Plan du cours de Mathématiques

MPSI

Erwan Biland

Lycée Stanislas, classe de MPSI 1, 2009/2010

Voici le plan du cours délivré aux MPSI 1 en 2009-2010.

Ce document pourra servir aux élèves de support de révision avant l'entrée en deuxième année, et plus largement de référence sur le cours de MPSI tout au long de l'année de spéciale.

J'ai essayé, autant que possible, de justifier les choix de plans qui m'ont semblé un peu originaux. J'ai parfois choisi d'aller plus loin que le programme (dénombrabilité, groupes finis, codimension, séries...). Ces dépassements sont toujours explicités, et justifiés, auprès des élèves, à qui j'ai d'ailleurs distribué le programme officiel. Cette démarche pourrait être utile à des candidats à l'Agrégation ou au Capes, même si les chapitres de MPSI ne sont pas forcément organisés comme des leçons d'oral de ces concours !

Ce cours doit beaucoup à celui qui m'a été délivré en 1997-1998 par J-L.Liters au lycée Clemenceau de Nantes. Il a aussi bénéficié de nombreuses discussions avec R.Antetomaso, A.Casamayou, H.Lemberg, C.Rakotoniaina, S.Tatitscheff...

Table des matières

Chapitre 1
Techniques de calcul

Poly 1.1 : Symboles mathématiques usuels
Poly 1.2 : Qu'est-ce qu'une équation ?

Objectif : poser les bases de la rigueur dans les raisonnements et de la prudence dans les calculs. Introduire quelques modes de raisonnements nouveau (analyse/synthèse, existence/unicité...).

1 Opérations sur les ensembles

a) Qu'est-ce qu'un ensemble ? et un ensemble vide ? ? ?

Ensembles, éléments, appartenance, égalité d'ensembles. Inclusion, caractérisation de l'égalité. Ensemble vide. Ensemble des parties d'un ensemble.

b) Calcul propositionnel ?

Maniement des connecteurs logiques et des quantificateurs.

c) Opérations sur les parties d'un ensemble

Intersection, réunion : croissance, associativité, distributivité.
Complémentaire, différence ensembliste : lois de Morgan. Différence symétrique.

d) Produit cartésien

Couple d'éléments (sans définition explicite). Produit cartésien de deux ensembles.
Notion de n-uplet d'éléments d'un ensemble, produit cartésien de n ensembles (définis par récurrence).

2 Systèmes linéaires

a) Qu'est-ce qu'un système linéaire ?

Présentation, matrices associées, système homogène...

b) Résolution des systèmes 2×2

Cas particulier se résolvant par demi-somme et demi-différence.
Cas général : distinction des cas, introduction du déterminant, formules de Cramer.

c) Méthode du pivôt de Gauss

Manipulations élémentaires sur les lignes d'un système. Algorithme du pivôt de Gauss.
Introduction au rang d'un système et à la dimension (nombre de paramètres) de l'ensemble des solutions.

3 Calcul de sommes et de produits

a) Changements d'indice

Sommes de termes de suites arithmétiques/géométriques.

b) Une identité remarquable

$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

c) Groupements de termes

Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

d) Factorielle

Application : produit des n premiers entiers pairs/impairs.

e) Coefficients binomiaux

Triangle de Pascal. Formule du binôme de Newton démontrée par récurrence.
Application à des calculs de sommes.

4 Congruences

a) Partie entière et congruences dans $\mathbb{R}$

Définition de la partie entière (on admet l'existence). Partie entière supérieure.

Application : si I est un intervalle semi-ouvert de longueur T, et x un réel, alors il existe un unique $y \in I$ tel que $x \equiv y\,[T]$. Résultat homologue dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne.

b) Application aux fonctions périodiques

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique et bornée sur une période, alors f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

Fonctions usuelles

Poly 2.1 : Trois théorèmes importants en analyse

Poly 2.2 : Aide mémoire pour la représentation des fonctions

Objectif : bien comprendre la notion de fonction bijective et l'intérêt éventuel de restreindre les ensembles de départ et d'arrivée, savoir étudier et représenter une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1 Fonctions, applications

a) Qu'est-ce qu'une application ?

Définition formelle par le triplet (E, F, Γ). On a défini une application de E dans F si on sait associer à tout élément de E, sans ambiguïté, un unique élément de F. Vocabulaire : image, antécédents. Exemple de l'application identité (sur E), de $x \mapsto \frac{1}{x}$ (sur $\mathbb{R}$).

b) Restriction, prolongements

Définition des restrictions au départ et à l'arrivée par le triplet correspondant.
Exemples de prolongements, continus ou non.

c) Composition d'applications

Idem. Abus d'écriture éventuel.

d) Application bijective, application réciproque

Définition. Interprétation en termes d'équations. Application réciproque définie par son graphe. Caractérisation d'une bijection par l'existence de l'application réciproque.

2 Fonctions logarithmes

a) Une équation fonctionnelle

Les solutions dérivables de l'équation $f(xy) = f(x) + f(y)$ sont les primitives de fonctions $x \mapsto \frac{a}{x}$ qui s'annulent en 1.

b) Le logarithme népérien

Morphisme de groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. Continuité, stricte croissance, limites (en $+\infty$, on utilise $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$). Branche parabolique horizontale ($\ln x \leqslant 2(\sqrt{x} - 1)$ car $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$). Bijectivité. On note $e = \ln^{-1}(1)$.

c) Le logarithme de base a

Définition pour $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, rapide énumération des propriétés en distinguant les cas $a > 1$ et $a < 1$. $\ln = \log_e$.

3 Fonctions exponentielles

a) Théorème de dérivation de la fonction réciproque ?

Démonstration en admettant la continuité de la fonction réciproque.

b) L'exponentielle népérienne

Définition comme bijection réciproque de ln. Propriétés algébriques ; pour $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = e^n$, d'où la notation $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Propriétés analytiques : continuité, dérivée, stricte croissance, limites (admis, ou en utilisant $e^{1+x} = e.e^x$), branche parabolique verticale.

c) L'exponentielle de base a

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, $a^n = \exp(n \ln a)$, d'où la définition $a^x = \exp(x \ln a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $y = a^x \iff x = \log_a y$. Rapide énumération des propriétés de $x \mapsto a^x$ en distinguant les cas $a > 1$ et $a < 1$. Exemples de calculs de logarithmes.

d) Les fonctions puissances

Etude de $x \mapsto x^\alpha$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, dans les cinq cas importants. Prolongement éventuel en 0. Rappel : étude sur $\mathbb{R}$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$, fonction $y \mapsto \sqrt[\alpha]{x}$ définie sur $\mathbb{R}$ pour α impair.

4 Fonctions hyperboliques

a) Cosinus et sinus hyperboliques

Définition, propriétés analytiques, graphes.

b) Tangente et cotangente hyperboliques

c) arsinh, artanh, arcosh

d) Résolution de l'équation $x^2 - y^2 = 1$

Si $x^2 - y^2 = 1$, il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $|x| = \cosh t$ et $y = \sinh t$. Paramétrage de l'hyperbole.

5 Fonctions circulaires

a) Cosinus, sinus, arcsin, arccos

On admet : $\frac{\pi}{2}$ est le premier point d'annulation de cos, $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, $\cos' = -\sin$, $\cos 0 = 1$ (suffisant ?).

b) Tangente, cotangente, arctan

c) Résolution de l'équation $x^2 + y^2 = 1$

Si $x^2 + y^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π, tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$. Paramétrage du cercle.

d) Formulaires de trigonométrie circulaire et hyperbolique

Chapitre 3
Nombres complexes

Poly 3.1 : Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^2$

Poly 3.2 : Qu'est-ce qu'un polynôme ?

Objectif : être à l'aise dans la manipulation des ensembles et la résolution d'équations (par équivalence ou par analyse/synthèse, voire en mélangeant les deux techniques). Il faut aussi arriver le plus rapidement possible à considérer effectivement les complexes comme des nombres, au même titre que les réels. L'étape suivante sera de faire de même avec des polynômes, des endomorphismes, des matrices (en respectant bien sûr les règles afférentes).

1 Images et antécédents, équations

a) Familles d'éléments, familles de parties
Réunion, intersection d'une famille quelconque de parties. Exemples ?

b) Image réciproque
Définition, compatibilité avec l'inclusion, la réunion, l'intersection, avec la composition des applications. Exemples (polycopié d'exercices).

c) Image directe
Définition, compatibilité avec l'inclusion, la réunion mais pas l'intersection, avec la composition.

d) Applications injectives
Définitions, négation, interprétation en termes d'équations, composition.

e) Applications surjectives
Définition, négation, interprétation en termes d'équations, composition.

f) Applications bijectives
Déjà introduit au chapitre précédent. Composition, caractérisation catégorique des bijections.

2 Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

a) Définition axiomatique
$\mathbb{C}$ est la $\mathbb{R}$-algèbre commutative engendré par un élément i tel que $i^2 = -1$. Unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire. Représentation géométrique.

b) Propriétés générales
Conjugué d'un complexe, propriétés algébriques (morphisme ?). Module, compatibilité avec le produit, inégalité triangulaire. Existence d'un inverse pour tout complexe non nul : $\mathbb{C}$ est un corps. Conjugué de l'inverse. Calculs de quotient avec la quantité conjuguée.

c) Le groupe des nombres complexes de module 1
Groupe abélien $(\mathbb{U}, \times)$. Inverse et conjugué. Morphisme $\theta \mapsto e^{i\theta}$. Surjectivité, défaut d'injectivité.

d) Argument d'un complexe non nul

Ecriture trigonométrique d'un complexe non nul. Argument, défini modulo 2π. Propriétés algébriques. Application de la formule du binôme aux calculs de trigonométrie circulaire.

3 Exemples d'équations algébriques dans $\mathbb{C}$

Notion d'équation algébriques. Exemples. Equations que l'on sait déjà résoudre, équations résolubles. Culture : équations non résolubles par radicaux.

a) Racines n-ièmes de l'unité

Définition. Ensemble $\mathscr{U}_n$, dénombrement.

b) Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Solution particulière, solution générale. Exemples.

c) Calcul des racines carrées d'un nombre complexe

Calcul explicite des parties réelles et imaginaires, sur un exemple. Culture : construction à la règle et au compas.

d) Equations du second degré à coefficients complexes

Résolution, systèmes de racines. Nouvelle rédaction, en ne distinguant le cas $\Delta = 0$ qu'au dernier moment, après avoir défini les systèmes de racines.

