intègre dès que* X *contient au moins deux éléments distincts.*

1.2 Remarque Soit $f : X \to \mathbb{K}$ une fonction. Elle possède un inverse dans $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ si, et seulement si, elle ne s'annule pas sur X. Dans ce cas, son inverse est la fonction $\frac{1}{f} : X \to \mathbb{K},\ x \mapsto \frac{1}{f(x)}$.

b) Composition

On ne rappelle pas la définition générale de composée de deux fonctions. Il convient cependant de signaler un «abus d'écriture» presque systématique : si X et Y sont deux parties de $\mathbb{R}$, et $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(X) \subset Y$, on notera $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ (et non $g \circ f^{|Y}$) la composée de g par la restriction de f, à l'arrivée, à Y.

c) Fonctions majorées, minorées, bornées

1.3 Définition On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est :

(i) majorée s'il existe un réel A tel que : $\forall x \in X, f(x) \leqslant A$.
On note alors $\sup_{x \in X} f(x) = \sup\{f(x)\,;\ x \in X\}$.

(ii) minorée s'il existe un réel B tel que : $\forall x \in X, \quad f(x) \geqslant B$.
On note alors $\inf_{x \in X} f(x) = \inf\{f(x)\,;\ x \in X\}$.

(iii) bornée s'il existe un réel positif M tel que : $\forall x \in X, \quad |f(x)| \leqslant M$.
On note alors $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\,;\ x \in X\}$.

1.4 Remarque La fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est bornée si, et seulement si, elle est minorée et majorée.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on définit de même la notion de fonction bornée. On montre que la fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est bornée si, et seulement si, ses fonctions partie réelle et partie imaginaire sont bornées.

1.5 Proposition *L'ensemble* $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$ *des fonctions bornées sur* X *est stable par addition, produit, et multiplication par un scalaire. Il contient de plus toutes les fonctions constantes, en particulier la fonction* $\tilde{1}$. *On dit que* $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$ *est une sous-*$\mathbb{K}$*-algèbre de* $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$.

1.6 Exercice Montrer que la fonction $\|\cdot\|_\infty : \mathscr{B}(X, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ est une norme, c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

(i) positivité : $\forall f \in \mathscr{B}(X, \mathbb{K}),\ \|f\|_\infty \geqslant 0$;

(ii) séparation : $\forall f \in \mathscr{B}(X, \mathbb{K}),\ \|f\|_\infty = 0 \ \Rightarrow\ f = \tilde{0}$;

(iii) homogénéité : $\forall f \in \mathscr{B}(X, \mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$;

(iv) inégalité triangulaire : $\forall (f, g) \in \mathscr{B}(X, \mathbb{K})^2,\ \|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

d) Fonctions paires, impaires, périodiques, antipériodique

1.7 Définition On dit que la partie X de $\mathbb{R}$ est centrée en 0 si : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in X \Leftrightarrow -x \in X$.
Si c'est le cas, on dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ est :

(i) paire si $\forall x \in X,\ f(-x) = f(x)$;

(ii) impaire si $\forall x \in X,\ f(-x) = -f(x)$;

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que la partie X est T-périodique si : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in X \Leftrightarrow x + T \in X$.
Si c'est le cas, on dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ est :

(i) T-périodique si $\forall x \in X,\ f(x+T) = f(x)$;

(ii) T-antipériodique si $\forall x \in X,\ f(x+T) = -f(x)$;

1.8 Remarque Toute fonction T-antipériodique est aussi $2T$-périodique.

1.9 Proposition *Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et f, g deux fonctions de X dans $\mathbb{K}$. Sous réserve des hypothèses convenables sur X, on a :*

(i) *si f et g sont paires (resp. impaires, périodiques, antipériodiques), alors $f + g$ et λf le sont aussi ;*

(ii) *si f et g sont toutes deux paires ou toutes deux impaires (resp. T-périodiques ou T-antipériodiques), alors le produit fg est pair (resp. T-périodique) ;*

(iii) *si f est paire et g impaire (resp. f T-périodique et g T-antipériodique), alors le produit fg est impair (resp. T-antipériodique) ;*

(iv) *si f ne s'annule pas et est paire (resp. impaire, périodique, antipériodique), alors $\frac{1}{f}$ l'est aussi.*

1.10 Proposition *Soient X et Y des parties de $\mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ des fonctions telles que $f(X) \subset Y$. Sous réserve des hypothèses convenables sur X et Y, on a :*

(i) *si g est impaire et si f est impaire (resp. T-antipériodique), alors $g \circ f$ est impaire (resp. T-antipériodique) ;*

(ii) *si g est paire et si f est impaire (resp. T-antipériodique), alors $g \circ f$ est paire (resp. T-périodique) ;*

(iii) *si f est paire (resp. T-périodique), alors $g \circ f$ est paire (resp. T-périodique), sans hypothèse particulière sur g.*

1.11 Proposition *Soit X une partie de $\mathbb{R}$ centrée en 0, et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. Il existe un unique couple (φ, ψ) de fonction de X dans $\mathbb{R}$ telles que $f = \varphi + \psi$, avec φ paire et ψ impaire.*

2 Théorèmes opératoires sur les limites

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ (intervalle ou réunion d'intervalles), et $a \in \bar{\mathbb{R}}$ un point adhérent à X.

a) Limites finies, continuité

2.1 Proposition *Soient f et g des fonctions de X dans $\mathbb{K}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si f et g admettent au point a des limites ℓ et ℓ' dans $\mathbb{K}$, alors :*

(i) $[f+g](x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell + \ell'$;

(ii) $[fg](x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell\ell'$;

(iii) $[\lambda f](x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda\ell$;

(iv) *si de plus $\ell \neq 0$, alors f ne s'annule pas sur un voisinage de a, et $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{\ell}$.*

Cette proposition se démontre de la même façon que son homologue concernant les suites. Elle a un corollaire immédiat :

2.2 Proposition *Soient f et g des fonctions de X dans $\mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont continues au point a, alors les fonctions $f+g$, fg et λf le sont aussi. Si de plus $f(a) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie au voisinage du point a, et elle est continue en a.*

b) Limites infinies (fonctions à valeurs réelles)

2.3 Proposition *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction.*

(i) *Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors f est à valeurs strictement positives au voisinage du point a, et $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$.*

(ii) *Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, et si f est à valeurs strictement positives au voisinage du point a, alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.*

2.4 Proposition *Soient f et g des fonctions de X dans $\mathbb{R}$.*

(i) *Si f est minorée au voisinage du point a, et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $[f+g](x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.*

(ii) *Si f est minorée au voisinage du point a par un réel $k > 0$, et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $[fg](x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.*

2.5 Corollaire *Avec les mêmes notations :*

(i) *Si f a une limite finie au point a, et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $[f+g](x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.*

(ii) *Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $[f+g](x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.*

(iii) *Si f admet au point a une limite $\ell > 0$, et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $[fg](x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.*

(iv) *Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $[fg](x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.*

Le lecteur en déduira immédiatement les résultats concernant des limites égales à $-\infty$, et ceux concernant le quotient de deux fonctions.

Il reste bien sûr les cas classiques d'indétermination : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

3 Limites et ordre (fonctions à valeurs réelles)

3.1 Proposition *Soient f et g des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ admettant des limites au point a. Si, au voisinage du point a, on a $f \leqslant g$, alors $\lim_a f \leqslant \lim_a g$.*

3.2 Proposition (théorème d'encadrement)
Soient f, g, h des fonctions de X dans $\mathbb{R}$, et $\ell \in \mathbb{R}$. Si :

(i) au voisinage du point a, $f \leqslant g \leqslant h$,

(ii) f et h admettent ℓ pour limite en a,

alors g admet ℓ pour limite au point a.

3.3 Proposition (théorème d'encadrement bis)
Soient f et g des fonctions de X dans $\mathbb{R}$. Si :

(i) au voisinage du point a, $f \leqslant g$,

(ii) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$,

alors $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

3.4 Corollaire *Soit $f : X \to \mathbb{K}$ une fonction à valeurs réelles ou complexes, ℓ un élément de $\mathbb{K}$, et $\alpha : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que, pour x au voisinage de a, $|f(x) - \ell| \leqslant \alpha(x)$.*
Si $\alpha(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

3.5 Corollaire *Soient f et g des fonctions de X dans $\mathbb{R}$. Si f est bornée au voisinage du point a, et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, alors $[fg](x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.*

Variations sur les limites

Complément aux chapitres «suites» et «fonctions»

On se place ici dans le cadre des suites et des fonctions à valeurs réelles ; le lecteur extrapolera au cas des valeurs complexes.

