Devoirs de vacances 2008

Exercice 1.

a) Montrer que, si a et b sont deux nombres complexes, alors $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4$.

b) Pouvez-vous généraliser ce résultat en remplaçant 5 par $n+1$, où n est un entier naturel quelconque ?

Exercice 2.

a) On note $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Montrer que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ (vous pouvez utiliser le résultat de l'exercice précédent).

b) En déduire que $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$.

c) Exprimer $\cos\frac{4\pi}{5}$ en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$. En résolvant une équation du second degré, en déduire une expression de $cos\frac{2\pi}{5}$ faisant intervenir une racine carrée.

Exercice 3.

On se place dans le plan géométrique. On suppose fixés deux points A et B telle que la longueur AB vaille 1.

a) Expliquer comment on peut construire, à la règle et au compas, un segment de longueur $\sqrt{5}$.

b) Expliquer comment on peut construire, à la règle et au compas, un segment de longueur $\cos\frac{2\pi}{5}$ (cette valeur étant déduite de l'exercice précédent).

c) Expliquer comment on peut construire, à la règle et au compas, un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 (par exemple le cercle de centre A passant par B).

Exercice 4.

On se place dans le plan géométrique, muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ (qui est donc la courbe représentative de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$).

On fixe un nombre réel $a > 0$, et on note A le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse a (dont vous préciserez l'ordonnée). Vous pourrez faire un dessin, par exemple dans le cas $a = 2$ (mais les démonstrations devront être faites pour un a quelconque).

a) Déterminer une équation de la droite Δ tangente à $\mathscr{P}$ au point A. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ.

b) On note H le point de coordonnées $(a, 0)$, et K le point d'intersection de Δ avec l'axe des abscisses. Montrer que K est le milieu du segment $[OH]$.

c) On note F le point de coordonnées $(0, \frac{1}{4})$, et $\mathscr{D}$ la droite perpendiculaire à Δ et passant par F. Déterminer un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}$, puis une équation de la droite $\mathscr{D}$.

d) On note M le projeté orthogonal du point F sur la droite Δ, et (x_M, y_M) ses coordonnées. A l'aide des questions précédentes, donner un système de deux équations vérifiées par les réels x_M et y_M.

e) Calculer x_M et y_M en fonction de a. Que remarque-t-on ?

Exercice 5.
On veut déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables deux fois et telles que, quels que soient les nombres réels x et y,

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \qquad (\star).$$

On va pour cela raisonner par analyse et synthèse.

Analyse du problème. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartenant à l'ensemble E.

a) L'équation $(\star)$ est vérifiée quels que soient les réels x et y. En choisissant des valeurs particulières de x et/ou y, montrer que $f(0) = 0$, puis que la fonction f est paire.

b) On fixe, pour cette question, un réel x. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(y) = f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)$. Montrer que cette fonction est dérivable. En calculant de deux manière sa dérivée, montrer que, pour tout réel y,

$$f'(x+y) - f'(x-y) = 2f'(y) \qquad (\star\star).$$

c) Après s'être convaincu-e que l'égalité $(\star\star)$ est vérifiée quels que soient les réels x et y, on fixe, pour cette question un réel y. Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\psi(x) = f'(x+y) - f'(x-y) - 2'f(y)$. Montrer que cette fonction est dérivable, et calculer de deux manière sa dérivée. En déduire une troisième égalité $(\star\star\star)$.

d) Se convaincre que l'égalité $(\star\star\star)$ est vérifiée quels que soient les réels x et y. En déduire que la fonction dérivée seconde f'' est constante sur $\mathbb{R}$.

e) Déduire des questions **d)** et **a)** qu'il existe un nombre réel λ tel que, pour tout nombre réel x,

$$f(x) = \lambda x^2.$$

Synthèse. On fixe maintenant un réel λ, et on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda x$. Montrer que la fonction f appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

Conclusion. On a alors montré que l'ensemble $\mathscr{E}$ est :

$$\mathscr{E} = \left\{ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x^2 \end{array} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vous noterez l'importance, pour formuler clairement les questions (et d'ailleurs les réponses...), des locutions «pour tout» ou «quel que soit», d'une part, et «il existe», d'autre part.