Exemple : calcul de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$; construction du pentagone à la règle et au compas.

e) Relations entre coefficients et racines

$x + y = s$ et $xy = p \Leftrightarrow (x, y)$ est un système de racines de $X^2 - sX + p$.

4 Exponentielle complexe

a) Exponentielle complexe

Définition, propriétés algébriques.

b) Dérivation d'une application du type $t \mapsto e^{\varphi(t)}$

En revenant aux parties réelles et imaginaires. Analogie avec la formule de dérivation des fonctions composées, qui est cependant de nature différente.

Chapitre 4

Groupes, anneaux, corps

A ce stade, les élèves sont encore novices en algèbre. L'objectif est d'abord de stabiliser les notions déjà abordées dans les chapitres précédents, et d'enrichir le catalogue d'exemples. Bien souligner l'importance de la rigueur et des quantificateurs. C'est peut-être aussi l'occasion de soulever certains problèmes plus délicats, comme celui de la caractéristique d'un anneau ou d'un corps.

1 Lois de compositions internes

a) Définition, propriétés élémentaire

Associativité, commutativité, distributivité. Elément neutre, absorbant, idempotent. Nombreux exemples.

b) Elément neutre

Neutres à gauche, à droite. Unicité du neutre bilatère. Notations e_M, 1_M, 0_M. Puissances d'un élément dans un monoïde ; $x^0 = e_M$.

Elément absorbant ?

c) Symétrique d'un élément

Dans un monoïde : symétriques à gauche, à droite. Unicité du symétrique bilatère. Inverse, opposé ; notations x^{-1}, $-x$. Puissances négatives.

Tableau récapitulatif : notations additive, multiplicative, générale.

2 Groupes

a) Définition

Axiomes des groupes ; groupes abéliens. Exemples. Groupe produit.

b) Sous-groupes

Le neutre d'un sous-groupe de G est le même que celui de G, car tout idempotent inversible dans un monoïde est égal au neutre. Caractérisations des sous-groupes.

Exemples : sous-corps classiques, sous-groupes multiplicatifs. Groupe de transformations conservant une figure dans le plan ou dans l'espace. Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$ (à connaître en vue de l'arithmétique).

c) Morphismes de groupes

Endo/iso/auto-morphismes. Composition, isomorphisme réciproque.

Exemples déjà vus. Endomorphismes additifs de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$.

d) Noyau, image

Image directe, image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.

Caractérisation de l'injectivité par le noyau.

Notion de suite exacte de groupes. Exemples $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^* \to 1$ (module : $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^*$), $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \to 1$ (puissance n-ième : $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$).

3 Anneaux et corps

a) Définition ; calcul dans un anneau

La multiplication à gauche ou à droite par un élément fixé est un endomorphisme de groupe additif. Généralisation des identités remarquables du chapitre 1.

b) Anneaux intègres, corps

Définition. Exemples. Caractéristique d'un corps.

c) Sous-anneaux, sous-corps, morphismes

Définitions, exemples (entiers de Gauss).

Chapitre 5
Equations différentielles linéaires

Poly 5.1 : Recherche d'une solution particulière pour les équations à coefficients constants

Chapitre essentiellement technique. Ne pas passer trop de temps sur le cours, mais insister sur la rigueur et la précision de la rédaction (en particulier sur les équations fonctionnelles et les raccordements de solutions).

Introduction : qu'est-ce qu'une équation différentielle ?
Exemples d'équations fonctionnelles, d'équations différentielles linéaires ou non. Définition générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, à coefficients *a priori* non constants dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sur un intervalle réel I. Souligner la spécificité et le caractère symbolique de la notation des équations différentielles. Objectifs du chapitre.

1 Equations homogène

a) Equation du premier ordre à coefficients constants
Résolution par la méthode de variation de la constante.

b) Equations du second ordre à coefficients constants
Idem, après recherche des solutions du type $x \mapsto e^{\lambda x}$. Résolution sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$.

c) Equations du premier ordre à coefficients non constants, sous forme résolue
Résolution empirique puis rigoureuse.

2 Equations avec second membre

a) Equation homogène associée, solution particulière
Solution générale de (E) = solution particulière de (E) + solution générale de (H).
Diverses formulations ; notation de l'ensemble des solutions.

b) Principe de superposition
Pour simplifier la recherche d'une solution particulière.

c) Comment trouver une solution particulière ?
Solutions «évidentes», situations particulières (*cf.* poly). Variation de la constante.
Variation des deux constantes pour les équations du deuxième ordre.

3 Problème du raccordement de solutions
Quelques exemples : $(\sin x)y' - 2(\cos x)y = \sin x$, $xy' - y = x$, $x^2y' + y = 1$.

Chapitre 6

Géométrie élémentaire du plan et de l'espace

Poly 6.1 : Complément sur la géométrie dans l'espace

Le cours se place dans le plan, sauf pour le paragraphe 4 (qui se veut une introduction aux problématiques de l'algèbre linéaire). Pour la géométrie dans l'espace, les élèves disposent d'un polycopié qui sera travaillé et complété au fur et à mesure que les notions correspondantes seront vues dans le plan.

Dans ce chapitre, comme d'ailleurs dans les précédents, il est utile de faire des fiches récapitulatives des nombreuses méthodes à connaître.

1 Repérage dans le plan

a) Coordonnées cartésiennes

Ensemble P des points, ensemble $\overrightarrow{P}$ des vecteurs. Définition d'une base, d'un repère.
Linéarité des fonctions coordonnées. Changement de repère.

b) Coordonnées polaires

Problème de la non-unicité. Passage en cartésiennes. Changement de BOND.

2 Produit scalaire, déterminant dans le plan

a) Produit scalaire

Définition géométrique. Caractérisation de l'orthogonalité.

b) Propriétés algébriques du produit scalaire

Bilinéarité

c) Déterminant

Définition géométrique, caractérisation de la colinéarité. Propriétés algébriques.

3 Equations de droites dans le plan

a) Connaissant un point et un vecteur normal

Equation cartésienne, équation réduite, distance.

b) Connaissant un point et un vecteur directeur

Idem.

c) Equation polaire

Et distance.

d) Equations de cercles

Problèmes d'intersection : d'un cercle et d'une droite, de deux droites.

4 Problèmes d'intersection et systèmes linéaires

a) Intersection de deux droites dans le plan

Systèmes 2×2 et déterminant.

b) Intersection de plans dans l'espace

Lien avec la compatibilité et le rang d'un système.

5 Problèmes de lignes de niveau

Définition d'une ligne de niveau.
Lignes de niveaux des applications $M \mapsto \vec{u}.\overrightarrow{AM}$ et $M \mapsto \det(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.

Chapitre 7

Courbes paramétrées

Poly 7.1 : Représentation des courbes paramétrées, techniques de base

Chapitre technique. Le point de vue cinématique semble le plus efficace pour faire comprendre aux élèves ce qu'est une courbe paramétrée.
Passer beaucoup de temps sur les exercices : les élèves doivent être capables de tracer une courbe simple sans utiliser la calculatrice.

1 Paramétrage cartésien

a) Principes généraux

Variations de x et y, vecteur vitesse, vecteur accélération

Exemple : $x = \cos t,\ y = \sin 2t,\ t \in [0, 2\pi]$; on constate visuellement des symétries.

b) Etude des symétries, restriction de l'intervalle d'étude

Exemples + tableau récapitulatif ; principe général.
Exemple de l'astroïde (introduction à la notion de point singulier).

c) Etude aux bornes

Branches infinies. Points limites, application aux points singuliers.

Exemple : $x = (1-t)^2 e^t,\ y(t) = 2(1-t)e^t,\ t \in \mathbb{R}$.

2 Paramétrage polaire, équation polaire

a) Calcul des vecteurs vitesse et accélération

Pour un paramétrage en coorpdonnées polaires ; pour un paramétrage par l'angle polaire.

b) Représentation à partir d'une équation polaire (étude locale)

Exemple : Cardioïde

c) Symétries, points multiples

Exemple : $r = \sin \frac{3\theta}{2}$ + déterminer le groupe des isométries qui conservent la courbe.

d) Etude aux bornes

Exemples : $r = 2^{\frac{\theta}{2\pi}}$; $r = \log_3 \left(1 + \dfrac{3\theta}{\pi}\right)$.

Chapitre 8
Coniques

Beaucoup d'éléments à apporter pour une utilisation assez restreinte en cours de mathématiques. Je me concentre sur l'aspect «géométrie pure», en visant notamment l'optique géométrique.

1 Approches géométriques des coniques

a) Définition monofocale, équation polaire

b) Équation cartésienne, classification

c) Paramétrage et représentation des coniques à centre

d) Equation bifocale des coniques à centre

La démonstration ne sera faite que pour les ellipses.

Tableau récapitulatif.

2 Tangentes aux coniques

a) Premières méthodes

Utilisation des paramétrages cartésiens. Tangentes aux ellipses obtenues par affinité.

b) Dérivation de fonctions définies vectoriellement

Produit scalaire, déterminant, norme de fonctions vectorielles dérivables.

c) Application

Tangentes aux coniques comme bissectrices de droites particulières. Applications à l'optique géométrique.

3 Courbes algébriques de degré 2

a) Classification, discriminant

Longue distinction de cas, que l'on finit par réunir...

b) Tangentes à une courbe algébrique de degré 2

Réutilisation des méthodes du paragraphe **2 b)**.

Compléter le tableau récapitulatif commencé au paragraphe 1.

Chapitre 9

Ensembles de nombres

A lire : Boualem H., Brouzet R. – *La planète $\mathbb{R}$, Voyage au pays des nombres réels*, Dunod, 2002.

L'ensemble $\mathbb{N}$ est présenté via les propriétés de l'ordre $\leqslant$. Le «principe» de récurrence est donc vu comme un théorème, et non un axiome.

Le cœur du chapitre est l'axiome de la borne supérieure et toutes ses conséquences. Insister aussi sur la notion de nombre rationnel/irrationnel (normalement déjà bien connue).

Dans le dernier paragraphe sont présentées les notions topologiques nécessaires pour comprendre le cours sur les fonctions. On étudie en plus, sous forme d'exercice, les propriétés des parties ouvertes et fermées.