Dans tout le polycopié, on fixe d'une part une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels, d'autre part un intervalle I de $\mathbb{R}$, un réel a qui est un point ou une borne de I (ce que l'on pourra noter $a \in \overline{I}$), et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

1 Limites finies

1.1 Soit ℓ un réel fixé. Rappelons les définitions classiques. La suite u admet le réel ℓ pour limite si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |u_n - \ell| < \varepsilon \qquad (L_u).$$

La fonction f admet le réel ℓ pour limite au point a si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad (L_f).$$

Dans ces deux définitions, on peut remplacer les majorations strictes par des majorations large (en conservant bien sûr $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$). Les propositions (L_u) et (L_f) sont ainsi, respectivement, équivalentes aux propositions :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad (L'_u).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad (L'_f).$$

Remarque : ces deux dernières définitions sont actuellement privilégiées par le programme officiel.

Démonstration. Prouvons par exemple que les propositions (L_f) et (L'_f) sont équivalentes.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons (L_f) vérifiée, et prouvons (L'_f). Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après (L_f), il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall x \in I, \quad |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon$. Posons alors $\delta' = \frac{\delta}{2} > 0$. Pour tout $x \in I$, si $|x - a| \leqslant \delta'$, alors $|x - a| < \delta$, donc $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, et a fortiori $|f(x) - \ell \leqslant \varepsilon$.
Ainsi $\forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \delta' \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons (L'_f) vérifiée, et prouvons (L_f). Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$. D'après (L'_f), il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon'$. Alors, pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \delta$, on a $|x - a| \leqslant \delta$, donc $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon' < \varepsilon$.
Ainsi $\forall x \in I, \quad |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon$. □

2 Limites infinies

2.1 Voici trois propositions équivalentes, exprimant le fait que la suite u admet $+\infty$ pour limite. La plus conforme au programme est la deuxième.

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_n > A.$$

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant A.$$

$$\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant A.$$

2.2 Exercice Détecter les différences entre ces trois propositions, et vérifier qu'elles sont équivalentes.

2.3 Voici trois propositions équivalentes, exprimant le fait que la fonction f admet ℓ pour limite en $-\infty$. La plus conforme au programme est la deuxième.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x < A \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \leqslant A \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A < 0 \quad \forall x \in I \quad x \leqslant A \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

2.4 Exercice Exprimer avec (autant que possible) des inégalités larges :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \qquad ; \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \qquad ; \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a\,;\; x<a]{} +\infty.$$

Applications de la dichotomie

Complément aux chapitres «limites, continuité» et «dérivation»

1 Théorème des valeurs intermédiaires

1.1 Théorème *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (contenant au moins deux points distincts), et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$.*
Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration. Pour fixer les idées, supposons par exemple $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

On définit alors, par récurrence, deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0$, alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$; sinon $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

On obtient alors immédiatement les propriétés suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) > 0$ et $f(b_n) \leqslant 0$ (par récurrence sur n) ;

(ii) la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;

(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2}$, d'où $b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes, ce qui impliquent qu'elles ont une limite commune, que nous noterons c. De plus $a_0 \leqslant c \leqslant b_0$, c'est-à-dire $c \in [a, b]$.

Comme la fonction f est continue, $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$ et $f(b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(a_n) > 0$ et $f(b_n) \leqslant 0$, donc par passage à la limite $f(c) \geqslant 0$ et $f(c) \leqslant 0$. Donc $f(c) = 0$.

Enfin, $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$ donc $c \in]a, b[$. □

1.2 Corollaire (Théorème des valeurs intermédiaires ou TVI) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (contenant au moins deux points distincts), et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.*
Pour tout réel λ compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \lambda$.

Démonstration. Appliquer le résultat précédent à la fonction $g : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - \lambda$. □

1.3 Corollaire *L'image directe d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

2 Théorème des bornes

2.1 Théorème (des bornes) *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*
Alors la fonction f est bornée sur le segment $[a, b]$, et il existe $(c, d) \in [a, b]^2$ tel que :

$$f(c) = \sup_{[a,b]} f \qquad ; \qquad f(d) = \inf_{[a,b]} f.$$

Démonstration. Là encore, notre preuve sera basée sur la méthode de dichotomie. On se contentera de prouver que f est majorée et atteint sa borne supérieure ; on prouve à l'identique que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

On emploiera la convention suivante : si A est une partie non majorée de $\mathbb{R}$, alors $\sup A = +\infty$. Avec cette convention, notons $S = \sup_{[a,b]} f = \sup\{f(x) ;\ x \in [a, b]\}$. A priori $S \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Commençons par rappeler un résultat classique, vu en exercice : si A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$, alors $A \cup B$ est non vide et majorée, et $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$. Si A ou B n'est pas majorée, alors $A \cup B$ n'est pas majorée, on a donc encore $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

En particulier, pour tous réels $\alpha < \beta < \gamma$ compris entre a et b, on a :

$$\sup_{[\alpha,\gamma]} f = \max\left\{\sup_{[\alpha,\beta]} f, \sup_{[\beta,\gamma]} f\right\}.$$

On définit alors, par récurrence, deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: si $\sup_{[a_n,b_n]} f = \sup_{[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}]} f$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$; sinon $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
On obtient alors immédiatement les propriétés suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{[a_n,b_n]} f = S$
(par récurrence sur n, avec $\alpha = a_n$, $\beta = \frac{a_n+b_n}{2}$, $\gamma = b_n$) ;

(ii) la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;

(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2}$, d'où $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes, ce qui impliquent qu'elles ont une limite commune, que nous noterons c. De plus $a_0 \leqslant c \leqslant b_0$, c'est-à-dire $c \in [a, b]$.
Raisonnons par l'absurde, en supposant $S = +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sup_{[a_n,b_n]} f = +\infty$, c'est-à-dire que la partie $\{f(x) ;\ x \in [a_n, b_n\}$ n'est pas majorée. Il existe donc $x_n \in [a_n, b_n]$ tel que, par exemple, $f(x_n) \geqslant n$. Alors :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$, donc par le théorème d'encadrement $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$;

(ii) la fonction f est continue en c, donc $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$;

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}\ f(x_n) \geqslant n$, donc par le théorème d'encadrement $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

On obtient une contradiction entre *(ii)* et *(iii)*, ce qui signifie que $S \neq +\infty$: la fonction f est donc bornée.
On raisonne alors de même, avec $S \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sup_{[a_n,b_n]} f = S$. Par caractérisation des bornes supérieures, il existe donc $x_n \in [a_n, b_n]$ tel que, par exemple, $f(x_n) \geqslant S - \frac{1}{n+1}$. Alors :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$, donc par le théorème d'encadrement $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$;

(ii) la fonction f est continue en c, donc $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$;

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}\ S - \frac{1}{n+1} \leqslant f(x_n) \leqslant S$, donc par le théorème d'encadrement $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$.

D'après *(ii)* et *(iii)*, on a bien $f(c) = S$, ce qu'il fallait démontrer. □

2.2 Corollaire *L'image directe d'un segment par une fonction continue est un segment.*

Démonstration. L'image directe d'un segment par une fonction continue est un intervalle d'après le TVI. Cet intervalle est borné et contient ses bornes d'après le théorème des bornes : c'est donc un segment. □

3 Inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes

3.1 Théorème *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Il existe $c \in [a, b]$ tel que :*
$$|f'(c)| \geqslant \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right|.$$

Démonstration. Si α et $beta$ sont des éléments distincts du segment $[a, b]$, on notera $T_{\alpha,\beta} = \left|\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|$ le module du taux d'accroissement de f entre α et β.
Commençont par une remarque. Soient $\alpha < \beta < \gamma$ des éléments du segment $[a, b]$. On a alors :
$$\begin{array}{rcl} |f(\gamma) - f(\alpha)| & \leqslant & |f(\gamma) - f(\beta)| + |f(\beta) - f(\alpha)| \\ & \leqslant & (\gamma - \beta)T_{\beta,\gamma} + (\beta - \alpha)T_{\alpha,\beta} \\ & \leqslant & (\gamma - \beta) \max\left\{T_{\alpha,\beta}; T_{\beta,\gamma}\right\} + (\beta - \alpha) \max\left\{T_{\alpha,\beta}; T_{\beta,\gamma}\right\} \\ & \leqslant & (\gamma - \alpha) \max\left\{T_{\alpha,\beta}; T_{\beta,\gamma}\right\} \end{array}$$

On a donc $T_{\alpha,\gamma} = \left|\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}\right| \leqslant \max\left\{T_{\alpha,\beta}; T_{\beta,\gamma}\right\}$, c'est-à-dire $T_{\alpha,\gamma} \leqslant T_{\alpha,\beta}$ ou $T_{\alpha,\gamma} \leqslant T_{\beta,\gamma}$
On définit alors, par récurrence, deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: si $T_{a_n,b_n} = T_{a_n,\frac{a_n+b_n}{2}}$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$; sinon $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
On obtient alors immédiatement les propriétés suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{a,b} \leqslant T_{a_n,b_n}$ (par récurrence sur n, à l'aide de la remarque) ;

(ii) la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;

(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2}$, d'où $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes, ce qui impliquent qu'elles ont une limite commune, que nous noterons c. De plus $a_0 \leqslant c \leqslant b_0$, c'est-à-dire $c \in [a, b]$.
Rappelons que la fonction f est dérivable en c ; on a donc le DL_1 :
$$f(x) = f(c) + (x - c)f'(c) + \underset{x\to c}{o}(x - c).$$

On en déduit, pour $n \to +\infty$:
$$f(b_n) - f(c) = (b_n - c)f'(c) + o(b_n - c) \quad \text{et} \quad f(c) - f(a_n) = (c - a_n)f'(c) + o(c - a_n).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant b_n - c \leqslant b_n - a_n$ et $0 \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n$, d'où :
$$f(b_n) - f(c) = (b_n - c)f'(c) + o(b_n - a_n) \quad \text{et} \quad f(c) - f(a_n) = (c - a_n)f'(c) + o(b_n - a_n).$$

Enfin, par addition, $f(b_n) - f(a_n) = (b_n - a_n)f'(c) + o(b_n - a_n)$, d'où :
$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(c).$$

Ainsi $T_{a_n,b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |f'(c)|$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{a_n,b_n} \geqslant T_{a,b}$, donc, par passage à la limite, $|f'(c)| \geqslant T_{a,b}$. □

3.2 Remarque On pourrait améliorer ce théorème en montrant l'existence de $c \in]a, b[$, en supposant f dérivable sur $]a, b[$ seulement. Ce résultat plus fin peut d'ailleurs se déduire du précédent par un passage à la limite (on applique le résultat déjà prouvé sur le segment $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, et on fait tendre ε vers 0).

3.3 Corollaire *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Soit k un réel positif. Si, pour tout $t \in [a, b]$, $|f'(c)| \leqslant k$, alors la fonction f est k-lipschitzienne.*

Développements limités usuels (à connaître)

Complément au chapitre «Relations de comparaisons»

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Formule de Taylor-Young

Les développements limités présentés ici sont basés sur le théorème de Taylor-Young, qui sera démontré dans un prochain chapitre :

1.1 Théorème *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I et f une fonction dérivable n fois au point a. Alors f admet au point a le développement limité à l'ordre n :*

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

Ce théorème n'est pas à connaître et son utilisation ne sera pas acceptée en exercice ou en colle tant qu'il n'aura pas été démontré.

2 Exponentielle et fonctions associées

Au voisinage de 0, on a :

$\exp x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{k!}x^k + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$

$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \ldots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$

$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$

3 Autres fonctions usuelles

Au voisinage de 0, on a :

$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots + x^n + o(x^n)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Définitions sur la dérivation

Préliminaire au chapitre «Dérivation»

On notera ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On fixe I, un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts, a un point de I, et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction.

1 Nombre dérivé, fonction dérivée, dérivées successives

1.1 Définition Soit p un élément de $\mathbb{K}$. On dit que la fonction f admet p pour nombre dérivé au point a si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes :

(i) $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} p$;

(ii) $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} p$;

(iii) f admet le DL_1 en a : $f(x) = f(a) + p(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$.

On dit que f est dérivable en a si elle admet en a un nombre dérivé $p \in \mathbb{K}$; on note alors $f'(a) = p$.

1.2 Remarque Il découle immédiatement de la définition que, si f est dérivable en a, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$, c'est-à-dire que f est continue en a.

1.3 Définition On dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout point de I. On appelle alors dérivée de f la fonction $f' : I \to \mathbb{K},\ x \mapsto f'(x)$.

1.4 Définition On définit alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la notion de fonction dérivable n fois. On note par convention $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$.

Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, supposons avoir défini la notion de fonction dérivable n fois, et de dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$. On dit que f est dérivable $n+1$ fois sur I si f est dérivable n fois sur I et si sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est dérivable sur I. On note alors $f^{(n+1)} = [f^{(n)}]'$. On notera par convention $f^{(0)} = f$.

On note $\mathscr{D}^n(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ qui sont dérivables n fois sur $\mathbb{K}$.

1.5 Définition Etant donné $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est définie et continue sur I.

On note $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ qui sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{K}$. Ainsi, $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

1.6 Définition On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou, ce qui revient au même, si f admet une fonction dérivée n-ième pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I :

$$\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^n(I,\mathbb{K}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathscr{D}^n(I,\mathbb{K}).$$

1.7 Proposition *On a :*

$$\mathscr{F}(I,\mathbb{K}) \supsetneq \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K}) \supsetneq \mathscr{D}^1(I,\mathbb{K}) \supsetneq \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K}) \supsetneq \ldots \supsetneq \mathscr{D}^n(I,\mathbb{K}) \supsetneq \mathscr{C}^n(I,\mathbb{K}) \supsetneq \mathscr{D}^{n+1}(I,\mathbb{K}) \supsetneq \ldots \supsetneq \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K}).$$

Démonstration. Les inclusions sont immédiates d'après la remarque **1.2**. Il reste à montrer qu'elles sont strictes. On se place dans le cas particulier $I = \mathbb{K} = \mathbb{R}$. Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non continue (et même continue en aucun point) est par exemple la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$.

Une fonction continue mais non dérivable est par exemple la fonction valeur absolue (non dérivable en 0) ; il est bon de savoir qu'il existe même des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ mais dérivables en aucun point de $\mathbb{R}$ (des exemples vous seront accessibles en spéciale).

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n|x|$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée n-ième n'est pas dérivable en 0 (exercice) : cette fonction n'est donc pas dérivable $n+1$ fois.

Il est plus difficile de montrer qu'il existe des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas continue. L'exemple de la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$, prolongée en 0 par $f(0) = 0$, sera traité en cours. On peut généraliser à la dérivée n-ième (exercice)... $\square$

2 Dérivée à gauche, dérivée à droite

2.1 Définition Soit $p \in \mathbb{K}$.
On suppose ici que l'intervalle $I_{a-} = I \cap]-\infty, a]$ n'est pas réduit au singleton $\{a\}$. On dit que la fonction f admet p pour nombre dérivé à gauche au point a si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes :

(i) $f_{|I_{a-}}$ admet p pour nombre dérivé en a ;

(ii) $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a,\ x<a]{} p$.

On note alors $p = f'_g(a)$.

2.2 Définition Soit $q \in \mathbb{K}$.
On suppose ici que l'intervalle $I_{a+} = I \cap [a, +\infty[$ n'est pas réduit au singleton $\{a\}$. On dit que la fonction f admet q pour nombre dérivé à droite au point a si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes :

(i) $f_{|I_{a+}}$ admet q pour nombre dérivé en a ;

(ii) $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a,\ x>a]{} q$.

On note alors $q = f'_d(a)$.

2.3 Remarque Si f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a, alors f est continue à gauche (resp. à droite) en a.