1 L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

a) Relations

Définition générale (par le graphe). Transitivité, réflexivité, symétrie, antisymétrie. Exemples. Relations d'équivalence.

b) Relations d'ordre

Exemples. Majorants, minorants. Plus grand ou plus petit élément, unicité.

c) L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leqslant)$

Quatre axiomes. Zéro. Successeur d'un élement. Prédécesseur d'un élément non nul.

d) Le théorème de la récurrence

Démonstration par l'absurde. Raisonnements par récurrence double, triple, forte, finie, descendante.

Toute suite décroissante (ou croissante majorée) d'entiers naturels est stationnaire.

Réflexion sur la définition intrinsèque d'une addition et d'une multiplication dans $\mathbb{N}$.

2 L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

a) Le corps totalement ordonné $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$

Axiome de compatibilité entre $+$, $\times$ et $\leqslant$.
Règle des signes, valeur absolue. Décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Axiome de la borne supérieure

Borne supérieure/inférieure, caractérisation en ε.

Axiome de la borne supérieure, théorème de la borne inférieure.

Application : racine carrée d'un réel positif $\sqrt{a} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant a\}$.

c) Nombres entiers, nombres rationnels

Plongement de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (injectivité, stabilité par $+$, $\times$?). Définition de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ comme parties de $\mathbb{R}$.

La partie $\mathbb{N}$ n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{Z}$ n'est ni minorée, ni majorée. Une partie de $\mathbb{Z}$ est minorée/majorée dans $\mathbb{Z}$ si, et seulement si, elle l'est dans $\mathbb{R}$.

Ecriture irréductible d'un rationnel. Nombres irrationnels ; $\sqrt{2}$ est irrationnel.

3 Intervalles de $\mathbb{R}$

a) Qu'est-ce qu'un intervalle ?

Intervalles, partie convexes. Equivalence des deux notions.

b) Classification des intervalles

Neuf catégories d'intervalles non vides : majorés contenant ou non leur borne supérieure, non majorés ; minorés contenant ou non leur borne inférieure, non minorés.

c) Droite réelle achevée

Toute partie de $\bar{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

4 Partie entière, applications

a) Partie entière d'un nombre réel

Existence et unicité de la partie entière supérieure (l'existence découle du fait que $\mathbb{Z}$ n'est ni minoré, ni majoré dans $\mathbb{R}$). Partie entière inférieure.

b) Congruences dans $\mathbb{R}$

Rappels de résultats du chapitre 1. Division euclidienne dans $\mathbb{R}$.

c) Valeurs décimales approchées

Suites des valeurs décimales approchées par défaut, par excès.

5 Un peu de topologie dans $\mathbb{R}$

a) Voisinages

Définition. Propriété vraie au voisinage d'un point. Point intérieur à une partie.

b) Points adhérents

Point adhérent à une partie, adhérence. Exemples (les bornes supérieure et inférieure, si elles existent, sont adhérentes).

c) Parties ouvertes, parties fermées

Définition, propriétés algébriques. Exemples (intervalles ouverts, fermés, semi-ouverts).

d) Partie dense

Définition (tout point est adhérent), caractérisations (intersection avec un intervalle ouvert non vide, une partie ouverte non vide). Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 10

Suites numériques

Poly 10.1 : Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Ce chapitre est l'occasion de présenter pour la première fois la notion d'espace vectoriel (et même d'algèbre) sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et de donner des exemples de sous-espaces vectoriels. Bien insister sur la signification des différents axiomes, en particulier les axiomes de compatibilité entre les différentes lois en présence.

Les autres points importants sont, bien sûr, la définition des limites en ε (le terrain a été préparé par la caractérisation des bornes supérieures), et les théorèmes abstraits d'existence de limites. Le calcul explicite de limites n'est pas une priorité. On attendra pour cela d'avoir développé les outils de comparaison des suites et fonctions, regroupés dans un chapitre ultérieur.

Enfin, il est utile de faire réfléchir les élèves sur la définition d'une suite par récurrence. L'étude des suites définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ sera reprise dans le chapitre suivant.

1 Généralités

a) La $\mathbb{K}$-algèbre des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$

Liste des axiomes, avec explication. Démonstrations en exercice.
Fonction extractrice, suite extraite.

b) Suites minorées, majorées, bornées

Sous-algèbre des suites bornées. Une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée. Suites extraites.

c) Convergence d'une suite

Définition d'une limite finie, notation $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Unicité de la limite, notation $\ell = \lim(u) = \lim\limits_{n\to\infty}(u_n)$.

d) Limites infinies

Définition. Unicité de la limite dans $\bar{\mathbb{R}}$.

e) Limites des suites extraites

Réciproque partielle pour les sous-suites des indices pairs et impairs.

2 Limites et ordre pour les suites réelles

a) Compatibilité entre limites et ordre

Tout se déduit de la proposition : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $x < \ell$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n > x$.

b) Limites et bornitude

Caractère minoré, majoré d'une suite admettant une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$.

c) Théorèmes d'encadrement

Pour une limite finie, une limite infinie. Encadrement de la valeur absolue ou du module.
Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.

3 Théorèmes opératoires sur les limites

a) Somme, combinaison linéaire

Faire un tableau récapitulatif pour les limites finies et infinies.

b) Produit

Idem.

c) Passage à l'inverse

Raisonnement sur la valeur absolue ou le module, l'étude du signe se faisant par ailleurs pour des limites égales à $\pm\infty$. Application au quotient.

d) Suites de référence, comparaison

Suite des n^α ; suites polynomiales ; suites et séries géométriques, suite des $\sqrt[n]{\alpha}$, des $n!$, des n^n.

e) Théorème de Cesaro

Traité sous forme de TD. Voir la réciproque à la Abel ?

4 Théorèmes d'existence de limites

a) Convergence et divergence des suites monotones

Enoncé sous forme de distinction de cas, pour les suites croissantes.

b) Suites adjacentes, théorème des segments emboîtés

Application : irrationnalité de e (en admettant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$).

c) Théorème de Bolzano-Weierstrass

Démonstration par dichotomie, ou par la méthode des sous-suites monotones. Extension aux suites à valeurs complexes ?

5 Suites définies par récurrence

a) Problème de la bonne définition

La preuve doit se faire par récurrence. On peut souvent prouver d'autres propriétés en même temps (croissance, majoration, *etc.*). Dans d'autres cas, il faut d'abord admettre l'existence de la suite pour développer les outils qui permettront ensuite de prouver sa bonne définition : attention aux raisonnements circulaires !

Exemples ?

Cas particulier : relation de récurrence indépendante de n, du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Intérêt de trouver des ensembles stables par f.

b) Relation de récurrence linéaire

Résultats sans preuve ; l'important est de faire le lien avec les équations différentielles linéaires.

Chapitre 11

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Poly 11.1 : Généralités sur les fonctions

Poly 11.2 : Applications de la dichotomie

Le début du chapitre est assez ingrat : il s'agit de généraliser des résultats déjà vus pour les suites. Il faut donc aller assez vite, d'où le recours à un polycopié pour les définitions élémentaires (au demeurant déjà connues).

Par contre, les théorèmes de composition de limites sont nouveaux et doivent être traités soigneusement. Souligner l'intérêt de la rédaction en termes de voisinages pour éviter des distinctions de cas fastidieuses (27 cas possibles !). Montrer aussi que la plupart des notions intéressantes possèdent une caractérisation par les suites.

Enfin, prévoir du temps pour les démonstrations des grands théorème du paragraphe 5. Il sera intéressant de présenter plusieurs démonstrations possibles, plusieurs variantes des énoncés.

1 Définitions

Fonctions majorées, minorées, bornées, croissantes, décroissantes, paires, impaires, périodiques, antipériodiques. Théorèmes opératoires. A partir du polycopié.

2 Etude locale des fonctions

a) Limites

Limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ en un point $a \in \bar{\mathbb{R}}$ adhérent à X : définition par les voisinages, explicitation dans les neuf cas possibles. Notation $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. Continuité en un point, continuité globale.

b) Propriétés élémentaires

Unicité de la limite dans $\bar{\mathbb{R}}$: importance de supposer a adhérent à X. Notation $\ell = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_a f$. Caractère borné, minoré, majoré au voisinage du point a.

c) A propos des restrictions

Si f admet une limite en a, toute restriction de f à une partie de X (à laquelle a reste adhérent) admet la même limite en a.

Limite à gauche, à droite. Continuité à gauche, à droite.

d) Théorèmes opératoires sur les limites et la continuité

Combinaison linéaire, produit (le quotient sera obtenu grâce à la composition). Cas des limites infinies.

e) Limites et ordre

Si $b < \lim_a f$, alors f est à valeurs supérieures à b au voisinage de a. Compatibilité de l'ordre avec la passage à la limite. Théorème d'encadrement.

f) Limites des fonctions monotones

Pas de démonstration, mais insister sur la «règle des signes» entre limite à gauche/à droite, croissance/décroissance, et majoration/minoration de la fonction.

3 Composition des limites

a) Limite d'une fonction composée

Démonstration par les voisinages, éventuellement explicitée dans un cas particulier.

b) Caractérisations séquentielles

Points adhérents, parties denses, limites, existence d'une limite, continuité locale.

c) Suites définies par récurrence

Bonne définition, monotonie, convergence ; intervalles stables, variations, points fixes. Vitesse de convergence ; fonctions contractantes. Exemples : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n^2)$; $u_{n+1} = 1/(1 + u_n)$.

4 Etude globale des fonctions continues

a) Restriction et prolongement

Prolongement par continuité.

Deux applications continues qui coïncident sur une partie de $\mathbb{R}$ coïcident sur son adhérence. Applications aux parties denses. Exemple des endomorphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$.

b) Continuité uniforme, fonctions lipschitziennes

Caractérisations séquentielles de la continuité globale, de la continuité uniforme.

Théorème d'existence de limites ?

5 Théorèmes fondamentaux

a) Théorème des valeurs intermédiaires

Valable pour les fonctions *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. Démonstration par dichotomie ou par Bolzano-Weierstrass (ou les deux...). Diverses variantes de l'énoncé.

b) Théorème de la bijection continue

Si $X \subset \mathbb{R}$ et si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone telle que $f(X)$ est un intervalle, alors f est continue. On en déduit qu'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle induit une bijection bicontinue.