2.4 Proposition *Supposons ici que a est un point intérieur à I (il existe $r > 0$ tel que $[a-r, a+r] \subset I$). La fonction f est dérivable au point a si, est seulement si :*

(i) f admet en a une dérivée à gauche et une dérivée à droite ;

(ii) $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Si c'est le cas, alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

3 Primitive

3.1 Définition Soit $F : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que F est une primitive de f si F est dérivable et $F' = f$.

3.2 Remarque Cette définition n'assure ni l'existence, ni l'unicité d'une primitive de f. On démontrera dans le chapitre «dérivation» l'unicité à une constante additive près (sous réserve que l'ensemble de départ soit bien un intervalle). On démontrera séparément l'existence, dans le chapitre «intégration» (sous réserve que la fonction f soit continue).

Décomposition en éléments simples

Complément au chapitre «polynômes, fractions rationnelles»

On fixe dans ce polycopié un corps $\mathbb{K}$ quelconque. On fera, dans les derniers paragraphes, des hypothèses supplémentaires sur le corps $\mathbb{K}$.

1 Un raffinement du théorème de Bézout

Soient A et B deux polynômes non constants, de degrés a et b. On considère l'application

$$\varphi_{A,B} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{b-1}[X] \times \mathbb{K}_{a-1}[X] & \to & \mathbb{K}_{a+b-1}[X] \\ (P,Q) & \mapsto & AP+BQ \end{array}.$$

Cette application est clairement bien définie : si $\deg P < b$ et $\deg Q < a$, alors $\deg(AP) < a+b$ et $\deg(BQ) < a+b$, donc $\deg(AP+BQ) < a+b$. Par linéarité de la multiplication des polynômes, on voit qu'elle est linéaire.

1.1 Lemme *Si A et B sont premiers entre eux, alors l'application $\varphi_{A,B}$ est un isomorphismes d'espaces vectoriels.*

Démonstration. Déterminons le noyau de $\varphi_{A,B}$. Soit donc $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $degP < b$, $\deg Q < a$ et $AP + BQ = 0$. Alors $AP = -BQ$, donc B divise AP. Or B est premier avec A, donc, par le lemme de Gauss, B divise P. Mais $\deg P < b = \deg B$, donc $P = 0$. Par intégrité de l'anneau $\mathbb{K}[X]$, on en déduit $Q = 0$.

Ainsi $\ker \varphi_{A,B} = \{(0,0)\}$, et $\varphi_{A,B}$ est une application injective. Mais $\varphi_{A,B}$ est linéaire, et ses espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension finie, à savoir $a+b$. Donc $\varphi_{A,B}$ est un isomorphisme.

1.2 Exercice Dans le cas général, déterminer le noyau et l'image de $\varphi_{A,B}$. On pourra faire intervenir le PGCD des polynômes A et B.

2 Application aux fractions rationnelles

2.1 Lemme *Soient A, B, C trois polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On suppose A et B premiers entre eux, et $\deg C < \deg A + \deg B$. Alors il existe un unique couple de polynômes (Q,P) tel que :*

$$\deg Q < \deg A \qquad ; \qquad \deg P < \deg B \qquad \textit{et} \qquad \frac{C}{AB} = \frac{Q}{A} + \frac{P}{B}.$$

Démonstration. On a immédidiatement $\frac{C}{AB} = \frac{Q}{A} + \frac{P}{B} \Leftrightarrow C = AP + BQ$. L'existence et l'unicité du couple (P,Q) découle alors de la bijectivité de l'application $\varphi_{A,B}$.

On en déduit par récurrence le :

2.2 Lemme *Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_k$ des polynômes deux à deux premiers entre eux, et P un polynôme tel que $\deg P < \deg(A_1 \dots A_k)$. Il existe un unique k-uplet de polynômes $(P_1, \dots, P_k)$ tel que :*

$$\forall i \in [\![1,k]\!],\ \deg P_i < \deg A_i \qquad \textit{et} \qquad \frac{P}{A_1 \dots A_k} = \frac{P_1}{A_1} + \dots + \frac{P_k}{A_k}.$$

3 Division selon les puissances croissantes

Soit $J \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant, de degré $d \in \mathbb{N}^*$, et $m \in \mathbb{N}^*$ un entier. On considère l'application

$$\psi_{m,J} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{d-1}[X]^m & \to & \mathbb{K}_{md-1}[X] \\ (R_1, \dots, R_m) & \mapsto & R_1 J^{m-1} + R_2 J^{m-2} + \dots + R_{m-1} J + R_m \end{array}.$$

Cette application est clairement bien définie et linéaire.

Déterminons son noyau. Soit donc $(R_1, \ldots, R_m) \in \mathbb{K}_{d-1}[X]^m$ tel que $R_1 J^{m-1} + \ldots + R_{m-1} J + R_m = 0$. Alors $R_m = -(R_1 J^{m-2} + \ldots + R_{m-1})J$, donc J divise R_m. Mais $\deg R_m < d = \deg J$, donc $R_m = 0$. Par intégrité de l'anneau $\mathbb{K}[X]$, on en déduit $R_1 J^{m-2} + \ldots + R_{m-1} = 0$, et on montre par récurrence, suivant le même procédé, que $R_1 = \ldots = R_{m-1} = 0$.

Ainsi $\ker \psi_{m,J} = \{(0, \ldots, 0)\}$, et $\psi_{m,J}$ est une application injective. Par dimension, on conclut que c'est un isomorphisme. On en déduit enfin le :

3.1 Lemme *Soit J un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, $m \in \mathbb{N}^*$ un entier, et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme tel que $\deg P < m \deg J$. Alors il existe un unique m-uplet $(R_1, \ldots, R_m$ de polynômes tel que :*

$$\forall \ell \in [\![0, m-1]\!],\ \deg R_\ell < \deg J \qquad \textit{et} \qquad \frac{P}{J^m} = \frac{R_1}{J} + \frac{R_2}{J^2} + \ldots + \frac{R_m}{J^m}.$$

3.2 Exercice A l'aide de la division euclidienne, donner un algorithme permettant de calculer explicitement les polynômes $R_1, \ldots, R_m$.

4 Décomposition en éléments simples

On considère maintenant une fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$. On note (P, Q) le représentant irréductible unitaire de la fraction F, qui vérifie les propriétés :

$$F = \frac{P}{Q} \qquad ; \qquad P \wedge Q = 1 \qquad \text{et} \qquad Q \text{ est unitaire.}$$

Rappelons que le polynôme Q peut s'écrire (de façon unique à l'ordre près) comme produit de facteurs irréductibles unitaires. On notera $J_1, \ldots, J_k$ les facteurs irréductibles distincts de Q, et $m_1, \ldots, m_k$ leurs multiplicités dans Q, de sorte que :

$$Q = J_1^{m_1} \ldots J_k^{m_k}.$$

4.1 Théorème *Il existe des polynômes E, $R_1^{(1)}, \ldots, R_{m_1}^{(1)}$, $R_1^{(2)}, \ldots\ldots\ldots, R_{m_k}^{(k)}$ tels que :*

(i) $\forall i \in [\![1, k]\!],\ \forall \ell \in [\![1, m_i]\!],\ \deg R_\ell^{(i)} < \deg J_i$;

(ii) $F = E + \left(\dfrac{R_1^{(1)}}{J_1} + \ldots + \dfrac{R_{m_1}^{(1)}}{J_1^{m_1}} \right) + \ldots + \left(\dfrac{R_1^{(k)}}{J_k} + \ldots + \dfrac{R_{m_k}^{(k)}}{J_k^{m_k}} \right).$

Cette décomposition est unique, et on l'appelle la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle F sur le corps $\mathbb{K}$. En particulier, le polynôme E est la partie polynômiale de F. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on appelle partie polaire de F relative au polynôme irréductible J_i la fraction rationnelle :

$$\frac{R_1^{(i)}}{J_i} + \ldots + \frac{R_{m_i}^{(i)}}{J_i^{m_i}}.$$

Démonstration. On commence par écrire $F = E + G$, où E est la partie polynomiale de F, et $G = \frac{P - EQ}{Q}$ est sa partie fractionnaire, avec $\deg(P - EQ) < \deg Q$. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on note $A_i = J_i^{m_i}$, de sorte que $Q = A_1 \ldots A_k$, avec des polynômes $A_1, \ldots, A_k$ deux à deux prmiers entre eux.

On applique alors à la fraction G le lemme **2.2**, pour obtenir $G = \frac{P_1}{A_1} + \ldots + \frac{P_k}{A_k}$, avec, pour tout i, $\deg P_i < \deg A_i$.

La fraction $\frac{P_i}{A_i}$ est la partie polaire de G, et donc de F, relative au polynôme irréductible J_i. Reste à lui appliquer le lemme **3.1** pour obtenir la formule annoncée.

Ceci prouve l'existence. Le lecteur pourra vérifier que l'unicité se déduit elle aussi des lemmes **2.2** et **3.1**.

5 Le cas particulier $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Comme le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, les polynômes irréductibles $J_1, \dots, J_k$ sont tous de degré 1, donc les polynômes $R_\ell^{(i)}$ sont constants : on retrouve le résultat établi en cours.

6 Le cas particulier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Dans ce cas, certains des polynômes $J_1, \dots, J_k$ peuvent être de degré 1.

Nous avons vu en cours comment déterminer la partie polaire relativement à un polynôme de degré 1, et je n'y reviendrai pas.

Que faire pour un polynôme $J \in \{J_1, \dots, J_k\}$ de degré 2 ? Notons α et $\bar{\alpha}$ ses racines complexes, et m sa multiplicité comme facteur de Q.

Notons $Q = J^m Q_1$ (où Q_1 est un pôlynome qui n'est pas multiple de J), et $F_1 = J^m F = \frac{P}{Q_1}$. On cherche des polynômes $R_1, \dots, R_m$ de degrés $\leqslant 1$, et un polynôme S, tels que :

$$F = \frac{R_1}{J} + \dots + \frac{R_m}{J^m} + \frac{S}{Q_1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad F_1 = R_1 J^{m-1} + \dots + R_{m-1} J + R_m + J^m \frac{S}{Q_i}.$$

Comme $J(\alpha) = 0$ et $Q_1(\alpha) \neq 0$, on en déduit $F_1(\alpha) = R_m(\alpha)$. Or α n'est pas un nombre réel, donc la famille $(1, \alpha)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, ce qui permet d'identifier les coefficients du polynôme R_m.

6.1 Exemple On prend $F = \frac{X+2}{(X+1)(X^2+X+1)}$. Comme $\deg F < 0$, la partie polynomiale de F est nulle. On doit donc trouver des réels α, β, γ tels que $F = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2+X+1}$.

On trouve alors $(X+1)F = \alpha + (X+1)\frac{\beta X+\gamma}{X^2+X+1} = \frac{X+2}{X^2+X+1}$. En évaluant en -1, on obtient $\alpha = 1$.

Par ailleurs, $(X^2+X+1)F = (X^2+X+1)\frac{\alpha}{X+1} + \beta X + \gamma = \frac{X+2}{X+1}$. En évaluant en $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, racine de X^2+X+1, on obtient : $\beta j + \gamma = \frac{j+2}{j+1} = \frac{j+2}{-j^2} = -j^{-1} - 2j^{-2} = -j^2 - 2j = j + 1 - 2j = -j + 1$.

Or la famille $(1, j)$ est libre sur $\mathbb{R}$, donc $\beta = -1$ et $\gamma = 1$. Ainsi :

$$F = \frac{2}{X+1} + \frac{1-X}{X^2+X+1}$$

(ce qu'on vérifie facilement).

Bien sûr, si $m \geqslant 1$, il restera d'autres termes à identifier… Je vous laisse y réfléchir !

Fonctions continues par morceaux

Introduction au chapitre «intégration, primitives»

Soient a et b deux réels fixés, avec $a < b$.

1 Subdivisions d'un segment

1.1 Définition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle sudivision à n pas du segment $[a, b]$ toute famille $(a_0, \ldots, a_n)$ de réels telle que $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$.

Graphiquement, l'idée est de «découper» le segment $[a, b]$ en n morceaux.

1.2 Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle subdivision régulière à n pas de $[a, b]$ la subdivision $S = (a_0, \ldots, a_n)$ la subdivision de $[a, b]$ définie par $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

1.3 Définition Soient n et n' deux entiers naturels non nuls. Soient $S = (a_0, \ldots, a_n)$ et $S' = (a'_0, \ldots, a'_n)$ deux subdivisions du segment $[a, b]$. Notons $X_S = \{a_0, \ldots, a_n\}$ et $X_{S'} = \{a'_0, \ldots, a'_n\}$. On dit que la subdivision S' est plus fine que la subdivision S si $X_S \subset X_{S'}$.

Graphiquement, cela signifie que la subdivision S' a été obtenue en «redécoupant» les n morceaux de la subdivision S en morceaux plus petits.

2 Fonctions en escalier

2.1 Définition Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $S = (a_0, \ldots, a_n)$ du segment $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ soit constante. On dit alors que S est une subdivision adaptée (ou subordonnée) à la fonction f.

On note $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

2.2 Remarque Si S est adaptée à f, alors toute subdivision plus fine que S est adaptée à f.

2.3 Exemple Toute fonction constante est *a fortiori* en escalier (toute subdivision est adaptée).

2.4 Proposition *L'ensemble $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ (en particulier, c'est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau).*

Démonstration. La fonction constante égale à 1 (neutre pour $\cdot$) est en escalier sur $[a, b]$

Soient maintenant f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $S = (a_0, \ldots, a_n)$ et $S' = (a'_0, \ldots, a'_n)$ des subdivisions adaptées respectivement à f et g. Il est immédiat que λf est en escalier : la subdivision S lui reste adaptée. Le problème est alors de trouver une sudivision adaptée à la fois à f et g, c'est-à-dire une subdivision plus fine à la fois que S et S'.

Gardons les notations introduites plus haut : $X_S = \{a_0, \dots, a_n\}$ et $X_{S'} = \{a'_0, \dots, a'_n\}$. Posons $Y = X_S \cup X_{S'}$, et numérotons ses éléments dans l'ordre croissant : $Y = \{b_0, \dots, b_p\}$ avec $b_0 < \dots < b_p$. Il est clair (faites un dessin si nécessaire) que $T = (b_0, \dots, b_p)$ est une subdivision de $[a, b]$ plus fine que S et S'. Ainsi, pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, f et g sont constantes sur $]b_i, b_{i+1}[$. Il en est donc de même pour $f+g$ et fg. Les fonctions $f+g$ et fg sont donc en escalier sur $[a, b]$.

Ceci prouve que $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$. $\square$

2.5 Proposition *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque, alors $g \circ f$ est une fonction en escalier.*

Démonstration. Immédiat.

3 Fonctions continues par morceaux

3.1 Définition Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ un fonction. On dit que f est une fonction continue par morceaux (CPM) s'il existe une subdivision $S = (a_0, \dots, a_n)$ du segment $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ soit continue, et admette des limites finies à droite en a_i et à gauche en a_{i+1}. On dit alors que S est une subdivision adaptée (ou subordonnée) à la fonction f.

On note $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

3.2 Remarque Si S est adaptée à f, alors toute subdivision plus fine que S est adaptée à f.

3.3 Exemple Toute fonction en escalier, toute fonction continue sur $[a, b]$ est *a fortiori* continue par morceaux.

3.4 Proposition *L'ensemble $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a, b], \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ (en particulier, c'est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau).*

3.5 Proposition *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $g \circ f$ est une fonction continue par morceaux.*

4 Deux résultats importants

4.1 Théorème (des bornes) *Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, alors f est bornée. Attention : f n'atteint pas forcément ses bornes.*

Démonstration. Soit $S = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Par hypothèse, la restriction f_i de f à $]a_i, a_{i+1}[$ est continue et admet des limites finies en a_i et a_{i+1}. Elle se prolonge donc en une fonction $\tilde{f}_i$ continue sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$. D'après le théorème des bornes, on sait alors que $\tilde{f}_i$, donc f_i, est bornée. Soit $s_i = \sup_{[a_i, a_{i+1}]} |\tilde{f}_i|$.