Limites de la fonction réciproque.

c) Théorème des bornes

Démonstration par Bolzano-Weierstrass. Application au module d'une fonction à valeurs complexes.

d) Théorème de Heine

Démonstration par Bolzano-Weierstrass. Exercice(s) ? ?

Chapitre 12
Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

L'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ a été étudiée par la très grande majorité des élèves en cours de spécialité. Inutile donc d'y consacrer trop de temps. J'ai préférer ouvrir vers l'arithmétique des anneaux euclidiens (sur un exemple), pour préparer l'arithmétique des polynômes.

1 Multiples et diviseurs

a) Relation de divisibilité

Eléments inversibles de $\mathbb{Z}$.
Division euclidienne, définie soit par la partie entière (via le plongement dans $\mathbb{R}$), soit intrinsèquement (en distinguant entiers positifs et négatifs).

b) PGCD, PPCM, théorème de Bézout, lemme de Gauss

Par la méthode des idéaux, qu'on pourra présenter comme des sous-groupes.
Equivalence des deux définitions du PGCD/PPCM (pour l'ordre usuel ou la divisbilité).

c) Nombres premiers

Définition. Infinité de l'ensemble des nombres premiers.

d) Décomposition en produit de facteurs premiers

Existence : illustration de la récurrence forte. Unicité, à l'ordre près ou en écrivant la factorisation par ordre croissant des facteurs.
Application au calcul du PGCD/PPCM.

2 Calcul modulo un entier

a) Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition, morphisme $/Z \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Entiers inversibles modulo n. Application à la résolution d'équations. Fonction d'Euler ?

b) Corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Entiers inversibles modulo p : $\varphi(p) = p - 1$. Première preuve du petit théorème de Fermat ?

3 Prolongement : arithmétique des entiers de Gauss

Étude justifiée par le problème de l'écriture d'un entier comme somme de deux carrés parfaits, et menant à sa résolution.

a) Divisibilité, division euclidienne, idéaux

Attention : pas d'unicité pour la division euclidienne. Tous les idéaux sont principaux.

b) Théorèmes de Bézout et de Gauss

Souligner le parallélisme avec l'arithmétique de $\mathbb{Z}$.

c) Eléments irréductibles

Lien avec les nombres premiers dans $\mathbb{N}$, et la congruence modulo 4. Retour aux sommes de deux carrés parfaits.

Chapitre 13
Relations de comparaison, développements limités

Poly 13.1 : Développements limités usuels

Difficile de parler de développements limités sans avoir les idées claires sur les polynômes. De plus, mon expérience m'a appris que les élèves ont besoin de temps pour bien intégrer la notion abstraite de polynôme. Ce chapitre inclut donc une introduction complète à l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ et à ses lois ; l'étude fine des racines, et *a fortiori* l'arithmétique des polynômes, seront faites beaucoup plus tard dans l'année.

Pour le reste, rien de très original, sauf peut-être sur les produits de DL : j'incite les élèves à étudier le «nombre de termes significatifs» des facteurs (différence entre le degré du terme négligé et le degré du premier terme non nul). Leur expérience des calculs en physique (nombre de chiffres significatifs) leur fait comprendre qu'il ne sert à rien de multiplier un facteur à 2 termes significatifs par un facteur à 6 termes significatifs, fussent-ils tous deux des DL_8. De plus, un rapide calcul d'équivalent permet de prévoir, au départ, le nombre de termes significatifs du résultat demandé. La méthode peut aussi marcher pour la composition des DL, à condition d'être très précis.

1 Comparaison des fonctions

a) Prépondérance, domination, équivalence

Définitions, caractérisations par le quotient quand on compare la fonction f à une fonction g qui ne s'annule pas. Etude du cas où g s'annule, où g est la fonction nulle.

b) Exemples usuels

Synthèse des résultats déjà vus. Equivalents d'une fonction polynomiale en 0 et en $\pm\infty$.

c) Transitivité

Symétrie et réflexivité de $\sim$, transitivité mélangée.

d) Produit, quotient (ça marche bien)

Elévation à la valeur absolue, à une puissance, à l'exponentielle.

e) Somme, combinaison linéaire (attention !)

Pour les équivalents : toujours revenir à la définition en «petit o».

f) Changement de variable

A rédiger proprement.

2 Polynômes et fonctions polynomiales

a) Qu'est-ce qu'un polynôme ?

Une première approche a été vue en poly au début de l'année. Ici, on introduit $\mathbb{K}[X]$ comme l'algèbre sur $\mathbb{K}$ librement engendrée par l'indéterminée X. On prouve la formule de convolution pour le produit, ainsi que la commutativité.

b) Degré et valuation

Compatibilité avec la somme, le produit (en exercice pour la valuation ?).

c) Fonctions polynomiales, racines d'un polynôme

Evaluation de $P \in \mathbb{K}[X]$ en $\alpha \in \mathbb{K}$. Compatibilité avec la somme, la produit. Fonctions polynomiales, racines.

On pourrait prendre α dans une $\mathbb{K}$-algèbre (par exemple $\mathbb{K}[X]$...) sans rien changer aux raisonnements.

d) Théorème fondamental

Si un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est non nul et de degré d, il admet au plus d racines dans $\mathbb{K}$ (provisoirement admis). Applications ; isomorphisme entre $\mathbb{K}[X]$ et l'ensemble des fonctions polynomiales sur une partie infinie de $\mathbb{K}$.

e) Composition des polynômes

Définition, compatibilité avec les opérations, grâce à la remarque précédente.

f) Dérivation, primitivation

Formule de Leibniz. Formule de Taylor, si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Preuve de la formule de dérivation des polynômes composés ?

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, lien avec la dérivation des fonctions polynomiales.

3 Développements limités

a) Définition

Troncature, exemples (on se ramène toujours en 0). DL_0 et continuité, DL_1 et dérivabilité.

b) Unicité des coefficients

Application : DL en 0 d'une fonction paire, impaire.

c) Opérations algébriques

DL d'une combinaison linéaire, d'un produit. Pour le produit : nombre de termes significatifs.

d) Composition, quotient

On se place toujours en 0 !

e) Généralisation : les développements asymptotiques

DL en $+\infty$, DL avec des puissances négatives, DA avec d'autres fonctions.

4 Applications

a) Etudes de signe (DL et équivalent)

Extrema des fonctions dérivables, position asymptotique d'une courbe par rapport à une droite.

b) Etude d'une courbe paramétrée au voisinage d'un point singulier

Etude des quatres cas possibles et de leurs interprétations graphiques.

Chapitre 14
Dérivation

Poly 14.1 : Définitions sur la dérivation

Un chapitre qui peut être traité assez rapidement. Le premier paragraphe est essentiellement technique, mais certains modes de rédaction sont à retenir. Les outils importants sont dans le deuxième paragraphe, cependant que le dernier paragraphe vient compléter le chapitre sur les développements limités.

1 Etude locale

a) Définitions

A partir du poly : dérivée en un point, à gauche, à droite, à l'ordre n. Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^\infty$.

Polynôme de Taylor à l'ordre n associé à une fonction dérivable n fois en un point $a \in \mathbb{R}$.

b) Théorèmes opératoires, formule de Leibniz

Peut être fait partiellement en poly si la formule de Leibniz a été prouvée pour les polynômes. Insister cependant sur l'aspect spécifique des preuves de dérivabilité.

c) Dérivée d'une composée, d'une fonction réciproque

La dérivation de la fonction réciproque a normalement déjà été vue. Rédiger soigneusement les preuves par récurrence pour la dérivabilité à l'ordre n.

2 Etude globale

a) Théorème de Rolle

Uniquement pour les fonctions à valeurs réelles !

b) Théorèmes des accroissements finis

Egalité puis inégalité (sous forme d'encadrement ou de majoration de la valeur absolue). Sous cette deuxième forme, il vaut aussi pour les fonctions à valeurs complexes (preuve plus difficile, par exemple par dichotomie, voir poly).

c) Application à l'étude des fonctions

Monotonie et signe de la dérivée. Fonction lipschitzienne et dérivée bornée.

Pour l'étude des suites récurrentes : points fixes attractifs ou répulsifs.

3 Applications aux développements limités

a) Primitivation des DL

Application : théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, théorème de Taylor-Young.

b) Dérivation des DL

Attention : la dérivée doit déjà admettre un DL à l'ordre voulu !

Chapitre 15
Espaces vectoriels

L'objectif des deux derniers paragraphes est de préparer les élèves au cours de botanique sur les automorphismes orthogonaux et les isométries. Il faut en particulier faire ressentir l'importance de la recherche de sous-espaces propres (pour les valeurs propres 0, 1, -1) pour un endomorphisme linéaire, et de points fixes pour un «endomorphisme» affine.

1 Espaces vectoriels

a) Définition, exemples

Loi de composition externe. Axiomes des espaces vectoriels sur un corps, et non un anneau quelconque : $\lambda x = 0_E \Rightarrow [\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E]$. Exemples issus de l'analyse, de la géométrie, et de l'algèbre (extensions de corps).

b) Sous-espaces vectoriels

Définition, nombreux exemples. Notion de combinaison linéaire.

2 Applications linéaires

a) Définition, exemples

Les formes $\mathbb{R}$-linéaires sur $\mathbb{C}$ sont de la forme $z \mapsto a\Re e(z)+b\Im m(z) = \alpha z+\bar{\alpha}\bar{z}$; les endomorphismes $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ sont de la forme $z \mapsto \alpha z + \beta\bar{z}$. Formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$.

b) Noyau, image

Application à l'injectivité, à la surjectivité, et pour prouver qu'une partie est un sous-espace vectoriel.

c) Ensembles d'applications linéaires ; $\mathscr{L}(E, F)$, $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$, $(\mathrm{GL}(E), \circ)$

Structures d'espace vectoriel, d'algèbre, de groupe.

3 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

a) Intersection, sous-espace vectoriel engendré par une partie

Une intersection quelconque de sev est un sev.

Par définition, $\operatorname{vect} A$ est l'intersection de tous les sev qui contiennent A. On montre que c'est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A.

b) Somme

$F + G = \operatorname{vect}(F \cup G)$. Application $\varphi_{F,G} : F \times G \to E,\ (y, z) \mapsto y + z$: noyau, image.

c) Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Trois propositions équivalentes : $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$; $\varphi_{F,G}$ est un isomorphisme ; existence et unicité de la décomposition de tout vecteur relativement à F et G.