Posons $M = \max\{s_0, \dots, s_{n-1}, |f(a_0)|, \dots, |f(a_n)|\}$. On a bien $\forall t \in [a, b],\ |f(t)| \leqslant M$ (et même $M = \sup_{[a,b]} |f|$). Cependant, cette borne supérieure n'est pas toujours atteinte : en effet, les $\tilde{f}_i$ atteignent leurs bornes, mais pas nécessairement les f_i (exercice : donner un contre-exemple). $\square$

4.2 Théorème *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\forall t \in [a, b],\ \psi(t) - \varphi(t) \leqslant \varepsilon$.*

Démonstration. C'est un résultat difficile, et surtout assez technique. Nous le démontrerons seulement dans le cas où f est continue (la généralisation aux fonctions CPM demande une étape de plus, que le lecteur pourra rédiger si le cœur lui en dit). Nous admettrons pour les besoins de la démonstration le théorème de Heine, dont on pourra trouver la démonstration dans tout bon cours de MPSI (démonstration que utilise elle-même le théorème de Bolzano-Weierstrass, autre spécificité du programme de MPSI...).

D'après le théorème de Heine, la fonction f, étant continue sur le segment $[a, b]$, y est *absolument continue*, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2 \quad |x - y| \leqslant \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

(la différence avec la continuité est que le réel δ ne dépend que de ε, et pas du point x).

Fixons donc $\varepsilon > 0$, et un réel $\delta > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in [a, b]^2 \quad |x - y| \leqslant \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n} \leqslant \delta$ (ce qui est bien sûr possible). Soit $S = (a_0, \dots, a_n)$ la subdivision régulière à n pas de $[a, b]$. Enfin, soient φ et ψ les fonctions en escalier sur $[a, b]$ définies par : pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, pour tout $t \in [a_i, a_{i+1}[$, $\varphi(t) = f(a_i) - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\psi(t) = f(a_i) + \frac{\varepsilon}{2}$; et $\varphi(b) = f(b) - \frac{\varepsilon}{2}$, $\psi(b) = f(b) + \frac{\varepsilon}{2}$.

On a immédiatement $\forall t \in [a, b],\ \psi(t) - \varphi(t) \leqslant \varepsilon$. De plus, pour tout $t \in [a, b[$, il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $t \in [a_i, a_{i+1}[$. Alors $0 \leqslant t - a_i < a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$, donc $|t - a_i| \leqslant \delta$ par définition de n, donc $|f(t) - f(a_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ par définition de δ. Ainsi $\varphi(t) \leqslant f(t) \leqslant \psi(t)$. C'est encore vrai pour $t = b$, donc $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$. $\square$

Calcul de primitives

Complément au chapitre «intégration, primitives»

Introduction

On sait que toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle. Dans bien des cas, on sait «calculer» ces primitives, c'est à dire les exprimer à l'aide de fonctions usuelles. C'est le cas, par exemple, des fonctions polynomiales...

Malheureusement, certaines fonctions n'admettent pas de primitive pouvant s'écrire à l'aide des fonctions usuelles. C'était par exemple le cas des fonctions $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto 1/(1+x^2)$ avant qu'on ne décide de définir les fonctions logarithme népérien et arc tangente. C'est encore le cas (à moins de définir de nouvelles «fonctions usuelles») des fonctions :

$$x \mapsto \frac{e^x}{x} \quad ; \quad x \mapsto \frac{1}{\ln x} \quad ; \quad x \mapsto e^{-x^2} \quad ; \quad x \mapsto \sqrt{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \quad (\text{pour } a \neq b)\ldots$$

On voit ici que la notion de «fonction usuelle» est essentiellement arbitraire. Pour une étude générale et théorique des primitives pouvant s'écrire à l'aide de telles fonctions, je vous renvoie à l'épreuve d'analyse du concours des ENS de 1995.

Nous nous contenterons d'étudier, de façon pratique, la recherche de primitives pour certains types de fonctions, plus ou moins simples. Il est bien sûr essentiel de connaître parfaitement les primitives usuelles (voir le cours sur les fonctions usuelles, dans le programme de début d'année).

1 Primitive d'une fonction rationnelle

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle à coefficients réels, et $\tilde{F} : \mathscr{D}_F \to \mathbb{R}$ la fonction rationnelle associée. On recherche une primitive de la fonction $\tilde{F}$ sur un intervalle I contenu dans son domaine de définition.

Étape 1. On décompose la fraction rationnelle en éléments simples. On sait calculer les primitives d'une fonction polynomiale, donc il reste à calculer une primitive de chacun des «éléments simples».

Étape 2. On commence par les éléments simples associés à des pôles réels de F, c'est-à-dire de la forme $\frac{\lambda}{(X-\alpha)^m}$, avec λ, α réels et $m \geqslant 1$ entier.

Si $m = 1$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-\alpha}$ est $x \mapsto \ln|x-\alpha|$.

Si $m \geqslant 2$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-\alpha)^m}$ est $x \mapsto \frac{-1}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}}$.

Étape 3. On étudie ensuite les éléments simples associés à des pôles complexes non réels de F, c'est-à-dire de la forme $\frac{\lambda X+\mu}{(X^2+aX+b)^m}$, avec λ, μ réels, $m \geqslant 1$ entier, et $P = X^2 + aX + b$ un polynôme de discriminant strictement négatif.

On cherche alors à décomposer l'élément simple sous la forme $\alpha \dfrac{P'}{P^m} + \beta \dfrac{1}{P^m}$. Par identification, on trouve facilement $\alpha = \lambda/2$ et $\beta = \mu - a\lambda/2$.

Une primitive de $x \mapsto P'(x)/P(x)$ est $x \mapsto \ln|P(x)| = \ln P(x)$, car P est unitaire et de discriminant < 0.

Étape 4. Il reste à chercher une primitive de $x \mapsto 1/(x^2+ax+b)^m$. On va être amené à faire des changements de variable ; on va donc écrire cette primitive sous forme intégrale. On fixe x_0 dans l'intervalle I et, pour $x \in I$, on note $g(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{(t^2+at+b)^m}dt$.

• On passe d'abord sous forme canonique :

$$X^2 + aX + b \;=\; (X + \frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4} \;=\; \delta^2 \left[\left(\frac{X + a/2}{\delta} \right)^2 + 1 \right],$$

où $\delta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$ est bien défini car le discriminant du polynôme $X^2 - aX + b$ est $a^2 - 4b < 0$.

On fait alors le changement de variable affine $u = \frac{t+a/2}{\delta}$ (d'où $dt = \delta du$). En posant $y_0 = \frac{x_0+a/2}{\delta}$ et $y = \frac{x+a/2}{\delta}$, on obtient :

$$g(x) = \delta^{1-2m} \int_{y_0}^{y} \frac{1}{(u^2+1)^m} du.$$

• Si $m = 1$, on a fini : à une constante près, $g(x) = \delta^{1-2m} \arctan y = \delta^{1-2m} \arctan \dfrac{x + a/2}{\delta}$.

• Si $m \geqslant 2$, il reste du travail : on fait le changement de variable, de classe $\mathscr{C}^1$, $\theta = \arctan u$ (d'où $d\theta = \frac{1}{1+u^2} du$). En posant $\varphi_0 = \arctan y_0$ et $\varphi = \arctan y$, on obtient :

$$g(x) = \delta^{1-2m} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{(1 + \tan^2\theta)^{m-1}} d\theta = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (\cos^2\theta)^{m-1} d\theta.$$

Il ne reste plus qu'à calculer cette dernière intégrale, ce qui peut se faire en linéarisant $(\cos\theta)^{2m-2}$ au moyen des formules de trigonométrie, ou simplement par intégrations par parties successives (voir la technique utilisée pour les intégrales de Wallis).

On obtient ainsi une expression de $g(x)$ en fonction de x, qui peut se simplifier à l'aide des formules :

$$\cos \circ \arctan(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \quad \text{et} \quad \sin \circ \arctan(u) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Étape 5. Finalement, on réunit les différents résultats obtenus pour déterminer une primitive de la fonction rationnelle $\tilde{F}$. On a «démontré» qu'une telle primitive peut toujours s'exprimer par somme, produit, quotient, à partir des fonctions identité, arc tangente et racine carrée.

Il est fortement conseillé de dériver la primitive obtenue pour vérifier la justesse des calculs !

Exercice. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)^2}$.

2 Primitive d'une fonction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$

On se donne maintenant $F \in \mathbb{R}(X, Y)$ une fraction rationnelle à deux indéterminées (par exemple $F = \dfrac{X - Y}{2X^2 + Y^2 - 1}$). On cherche une primitive de la fonction $f : x \mapsto F(\cos x, \sin x)$, sur un intervalle I où elle est bien définie.

Là encore, on fixe $x_0 \in I$, et on note $g(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} F(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$.

Méthode générale (calculs lourds).

On fait le changement de variable $u = \tan\frac{\theta}{2}$. C'est un changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$, à condition que la fonction $\theta \mapsto \cos\frac{\theta}{2}$ ne s'annule pas sur le segment $[x_0, x]$.

On calcule $\theta = 2\arctan u + \text{cste}$, d'où $d\theta = \frac{2}{1+u^2}$. En posant $y_0 = \tan\frac{x_0}{2}$ et $y = \tan\frac{x}{2}$, on obtient :

$$g(x) = \int_{y_0}^{y} F\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2} \right) \frac{2}{1+u^2} du.$$

On se ramène donc au calcul d'une primitive de fraction rationnelle. Malheureusement, le degré du dénominateur de cette fraction est en général assez élevé, ce qui mène à des calculs lourds, donc sources d'erreurs.

Par ailleurs, si la fonction $\theta \mapsto \cos\frac{\theta}{2}$ s'annule sur l'intervalle I, on ne pourra calculer des primitives que sur les sous-intervalles où cette fonction ne s'annule pas, ce qui obligera ensuite à raccorder les primitives obtenues pour avoir un résultat sur tout l'intervalle I.

Règles de Bioche (calculs allégés).

L'idée est encore de faire un changement de variable trigonométrique. Mais celui-ci sera choisi habilement grâce aux «règles de Bioche».

On considère «l'élément différentiel» $w(\theta) = F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ de l'intégrale définissant $g(x)$. On calcule $w(-\theta)$, $w(\pi-\theta)$, $w(\pi+\theta)$, avec les conventions :

$$d(-\theta) = -d\theta \quad ; \quad d(\pi-\theta) = -d\theta \quad ; \quad d(\pi+\theta) = d\theta.$$

On recherche une transformation qui laisse invariant l'élément différentiel. Ainsi,

(i) si «$w(-\theta) = w(\theta)$», on fait le changement de variable $u = \sin\theta$;

(ii) si «$w(\pi-\theta) = w(\theta)$», on fait le changement de variable $u = \cos\theta$;

(iii) si «$w(\pi+\theta) = w(\theta)$», on fait le changement de variable $u = \tan\theta$.

Si l'une de ces règles s'applique, on obtient une expression de $g(x)$ comme intégrale d'une fonction rationnelle (mais ne comptez pas sur moi pour vous le démontrer !).

Attention : le changement de variable $u = \tan\theta$, s'il mène à des calculs plus simples, peut poser les mêmes problèmes d'intervalle de validité que $u = \tan\frac{\theta}{2}$.

Simplification et vérification du résultat.

On obtient, sur un intervalle convenable, une expression de $g(x)$ qui fait intervenir les fonctions identité, tan, cos, sin, arctan et racine carrée. Ne pas oublier de simplifier cette expression, si possible, à l'aide des formules de trigonométrie. Et toujours vérifier le résultat obtenu !

3 Primitive d'une fonction rationnelle en e^x

On se donne $F \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle à une indéterminée , et on cherche une primitive de la fonction $f : x \mapsto F(e^x)$, sur un intervalle I où elle est bien définie.

Pour cela, on note $g(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, et on fait le changement de variable, de classe $\mathscr{C}^1$, $u = e^t$ (d'où $t = \ln u$, $dt = \frac{1}{u}\,du$). On se ramène ainsi au calcul d'une primitive de fonction rationnelle en u.

4 Primitive d'une fonction rationnelle en $\cosh x$, $\sinh x$

On se donne maintenant $F \in \mathbb{R}(X, Y)$ une fraction rationnelle à deux indéterminées, et on cherche une primitive de la fonction $f : x \mapsto F(\cosh x, \sinh x)$, sur un intervalle I où elle est bien définie. On note $g(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

Méthode 1.

À l'aide des formules définissant $\cosh t$ et $\sinh t$, on exprime $f(t)$ en fonction de e^t, et on se ramène à la méthode précédente.

Méthode 2.

On pose $f_1(\theta) = F(\cos\theta, \sin\theta)$, et on applique les règles de Bioche à l'élément différentiel $w_1(\theta) = f_1(\theta)\,d\theta$. On traduit le résultat obtenu du langage circulaire dans le langage hyperbolique.

(i) si «$w(-\theta) = w(\theta)$», on fait le changement de variable $u = \sinh t$;

(ii) si «$w(\pi-\theta) = w(\theta)$», on fait le changement de variable $u = \cosh t$;

(iii) si «$w(\pi+\theta) = w(\theta)$», on fait le changement de variable $u = \tanh t$.

Si l'une de ces règles s'applique, on obtient une expression de $g(x)$ comme intégrale d'une fonction rationnelle (admis).

Comme toujours, on pensera à simplifier et vérifier le résultat.

5 Primitive d'une fonction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a, b, c, d des réels tels que $ad - bc \neq 0$, et $F \in \mathbb{R}(X, Y)$ une fonction rationnelle à deux indéterminées. On note $\varphi : x \mapsto \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, et $f : x \mapsto F\left(x, \varphi(x)\right)$.

Pour obtenir une primitive g de la fonction f, on écrit $g(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, et on fait le changement de variable $u = \varphi(t)$. On vérifie facilement que la fonction φ est bijective (en choisissant bien les ensembles de départ et d'arrivée), et que sa réciproque est de la forme :

$$u \mapsto \frac{\alpha u^n + \beta}{\gamma u^n + \delta}.$$

On se ramène donc au calcul d'une primitive de fonction rationnelle en u.

6 Primitive d'une fonction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Soient a, b, c des réels tels que $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac \neq 0$, et $F \in \mathbb{R}(X, Y)$ une fonction rationnelle à deux indéterminées. On note $f : x \mapsto F\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$, et on veut calculer $g(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

Étape 1. On commence par mettre le trinôme $aX^2 + bX + c$ sous forme canonique. Comme dans le paragraphe **1**, on fait alors un changement de variable affine, pour se ramener à une expression de l'un des types suivants :

$$g(x) = \int_{y_0}^{y} F_1(u, \sqrt{u^2+1})\,du \quad ; \quad g(x) = \int_{y_0}^{y} F_1(u, \sqrt{u^2-1})\,du \quad ; \quad g(x) = \int_{y_0}^{y} F_1(u, \sqrt{1-u^2})\,du.$$

Étape 2. On fait alors, suivant le cas, l'un des trois changements de variable suivants :

$$u = \sinh\theta \qquad ; \qquad u = \cosh\theta \qquad ; \qquad u = \cos\theta.$$

Étape 3. On n'a plus qu'à appliquer les méthodes des paragraphes **2** et **4**, puis du paragraphe **1**, pour obtenir enfin la valeur de $g(x)$...

Exercice. Calculer par ces méthodes l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan^2\theta + \tan\theta + 1}\,d\theta$.

Pour vous guider, vous pourrez vous reporter au problème 33 du polycopié de problèmes.

Applications multilinéaires, déterminant

Obsolète

On se donne un corps $\mathbb{K}$, qui sera en pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En particulier, on a $1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

1 Applications multilinéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et p un entier naturel non nul.

1.1 Définition Soit $f : E^p \to F$ une application.
Soit $i \in [\![1, p]\!]$; on dit que f est linéaire par rapport à la i-ème place si, pour tout $p-1$-uplet $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E^{p-1}$, l'application $E \to F$, $x \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ est linéaire.
On dit que f est p-linéaire si f est linéaire par rapport à ses p places.

1.2 Exemple

(i) L'application $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire.