Exemple : $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, fonctions paires et impaires.

d) En attendant le théorème du rang

Si S est un supplémentaire de $\ker u$, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{im} u$.

4 Quelques endomorphismes remarquables

a) Projecteurs

Projecteur p sur un sev parallèlement à un supplémentaire ; linéarité, noyau, image, $p \circ p = p$. Projecteur associé $q = \mathrm{Id}_E - p$. Caractérisation des projecteurs par l'identité $p^2 = p$.

b) Symétries

Symétrie $s = p - q$ par rapport à un sev parallèlement à un supplémentaire. Projecteur $p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s)$; linéarité, sous-espaces propres, $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Caractérisation des symétries vectorielles par l'identité $s^2 = \mathrm{Id}_E$.

c) Affinités (exercice)

Introduction à la notion de polynôme annulateur, application à la recherche de l'inverse si le coefficient constant est non nul.

5 Eléments de géométrie affine

a) Equations linéaires avec second membre

Une des deux sources de l'invention de l'algèbre linéaire, l'autre étant la géométrie via le corps des quaternion de Hamilton.

Définition générale, nombreux exemples : équations différentielles, équations aux différences finies, systèmes linéaires, certaines équations fonctionnelles.

Principes généraux : résolution de l'équation homogène associée, recherche d'une solution particulière, principe de superposition. Structure de l'ensemble des solutions.

b) Sous-espaces affines

Image d'un sous-espace vectoriel par une translation. Définition d'un sous-espace affine, direction, caractérisation par les barycentres. Stabilité par barycentre de n points. Intersection, parallélisme.

Pourquoi ne pas introduire les espaces affines ? Notation différenciée points/vecteurs suivant le sens des objets manipulés. En pratique, ces notations rendent les démonstrations peu compréhensibles, donc elles ne seront utilisées que pour donner un sens aux *résultats*.

c) Applications affines

Une application affine est la composée $f = t_{\vec{v}} \circ \vec{f}$ d'une translation et d'une application linéaire. Unicité de cette décomposition, partie linéaire de f. f est bijective ssi sa partie linéaire l'est.

Identité $f \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{f}(\vec{u})} \circ f$. Composée d'applications affines, groupe $\mathscr{A}ff(E)$ des transformations affines de E. Applications affines du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$ dans lui-même.

d) Homothéties, projecteurs, symétries affines

Homothéties affines. Toute transformation affine dont la partie linéaire est de type $\lambda \mathrm{Id}_E$ est une homothétie affine : recherche de point fixe. Une application affine admettant un point fixe de comporte «presque» comme une application linéaire.

Projecteurs affines ; caractérisation par l'identité $p \circ p = p$. Symétries affines ; caractérisation par l'identité $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Chapitre 16

Ensembles finis, dénombrement

Ce cours doit bien sûr être compris comme une préparation au cours sur la dimension.

La notion d'ensemble fini et de cardinal est définie par l'énumération des éléments plutôt que par équipotence. L'analogie avec les bases en algèbre linéaire est évidente, mais surtout cela semble moins déroutant pour certains élèves.

L'étude des classes d'équivalence et tout le paragraphe sur les groupes finis sont hors-programme. Outre leur intérêt mathématique propre, ces points sont abordés pour approfondir la notion de partition avant le paragraphe sur le dénombrement, qui est généralement perçu comme difficile par les étudiants. La notion générale de groupe quotient est laissée de côté.

Le dénombrement est illustré par de nombreux dessins pour que les élèves comprennent chaque démonstration avant sa mise en forme. C'est la mise en forme qui pose souvent problème en exercice.

Enfin, dans le dernier paragraphe, la définition de la signature est due à S.Tatitscheff.

1 Ensembles finis

a) Qu'est-ce qu'un ensemble fini ?

X est fini de cardinal 0 si $X = \varnothing$. X est fini de cardinal n s'il existe $x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts tels que $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sinon X est infini.

Traduction en termes d'applications : X est fini de cardinal n ssi il est équipotent à $[\![1, n]\!]$. Exemples d'ensembles dénombrables, c'est-à-dire équipotents à $\mathbb{N}$. Culture : $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, donc non dénombrable.

b) Injections, surjections

S'il existe une injection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$, alors $n \leqslant p$ (par récurrence sur n ou p). S'il existe une surjection alors $n \geqslant p$ (en construisant une section). S'il existe une bijection, alors $n = p$.

Conséquences : le cardinal d'un ensemble fini est bien défini ; s'il existe une injection (*resp.* surjection) de E dans F alors $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$ (*resp.* $\geqslant$) ; cardinal d'une partie.

Exercice : une partie de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est bornée.

Existence d'une section pour une surjection entre ensembles finis. Axiome du choix.

c) Opérations sur les parties finies d'un ensemble

Si A et B sont finies et disjointes, alors $A \cup B$ est finie et $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$. Notation $A \sqcup B$. Réunion disjointe de n ensembles.

Dans un ensemble infini, il existe des parties finies de cardinal arbitrairement grand.

Si A et B ne sont pas disjointes, $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$.

d) Retour sur les injections et surjections

Si $E \subset F$, alors $E = F$ ssi $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$; preuve à l'aide de $F = E \sqcup (F \setminus E)$.

Si $f : E \to F$ est injective, elle est bijective ssi $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$. Si $f : E \to F$ est surjective, elle est bijective ssi $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ (preuve à l'aide d'une section).

2 Ensembles quotients, applications

a) Partitions, surjections et relations d'équivalence

Ensemble $\mathscr{C}_\sim$ des classes d'équivalences associées à une relation d'équivalence $\sim$ sur X. $\mathscr{C}_\sim$ est une partition de X. L'application $x \mapsto \mathrm{cl}(x)$ est une surjection de X sur $\mathscr{C}_\sim$. Constructions réciproques, à partir d'une surjection $X \to Y$ ou d'une partition de X.

Exemple déjà vu de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b) Théorème de Lagrange

Ordre d'un groupe $(G, \cdot)$. Ensemble G/H des classes à droite modulo un sous-groupe H. Ordre des classes : $|G| = |H|.\,\mathrm{Card}(G/H)$; l'ordre de H divise celui de G.

Sous-groupe $\langle g \rangle$ engendré par un élément $g \in G$. Ordre de g : $|\langle g \rangle| = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid g^k = 1_G\}$. L'ordre de g divise celui de G, d'où $g^{|G|} = 1_G$.

c) Applications

Petit théorème de Fermat : si p est premier et $p \not| x$, alors $x^{p-1} \equiv 1\ [p]$. En exercice : $x^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$.

Si $\mathbb{K}$ est un corps, ordre de $1_\mathbb{K}$ dans le groupe $(\mathbb{K}, +)$. Caractéristique (déjà vu).

3 Dénombrement

a) Produit cartésien, applications

Si E et F sont finis, alors $E \times F = \bigsqcup_{e \in E} (\{e\} \times F)$ donc $E \times F$ est fini et $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}\, E.\mathrm{Card}\, F$.

Par récurrence, $\mathrm{Card}(F^n) = (\mathrm{Card}\, F)^n$. On en déduit $\mathrm{Card}\, \mathscr{F}(E, F) = \mathrm{Card}(F^E) = (\mathrm{Card}\, F)^{\mathrm{Card}\, E}$.

b) Arrangements, permutations

Ensemble $\mathscr{A}_k(E)$ des k-arrangements de E, c'est-à-dire des k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E. Il est fini car contenu dans E^k, et :

$$\mathscr{A}_{k+1}(E) = \bigsqcup_{y \in E} [\mathscr{A}_k(E \setminus \{y\}) \times \{y\}] \text{ d'où, par récurrence, } \mathrm{Card}\, \mathscr{A}_k(E) = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Nombre d'injections de E dans F, nombre de bijections de E dans F.

c) Parties d'un ensemble fini

L'application $(x_1, \dots, x_k) \mapsto \{x_1, \dots, x_k\}$ est une surjection de $\mathscr{A}_k(E)$ sur $\mathscr{P}_k(E)$, donc $\mathscr{P}_k(E)$ est fini et $\mathrm{Card}\, \mathscr{P}_k(E) = \dfrac{1}{k!} \mathrm{Card}\, \mathscr{A}_k(E) = \dbinom{n}{k}$.

L'application $A \mapsto \chi_A$ (fonction caractéristique de A) est une bijection de $\mathscr{P}(E)$ sur $\mathscr{F}(E, \{0, 1\})$, donc $\mathscr{P}(E)$ est fini et $\mathrm{Card}\, \mathscr{P}(E) = 2^{\mathrm{Card}\, E}$.

Interprétations ensemblistes de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$.

Chapitre 17

Espaces vectoriels de dimension finie

Pas mal de hors-programme dans ce chapitre. Ces extensions ne seront pas exigibles des étudiants, en dehors des questions de cours en colles. Mais l'idée est de multiplier les points de vue sur les objets manipulés, dans le cadre même du cours.

Les matrices sont introduites de façon accessoire, pour préparer le terrain avant le chapitre qui leur est consacré.

La base duale est utilisée de façon importante, sous l'appellation «fonctions coordonnées». Le dernier paragraphe insiste sur l'utilisation des formes linéaires, en dimension finie ou infinie, pour construire des systèmes d'équations de sous-espaces vectoriels.

Pour l'étude de la dimension, le théorème de Steinitz (résultat non généralisable aux modules sur un anneau, donc fondamental ici) est démontré en premier. Ceci permet de donner ensuite une version très large du lemme de l'échange, qui traite d'un seul coup les bases d'un espace vectoriel de dimension finie et de tous ses sous-espaces vectoriels.

Le rang est traité rapidement dans le paragraphe 4, et approfondi dans le paragraphe 5.

1 Familles de vecteurs

a) Parties génératrices, familles génératrices

Application $\varphi_{\mathscr{X}} : \mathbb{K}^n \to E$ associée à une famille $\mathscr{X}$ de n vecteurs de E. Famille génératrice et surjectivité de $\varphi_{\mathscr{X}}$.

Notion de sous-famille, sur-famille. $A \subset B \;\Rightarrow\; \operatorname{vect}(A) \subset \operatorname{vect}(B)$. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

b) Relations de dépendance linéaire, familles libres

RDL, famille liée. Famille libre et injectivité de $\varphi_{\mathscr{X}}$. Interprétation pour des familles de 1, 2, 3 éléments : vecteurs colinéaires, coplanaires.