(ii) L'application $f_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$, $(z, z') \mapsto \mathrm{Re}(\bar{z}z')$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire (mais bien sûr pas $\mathbb{C}$-bilinéaire).

(iii) L'application $f_3 : \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(A, B) \mapsto AB - BA$ est bilinéaire sur $\mathbb{K}$.

(iv) $\overrightarrow{E}$ désignant l'ensemble des vecteurs de l'espace géométrique, l'application «produit vectoriel» : $f_4 : \overrightarrow{E}^2 \to \overrightarrow{E}$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire.

(v) L'application «produit vectoriel» : $f_5 : \overrightarrow{E}^2 \to \overrightarrow{E}$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire.

(vi) L'application «produit mixte» : $\mathrm{Det} : \overrightarrow{E}^3 \to \mathbb{R}$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \mapsto (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$ est $\mathbb{R}$-trilinéaire.

1.3 Définition Soit $f : E^p \to F$ une application p-linéaire.

⋆ On dit que f est symétrique si, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[\![1, p]\!]$, et pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$,
$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$$
(échanger les places de deux arguments de f ne change pas sa valeur).

⋆ On dit que f est antisymétrique si, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[\![1, p]\!]$, et pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$,
$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$$
(échanger les places de deux arguments de f change sa valeur en son opposé).

⋆ On dit que f est alternée si, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[\![1, p]\!]$, et pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$,
$$x_i = x_j \quad \Rightarrow \quad f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = 0$$
(si f reçoit deux arguments égaux, elle s'annule).

1.4 Proposition *On suppose $p \geqslant 2$, et $f : E^p \to F$ p-linéaire. Alors f est alternée si, et seulement si, f est antisymétrique.*

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f alternée. Soit $i \neq j$ dans $[\![1, p]\!]$, et $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$). On calcule, par bilinéarité :
$$f(x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) + f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) +$$
$$. \qquad f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p) + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_p).$$
Comme f est alternée, on peut éliminer tous les termes où le même argument apparaît deux fois.

D'où :
$$0 = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p).$$
Ceci prouve que $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$, donc f est antisymétrique.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons f antisymétrique. Soit $i \neq j$ dans $[\![1, p]\!]$, et $(x_1, \dots, x_p) \in E^p)$ tel que $x_i = x_j$. Alors, comme f est antisymétrique, en échangeant les place i et j :
$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p).$$
Donc : $2_{\mathbb{K}} \cdot f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) = 0$.
Comme $2_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$, on en déduit $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) = 0$, donc f est alternée. □

1.5 Exemple

(i) Les applications f_1 et f_2 intriduites ci-dessus sont bilinéaires symétriques, de même que l'application «produit scalaire» f_4.

(ii) L'application f_3 est bilinéaire, antisymétrique et alternée, de même que l'application «produit vectoriel» f_5.

(iii) L'application «produit mixte» (Det) est trilinéaire, antisymétrique et alternée.

2 Déterminant d'une matrice d'ordre 2 ou 3

Soit $n = 2$ ou 3.

2.1 Définition Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de la matrice A le scalaire :
$$\det A = x_1 y_2 - x_2 y_1, \qquad \text{noté aussi } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

2.2 Définition Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de la matrice A le scalaire :
$$\det A = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2, \qquad \text{noté aussi } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

2.3 Proposition *Pour toute matrice carrée A, de taille 2 ou 3,* $\det A = \det {}^t\!A$.

2.4 Proposition *L'application déterminant, vu comme une fonction des colonnes (ou lignes) de la matrice argument, est n-linéaire. Ainsi, pour $n = 2$:*

(i) $\begin{vmatrix} \lambda x_1 + \mu x_1' & y_1 \\ \lambda x_2 + \mu x_2' & y_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x_1' & y_1 \\ x_2' & y_2 \end{vmatrix}$;

(ii) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ \lambda x_2 + \mu x_2' & \lambda y_2 + \mu y_2' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix}$; *etc.*

2.5 Proposition *L'application déterminant, vu comme une fonction des deux (trois) colonnes (ou lignes) de la matrice argument, est alternée et antisymétrique. Ainsi, pour $n = 2$:*

(i) $\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0$; $\qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$;

(ii) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix}$; $\qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$.

3 Déterminant d'une matrice de taille n (complément)

L'étude des déterminants de taille n est au programme de MPSI. Ce paragraphe pourrait être utile aux futurs élèves de PSI.

3.1 Signature d'une permutation. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Rappelons que l'on note $\mathscr{S}_n = \mathrm{Bij}([\![1,n]\!], [\![1,n]\!])$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![1,n]\!]$.

Si $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ est une telle permutation, on note $I(\sigma)$ le nombre d'*inversions* de σ :

$$I(\sigma) = \mathrm{Card}\left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\right\}.$$

On appelle alors *signature* de σ l'entier $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \in \{-1,+1\}$. Si $\varepsilon(\sigma) = 1$, on dit que σ est une permutation paire ; sinon, qu'elle est impaire.

3.2 Exemple Soit $\sigma : [\![1,4]\!] \to [\![1,4]\!]$ définie par : $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 1$. Cette permutation entraîne quatre inversions : $\sigma(1) > \sigma(2)$, $\sigma(1) > \sigma(4)$, $\sigma(2) > \sigma(4)$, $\sigma(3) > \sigma(4)$. Donc $I(\sigma) = 4$, et $\varepsilon(\sigma) = 1$: σ est une permutation paire.

3.3 Proposition *Soient σ et σ' deux permutations de $[\![1,n]\!]$. On montre que $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$. L'application «signature» est donc un morphisme du groupe $(\mathscr{S}_n, \circ)$ vers le groupe $(\{-1,+1\}, \cdot)$.*

Idée de la démonstration : on étudie les inversions de $\sigma \circ \sigma'$. On constate que :

$$I(\sigma \circ \sigma') = I(\sigma) + I(\sigma') - 2\ \mathrm{Card}\left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i < j \text{ et } \sigma'(i) > \sigma'(j) \text{ et } \sigma(\sigma'(i)) < \sigma(\sigma'(j))\right\}.$$

Ceci entraîne que $I(\sigma \circ \sigma')$ est compris entre $|I(\sigma) - I(\sigma')|$ et $I(\sigma) + I(\sigma')$, et surtout a la même parité que $I(\sigma) + I(\sigma')$. Donc $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

3.4 Déterminant de taille n.

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le scalaire :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

Remarquons que le cardinal de $\mathscr{S}_n$ est $n!$. Le déterminant de A est donc défini par une somme de $n!$ produits comportant chacun n facteurs, en plus du signe $\varepsilon(\sigma)$. On vérifie que, pour $n = 2$ ou 3, on retrouve les formules données précédemment.

Pour $n = 1$, on obtient simplement $\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}$.

3.5 Proposition *Le déterminant de A dépend de façon n-linéaire alternée de la famille des colonnes (resp. des lignes) de A. En particulier si deux colonnes (resp. deux lignes) de A sont égales, alors* $\det A = 0$. *Echanger deux colonnes (resp. deux lignes) de A change son déterminant en son opposé.*

3.6 Calcul d'un déterminant en développant par rapport à une rangée.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On note $A_{i,j}$ la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A :

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

3.7 Proposition (développement par rapport à une ligne) *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1,n]\!]$. On a :*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{i,j}.$$

3.8 Proposition (développement par rapport à une colonne) *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in [\![1, n]\!]$. On a :*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{i,j}.$$

3.9 Exemple (utile pour tous) Pour $n = 3$, développement par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

En général, on utilisera cette technique pour développer par rapport à une colonne dont tous les coefficients sont nuls, sauf 1 ou 2.

3.10 Exercice (recommandé aux élèves de la filière PSI)

Pour $n \geqslant 2$, on note A_n la matrice tridiagonale : $A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 1 \end{bmatrix}$, et on pose $d_n = \det A_n$.

a) Calculer d_2 et d_3.
b) En développant par rapport à la première colonne, déterminer une relation entre d_n, d_{n-1} et d_{n-2} pour tout $n \geqslant 4$.
c) En déduire la valeur de d_n pour tout $n \geqslant 2$. En particulier, démontrer que la matrice A_n est inversible si, et seulement si, $n \not\equiv 2$ [3].