Toute sur-famille d'une famille liée est liée. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

La famille $\mathscr{X}$ est liée ssi l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

c) Bases et coordonnées

Trois propositions équivalentes : $\mathscr{X}$ est libre et génératrice ; $\varphi_{\mathscr{X}}$ est un isomorphisme ; existence et unicité des coordonnées de tout vecteur relativement à $\mathscr{X}$.

Bases canonique de $\mathbb{C}$ (sur $\mathbb{R}$), de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (qui est défini pour l'occasion).

d) Lien avec la somme et l'intersection de sous-espaces vectoriels

$\operatorname{vect}(A \cup B) = \operatorname{vect} A + \operatorname{vect} B$. La famille $\mathscr{X} \cup \mathscr{Y}$ est libre ssi $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ le sont et $\operatorname{vect} \mathscr{X} \cap \operatorname{vect} \mathscr{Y} = \{0\}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathscr{X} \cup \mathscr{Y}$ soit une base.

Cas particulier où $\mathscr{Y} = (y)$: $\mathscr{X} \cup (y)$ est libre ssi $\mathscr{X}$ est libre et $y \notin \operatorname{vect} \mathscr{X}$. Preuve par récurrence de la liberté d'une famille. Exemple des familles de polynômes de degrés échelonnés.

e) Lien avec l'injectivité et la surjectivité des applications linéaires

Si u est linéaire, alors $u(\operatorname{vect} A) = \operatorname{vect} u(A)$. En particulier, si A est génératrice, alors $\operatorname{im} u = \operatorname{vect} u(A)$, et donc u est surjective ssi $u(A)$ est une partie génératrice.

L'image d'une famille liée est une famille liée ; si l'image de $\mathscr{X}$ est libre, alors $\mathscr{X}$ est libre. Si u est injective, l'image d'une famille libre est libre. Si l'image d'une base est libre, alors u est injective. Exercice : $u(\mathscr{X})$ libre ssi $\mathscr{X}$ libre et $\operatorname{vect} \mathscr{X} \cup \ker u = \{0\}$.

L'application linéaire u est un isomorphisme ssi l'image d'une base est une base.

2 Bases, coordonnées, matrices

a) Fonctions coordonnées, base duale

Matrice d'un vecteur dans une base $\mathscr{E}$.

La famille $\mathscr{E}^*$ des fonctions coordonnées dans une base $\mathscr{E} = (e_1, \dots)$ de E est une base de E^*. Si $f \in E^*$, sa matrice de coordonnées dans la base duale $\mathscr{E}^*$ est $\begin{bmatrix} f(e_1) \\ \vdots \end{bmatrix}$.

b) Image d'une base par une application linéaire, matrice d'une application linéaire

Si $\mathscr{E}$ est une base de E et $\mathscr{Y}$ une famille de F de même cardinal, il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ telle que $u(\mathscr{E}) = \mathscr{Y}$. Injectivité, surjectivité, bijectivité de u. Cas $E = \mathbb{K}^n$ et $u = \varphi_{\mathscr{Y}}$.

Matrice de u dans des bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$. Pour une forme linéaire f, matrices $\operatorname{mat}_{\mathscr{E},(1)}(f)$ et $\operatorname{mat}_{\mathscr{E}^*}(f)$.

3 Dimension finie

L'espace E est de dimension finie s'il admet une partie génératrice finie. Sinon, dimension infinie.

a) Théorème de Steinitz

Si $\mathscr{E}$ est une famille libre de cardinal n et $\mathscr{F}$ une famille génératrice de cardinal p, alors $n \leqslant p$. Preuve : on montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que, si $\mathscr{F}$ est une famille de p éléments, et $\mathscr{E}$ une famille de $p+1$ éléments de $\operatorname{vect}(\mathscr{F})$, alors $\mathscr{E}$ est liée.

Définition de la dimension, sous réserve d'existence d'au moins une base.

b) Existence de bases en dimension finie

Lemme de l'échange : si E est de dimension finie, A une partie génératrice de E et $\mathscr{X}$ une famille libre d'élément de $\operatorname{vect}(A)$, alors il existe une famille $\mathscr{Y}$ d'éléments de A telle que $\mathscr{X} \cup \mathscr{Y}$ soit une base de $\operatorname{vect}(A)$.

On en déduit : l'existence de bases en dimension finie, le théorème de la base incomplète, le théorème d'extraction de base. Condition sur le cardinal d'une famille libre ou génératrice pour être une base.

Dans un espace de dimension infinie, il existe des familles libre de cardinal arbitrairement grand.

c) Sous-espaces vectoriels et dimension finie

Si E est de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie inférieure ou égale à celle de E. De plus $\dim F = \dim E \;\Rightarrow\; F = E$.

Existence de supplémentaires en dimension finie. Bases adaptées, dimension de deux supplémentaires.

d) Applications linéaires et dimension finie

E est de dimension $n \in \mathbb{N}$ ssi il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Deux espaces isomorphes ont même dimension.

Si $u : E \to F$ est injective, alors $\dim E \leqslant \dim F$. Si de plus $\dim E = \dim F < +\infty$, alors u est un isomorphisme. Si $u : E \to F$ est surjective, alors $\dim F \leqslant \dim E$. Si de plus $\dim F = \dim E < +\infty$, alors u est un isomorphisme.

e) Exemples

Dimension de $\mathbb{C}$ (sur $\mathbb{R}$), de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension et base de $E \times F$, $\mathscr{L}(E, F)$, E^*.

4 Rang

a) Rang d'une famille de vecteurs

Définition de $\text{rang}(\mathscr{X})$, où $\mathscr{X}$ est une famille de n vecteurs de E. $\text{rang}(\mathscr{X}) \leqslant \dim E$, avec égalité ssi $\mathscr{X}$ est génératrice. $\text{rang}(\mathscr{X}) \leqslant n$, avec égalité ssi $\mathscr{X}$ est libre.

b) Rang d'une application linéaire, théorème du rang

Définition pour $u : E \to F$. Cas où le rang est fini, interprétation de $\text{rang}\, u = \dim E < +\infty$, de $\text{rang}\, u = \text{rang}\, F < +\infty$. Si $\mathscr{X}$ est une partie génératrice de E, $\text{rang}\, u(\mathscr{X}) = \text{rang}\, u$. En particulier, $\text{rang}\, \varphi_{\mathscr{X}} = \text{rang}(\mathscr{X})$.

Si $\dim E < +\infty$, alors $\dim E = \text{rang}\, u + \dim(\ker u)$.

c) Formule de Grassmann

Si F et G sont de dimensions finies dans E quelconque, alors $F + G$ est de dimension finie et :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

5 Codimension, hyperplans

a) Codimension

F est de codimension finie dans E s'il admet un supplémentaire de dimension finie. Tous les supplémentaires de F sont isomorphes donc de même dimension, notée $\text{codim}_E(F)$. Si E est de dimension finie, $\text{codim}_E(F) = \dim E - \dim F$. Exercice : $\text{codim}_E(F \cap G) = \text{codim}_E(F) + \text{codim}_E(G) - \text{codim}_E(F + G)$.

Si $u : E \to F$ est de rang fini, alors $\ker u$ est de codimension finie égale au rang de u.

b) Formes linéaires et hyperplans

Définition : H est un hyperplan de E ssi $\text{codim}_E(H) = 1$. Théorème : H est un hyperplan de E ssi c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle, qui est alors non nulle à coefficient multiplicatif près. Si H est un hyperplan de E et $a \in E$, alors $\text{vect}\{a\}$ est un supplémentaire de H ssi $a \notin H$.

c) Sous-espace défini par un système d'équations

Soit $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille de formes linéaires sur E, $\psi_{\mathscr{F}} : E \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto (f_1(x), \ldots)$, et $F = \bigcap_i \ker f_i$. Ainsi $F = \ker \varphi_{\mathscr{F}}$.

Si (S) est le système $\left\{ \begin{array}{c} f_1(x) = b_1 \\ \ldots \end{array} \right.$, on pose $\text{rang}(S) = \text{rang}(H) = \text{rang}\, \mathscr{F}$. L'ensemble A des solutions est l'intersection de n hyperplans affines.

Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\psi_{\mathscr{F}}$ est surjective et donc $\text{codim}_E(F) = n$. Dans le cas général, $\text{codim}_E(F) = \text{rang}\, \mathscr{F} = \text{rang}(S)$, et donc $\text{rang}\, \psi_{\mathscr{F}} = \text{rang}\, \mathscr{F}$.

Systèmes de Cramer.

Chapitre 18

Calcul matriciel

On se place sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

Le plan adopté ici retarde volontairement l'étude des matrices carrées et donc des matrices inversibles et des formules de changement de base, pour se concentrer d'abord : d'une part, sur l'équivalence de catégories entre matrices et applications linéaires, et d'autre part sur les multiples points de vue qui permettent de comprendre l'objet "matrice". Ainsi le produit matriciel n'est pas envisagé, dans un premier temps, comme une loi de composition interne.

Ce choix, s'il permet d'attendre que les élèves aient bien compris le calcul matriciel avant d'aborder les points plus techniques sur le changement de base, oblige à faire référence à un résultat difficile sur la codimension pour montrer que rang ${}^tA = \operatorname{rang} A$. Un autre point de vue possible, dans le même esprit, serait d'approfondir la notion d'application linéaire transposée (hors-programme, comme d'ailleurs la codimension).

Enfin, on mène une réflexion sur la notion de «base adaptée», à la fois pour montrer que les applications linéaires (entre deux espaces différents) sont des objets très simples, caractérisés par leur rang, et pour préparer le terrain à la réduction des endomorphismes, étudiée en deuxième année.

1 Opérations sur les matrices

a) Produit matriciel

Calcul de $\operatorname{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{G}}(v \circ u)$ en fonction de $\operatorname{mat}_{\mathscr{F},\mathscr{G}}(v)$ et $\operatorname{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$. Définition du produit matriciel, disposition des calculs. Calcul en classe de nombreux exemples de produits matriciels : tailles variées, non-commutativité, non-intégrité, $E_{i,j}E_{j',k} = \delta_{j,j'}E_{i,k}$.

Application $u_A : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée à $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Noyau, image, rang de A. Système linéaire associé à A (avec ou sans second membre), application à la recherche du noyau et de l'image.

b) Propriétés algébriques du produit matriciel

Bilinéarité, associativité, élément neutre pour des matrices rectangulaires.

Application $v_A : \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \mapsto AX$, lien avec u_A.

c) Matrices d'une famille de vecteurs

Définition. Dans des bases convenables, $\operatorname{mat} u(\mathscr{X}) = \operatorname{mat}(u).\operatorname{mat}(\mathscr{X})$. Matrice de l'application $\varphi_{\mathscr{X}} : \mathbb{K}^p \to E$.

Famille des colonnes de A et application v_A. Nouvelle interprétation de l'image et du noyau de A, du système associé à A, en termes de combinaisons linéaires des colonnes

d) Transposition

Définition, compatibilité (en inversant l'ordre !) avec le produit matriciel. La transposition définit un isomorphisme linéaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Colonnes de A et lignes de ${}^tA$.

e) Matrice d'une famille de formes linéaires

En notant $\mathscr{E}*$ la base duale de $\mathscr{E}$, et $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de formes linéaires sur E, matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{E}^*$. Sa transposée est la matrice dans la base $\mathscr{E}$ (au départ) et la base canonique (à l'arrivée) de l'application $\psi_{\mathscr{F}} : E \to \mathbb{K}^n,\ x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

2 Rang d'une matrice

a) Rang de la famille des colonnes

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} v_A = \operatorname{rang}(C_1, \dots, C_p)$. Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire. Preuves illustrées par des diagrammes commutatifs faisant intervenir, pour un espace E, l'isomorphisme $\mathbb{K}^n \to E$ associé à une base de E.

b) Rang de la transposée

$\operatorname{rang} {}^tA = \operatorname{rang} A$ (car le rang de l'application $\psi : E \to \mathbb{K}^n$ associée à une famille de formes linéaires $(f_1, \dots, f_n)$ est égal au rang de la famille $(f_1, \dots, f_n)$ dans E^*).

c) Rang de la famille des lignes

Rang d'un système linéaire et dimension de l'ensemble des solutions.

3 Matrices carrées

a) L'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices inversibles

$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \perp)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, non commutative et non-intègre. On dit qu'une matrice est inversible si elle est carrée et inversible dans l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ correspondante. C'est alors la matrice d'un isomorphisme ; la matrice d'un isomorphisme est d'ailleurs toujours carrée. Si A est carrée, il suffit qu'elle soit inversible à gauche ou à droite pour l'être des deux côtés. Inverse de la transposée. Rang des matrices inversibles.

b) Pratique de l'inversion de matrice

Matrices inversibles et systèmes de Cramer. Calcul de l'inverse et résolution du système.

c) Matrices de passage et formules de changement de base

Caractérisation des bases par le fait que leur matrices est inversibles (évident grâce au rang). Matrices de passage, propriétés algébriques. Formules de changement de base(s).

Matrices semblables, matrices équivalentes.

d) Nouvelle caractérisation du rang

Dans des bases adaptées, la matrice d'une application linéaire est du type $J_{n,p,r}$. Une matrice est de rang r si et seulemnt si elle est équivalente à $J_{n,p,r}$.

4 Matrices carrées remarquables

a) Choix de bases adaptées à certains endomorphismes

Projecteurs, symétries, affinités. Endomorphismes stabilisant un sous-espace vectoriel, deux sous-espaces supplémentaires. Matrices triangulaires par blocs.

b) Matrices triangulaires ou diagonales

Endomorphismes stabilisant un drapeau. Stabilité des matrices triangulaires par combinaison linéaire et produit, par passage à l'inverse. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité. Dimensions, bases.

c) Matrices symétriques ou antisymétriques

$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. Dimensions, bases (exercice).

Chapitre 19

Groupe symétrique et applications

1 Groupe symétrique

Groupe symétrique $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ pour la composition, d'ordre $n!$.

a) Orbites d'une permutation

Si $G \subset \mathfrak{S}(E)$, relation d'équivalence sur E : $x \sim_G y \Rightarrow \exists\, \sigma \in G,\ y = \sigma(x)$. Les classes d'équivalences sont les orbites de G dans E. Cas particulier où $G = \langle \sigma \rangle$. Une permutation est appelée un cycle si elle a une seule orbite non triviale (au moins deux éléments). Support d'une permutation.

Les orbites non triviales $O_1, \ldots, O_k$ de σ sont stables par σ. En notant $c_1, \ldots, c_k$ les cycles associés, $\sigma = c_1 \circ \ldots \circ c_k$ (décomposition unique à l'ordre près, les cycles étant à supports non vides et disjoints).

b) Cycles et transpositions

Si c est un cycle, $x \in \mathrm{Supp}(c)$, et $k \in \mathbb{Z}$, $c^k(x) = x \iff c^k = \mathrm{Id}_E$, d'où $|c| = \mathrm{Card}(\mathrm{Supp}(c))$. Ecriture d'un cycle d'ordre p comme un p-uplet.

Décompositions d'un cycle en produit de transpositions (cycles d'ordre 2). Décomposition (non unique) d'une permutation en produit de transpositions (en nombre $K \leqslant \mathrm{Card}\, E - 1$).

c) Signature d'une permutation

Nombre *total* d'orbites $N(\sigma)$ d'une permutation σ. Signature $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\mathrm{Card}\, E - N(\sigma)}$. Cette définition est bien plus élégante que celle par le nombre d'inversion, car elle est intrinsèque : $\mathrm{Card}\, E - N(\sigma)$ mesure le défaut d'injectivité de la projection de E sur l'ensemble quotient E/σ.

Si τ est une transposition, $N(\sigma \circ \tau) = N(\sigma) \pm 1$ (on distingue selon que le support de τ rencontre une ou deux orbites de σ), donc $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -\varepsilon(\sigma)$.

Si σ est la composée de K transposition, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^K$. Pour toute permutation σ', $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Signature d'un cycle.

Morphisme de groupes $\varepsilon : \mathfrak{S}(E) \to \{-1, +1\}$. Groupe alterné $\mathfrak{A}_n$, de cardinal $\dfrac{n!}{2}$.

2 Prolongement : actions de groupes

Définition, nombreux exemples.

Mène à un DM facultatif sur les sous-groupes de Sylow.

Chapitre 20

Polynômes

A lire : Edwards H. – *Galois Theory*, Springer, 1984.

Poly 20.1 : Réduction en éléments simples sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque (en particulier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

On fixe pour tout le chapitre un corps $\mathbb{K}$ quelconque. Lorsqu'un résultat fait intervenir la division par un entier (typiquement, $n!$), on supposera que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ (ou, plus généralement, est de caractéritique nulle). Dans le cadre du programme, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La notion d'idéal est hors programme. Elle est néanmoins utilisée comme outil de démonstration pour le théorème de Bézout, afin de souligner la similarité des anneaux $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{K}[X]$. On étudie également l'irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$, pour montrer des méthodes qui ne font pas intervenir de corps algébriquement clos.

1 Multiples et diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$

a) Divisibilité

Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls. Polynômes associés.

Polynômes irréductibles. Polynômes premiers entre eux. Exemples de polynômes irréductible : polynômes de degré 1, ou de degré 2 avec discriminant < 0 (sur $\mathbb{R}$). Exemples de polynômes non irréductibles : polynômes de degré $\geqslant 2$ admettant au moins une racine.

b) Idéaux de $\mathbb{K}[X]$

Définition. Exemple : idéal $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ engendré par une famille de polynômes.

c) Division euclidienne des polynômes

Existence et unicité du quotient et du reste. Algorithme. Exemple : calcul de la DE de $X^5 - X^4 + X^2 + 5X - 3$ par $X^2 - 2X + 3$).

Application : tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont principaux (car stables par division euclidienne).

d) PGCD, PPCM

Définition du PGCD (du PPCM) de A et B comme le diviseur (multiple) commun unitaire et de degré maximal (minimal).

Théorème de Bézout : le PGCD (le PPCM) est l'unique générateur unitaire de l'idéal engendré par A et B (de l'intersection des idéaux engendrés par A et B). Lemme de Gauss.

e) Algorithme d'Euclide

Si $A = BQ + R$, alors $\langle A, B \rangle = \langle B, R \rangle$. Calcul explicite du PGCD et des coefficients de Bézout. Exemple : PGCD de $A = 2X^5 + X^2 - X$ et $B = X^3 - X^2 + 2$ (on trouve $D = X + 1$).

2 Racines d'un polynôme

a) Multiplicité d'une racine

Définition de $m_\alpha(P)$. $P = (X - \alpha)^m Q$, avec $Q(\alpha) \neq 0$.

Division euclidienne par $(X - \alpha)^n$; caractérisation de la multiplicité par les dérivées.

$m_\alpha(PQ) = m_\alpha(P) + m_\alpha(Q)$.

b) Début de factorisation à l'aide des racines

Degré et nombre de racines. Polynômes scindés.

TD : interpolation polynomiale.

c) Fonctions symétriques élémentaires et polynômes scindés

Relations entre coefficients et racines.

3 Factorisation des polynômes

a) Problème général

Existence/unicité de la factorisation en produit d'irréductibles. La suite consistera donc à déterminer les polynômes irréductibles sur $\mathbb{K}$.

Application au calcul du PGCD et du PPCM. $(A \wedge B)(A \vee B) \propto AB$.

b) Polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème de D'Alembert-Gauss : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$.

Culture : clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, d'un corps quelconque.

Exemple de $X^n - 1$. Souligner que la factorisation explicite est généralement impossible.

c) Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Racines complexes des polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

Si A et B sont à coefficients réels, alors $A \mid B$ a le même sens dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

d) Polynômes irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$

$\mathbb{Z}[X]$ vu comme sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$. Éléments inversibles.

Contenu d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ (PGCD des coefficients), prolongement à $\mathbb{Q}[X]$. Le contenu d'un produit est le produit des contenus (on se ramène à P et Q de contenu 1, puis on raisonne par l'absurde en utilisant, pour P premier, la projection $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_p[X]$).

Conséquence : $P \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ ssi il est de contenu 1 et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

4 Fractions rationnelles

a) Définition

Relation d'équivalence sur $E = \{(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \mid Q \neq 0\}$.

Existence et unicité du représentant irréductible unitaire

b) Le corps $(\mathbb{K}(X), +, \times, \perp)$

Plongement de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$: $P/Q = P.Q^{-1}$. Dérivation.

c) Degré, partie polynomiale

Degré d'une somme, d'un produit (sans démonstration).

d) Pôles et racines

Multiplicité en $\alpha \in \mathbb{K}$ d'une fraction rationnelle $F = P/Q$: par définition, $m_\alpha(F) = m_\alpha(P) - m_\alpha(Q)$.

Pôles d'une fraction rationnelle, domaine de définition de la fonction rationnelle associée. Multiplicité d'un pôle. Pôles de la dérivée. Racines.

e) Partie polaire relative à un pôle

Formule de Taylor (si $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$) : si α n'est pas un pôle de F, alors $F = F(\alpha) + \ldots + \frac{(X-\alpha)^n}{n!} F^{(n)}(\alpha) + (X-\alpha)^{n+1} G$, où G est une fraction rationnelle dont α n'est pas pôle.

Application : existence/unicité de la partie polaire de $\frac{F}{(X-\alpha)^{n+1}}$ relativement à α (l'intérêt est qu'on obtient directement une méthode de calcul efficace).

f) Réduction en éléments simples

Fait en cours quand le dénominateur est scindé. Généralisation : voir poly.

Chapitre 21

Intégration, primitives

Poly 21.1 : Fonctions continues par morceaux

Poly 21.2 : Calcul de primitives (fonctions rationnelles, règles de Bioche *etc.*)

Ce chapitre rassemble deux chapitres qui apparaissent séparément dans le programme : «Intégration sur un segment» et «Intégration et dérivation». Le fait de les ramasser en un seul permet à mon sens de passer moins de temps sur le cours et de ce concentrer sur les exercices. Par ailleurs, les méthodes d'approximation des intégrales ont été renvoyées à un chapitre ultérieur.

Les points purement techniques sont vus sous forme de polycopiés : d'abord le vocabulaire concernant les fonctions en escalier et continues par morceaux, qui sera ensuite réutilisé tout au long des paragraphes 2 et 3 ; ensuite le calcul explicite d'intégrales, étant entendu que toutes les méthodes introduites dans le polycopié seront pratiquées en classe. C'est aussi l'occasion de faire comprendre aux élèves comment travailler utilement sur un polycopié...

1 Fonctions continues par morceaux

Définitions, propriétés à partir du poly : subdivisions d'un segment, fonctions en escalier.

Théorème d'approximation des fonctions continues par morceaux par les fonctions en escalier, démontré en classe.

2 Intégrale des fonctions en escalier

a) Définition

Intégrale de f définie en faisant référence à une subdivision adaptée. En fait, elle n'en dépend pas.

b) Croissance

On peut changer les valeurs en un nombre fini de points sans changer l'intégrale.

c) Linéarité

Existence d'une subdivision adaptée à la fois à deux fonctions f et g.

d) Relation de Chasles

Notée comme une additivité sur les intervalles.

3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

a) Définition

Idée : toute fonction I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et lipschitzienne sur une partie X dense dans un espace métrique E se prolonge de façon unique en une fonction lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$.

b) Croissance

Condition pour que l'intégrale d'une fonction positive et continue soit nulle.

c) Linéarité

Essayer de raisonner par encadrement à ε près plutôt que par passage à la borne inférieure/supérieure. Extension de l'intégrale aux fonctions à valeurs complexes.

d) Minorer, majorer, encadrer des intégrales

La base de l'analyse, d'après le programme ! Ne pas oublier le cas des valeurs complexes.

e) Relation de Chasles, invariance par translation

On démontre l'additivité sur les intervalles avec la notation $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, puis on introduit $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Attention à l'ordre des bornes pour utiliser la croissance de l'intégrale.

4 Intégration et dérivation

a) Etude de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$

Existence de primitives pour les fonctions continues, application au calcul d'intégrales.

b) Intégration par parties

Primitives de ln, arctan *etc.*

c) Egalité de Taylor avec reste intégral

Inégalité de Taylor-Lagrange. Application : $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

d) Changement de variable

Exemples : $\displaystyle\int_0^\alpha \tan\theta\, d\theta = -\ln|\cos\alpha|$; $\displaystyle\int_a^b (x-a)^n(b-x)^p dx = \frac{(b-a)^{n+p+1}}{(n+p+1)\binom{n+p}{p}}$.

Application (théorème de Nair) : pour tout $n \geqslant 7$, $PPCM(1,\ldots,n) \geqslant 2^n$ (*cf.* Tenenbaum, Théorie analytique et probabiliste des nombres).

5 Calcul pratique de primitives ou d'intégrales

TD à partir du polycopié.

Chapitre 22

Outils supplémentaires pour l'analyse

J'ai placé dans ce chapitre des résultats liés à la dérivation ou à l'intégration pour alléger un peu les chapitres correspondant. C'est donc un chapitre centré essentiellement autour des méthodes de majoration, minoration, approximation qui sont un point focal du programme d'analyse de MPSI.

La construction de la formule de Stirling est une très bonne illustration de ces méthodes. Il m'a semblé naturel, dans cette perspective, de donner aux élèves quelques notions sur les séries à termes positifs (hors programme), qui seront approfondies en deuxième année.

1 Fonctions convexes

a) Définition, applications

Définition par l'inégalité de convexité. Généralisation au barycentre de n points.

Quelques exemples classiques d'inégalités de convexité : comparaison des moyennes harmonique, géométrique, arithmétique ; maximum de l'entropie.

b) Convexité et taux d'accroissement

Croissance du taux d'accroissement.

Cas d'égalité dans les inégalités de convexité, convexité stricte.

c) Convexité et dérivation

Croissance de la dérivée. Positivité de la dérivée seconde. Caractérisation de la convexité stricte.

d) Méthode de Newton

Normalement déjà étudiée en TD. C'est l'occasion de rappeler le principe.

2 Méthodes d'approximation des intégrales

a) Sommes de Riemann, ou méthode des rectangles

Convergence pour une fonction continue (via la continuité uniforme). Convergence en $O(\frac{1}{n})$ pour une fonction lipschitzienne, ou de classe $\mathscr{C}^1$.

b) Méthode des trapèzes

Convergence en $O(\frac{1}{n^2})$ pour une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Mesure de l'erreur de la méthode des rectangles à gauche ou à droite.

c) Méthodes par interpolation

Interpolation des valeurs, voire des dérivées (fonctions splines). L'interpolation de k valeurs par pas d'intégration mène à une convergence en $O(\frac{1}{n^k})$ pour une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ (mais la constante peut être grande).

3 Séries à termes positifs

a) Définition

Convergence, divergence d'une série ; somme. Grossière divergence. Exemple des séries télescopiques. Définition des restes partiels d'une série convergente.

Convergence d'une combinaison linéaire de séries ; linéarité de la somme.

b) Séries à termes positifs

Croissance de la suite des sommes partielles. La série converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

Théorème de comparaison des séries à termes positifs. Enoncé final : si u et v sont à termes positifs à partir d'un certain rang, et si $u = O(v)$, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$ (et la divergence de $\sum u_n$ entraîne celle de $\sum v_n$).

Exemples : convergence de $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, puis de $\sum \frac{1}{n^2}$. Généralisation aux séries de Riemann ?

Eventuellement : application à l'absolue convergence d'une série à termes réels (vue comme la différence de deux séries à termes positifs).

c) Approximation d'une somme par une intégrale

Comparaison de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1)$ et $v_n = \displaystyle\int_1^n \ln t\, dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln t\, dt$.

On calcule $u_n - v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k$, où $\alpha_k \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2k}$. Comparaison de $u_n - v_n$ et $w_n = \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{2t} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{2t}$.

On calcule $u_n - v_n - w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k$, où $\beta_k \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12k^2}$, d'où la convergence de la série.

Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = n \ln n - n + \dfrac{1}{2} \ln n + \lambda + \underset{n\to\infty}{o}(1)$, d'où $n! \underset{n\to\infty}{\sim} e^{\lambda} \sqrt{n} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

d) Intégrales de Wallis et formule de Stirling

$W_n = \displaystyle\int_0^1 (\cos t)^n dt$. Intégration par parties : $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. Décroissance, $W_{n+1} \sim W_n$.

La suite des $(n+1)W_n W_{n+1}$ est constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$, d'où $W_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Expression factorielle de W_{2n}, d'où $e^{\lambda} = \sqrt{2\pi}$: formule de Stirling.

4 Valeurs approchées de réels

En exercice : approximation de π, $\sqrt{2}$...

Poly 22.1 : Eventuellement : mémo des outils classiques d'approximation

Chapitre 23

Manipulations élémentaires sur les matrices, déterminant

L'accent est mis sur le calcul pratique du déterminant (manipulations élémentaire, déterminants triangulaires par blocs, développements par rapport à des rangées) plutôt que sur les aspects théoriques et la formule faisant intervenir la signature.

1 Manipulations élémentaires sur les rangées d'une matrice

a) Principe général

Les colonnes de AB sont des combinaisons linéaires des colonnes de A ; les lignes de AB sont des combinaisons linéaires des lignes de B.

b) Définitions, notations

Les trois types de manipulations élémentaires (dilatation, échange, transvection) et les matrices associées. Inversibilitéde ces matrices.

c) Application au calcul du rang

Les manipulations élémentaires conservent le rang. Exemple de calcul du rang (sans méthode particulière).

d) Algorithme du pivôt de Gauss

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\operatorname{rang}(A) = r$, il existe des matrices de manipulations élémentaires $M_1, \dots, M_k$ dans $GL_n(\mathbb{K})$ et $N_1, \dots, N_l$ dans $GL_p(\mathbb{K})$ telles que $M_k \dots M_1 A N_1 \dots N_l = J_{n,p,r}$.

Etude sur un exemple : présentation en colonnes pour déterminer P et Q inversibles telles que $PAQ = J_{n,p,r}$. Si $n = p = r$, alors A est inversible et $A^{-1} = QP$.

2 Applications multilinéaires

a) Applications bilinéaires

Définition. Espace vectoriel $\mathscr{B}\mathrm{il}(E \times F, G)$. Exemple du produit tensoriel de deux formes linéaires. Application à la construction d'une base de $\mathscr{B}\mathrm{il}(E^2, \mathbb{K})$.

Caractère symétrique, antisymétrique, alterné. Sur un corps tel que $2 \neq 0$, les deux dernières propriétés sont équivalentes. Effet d'une manipulation élémentaire sur les arguments dans le cas alterné.

b) Formes n-linéaires alternées

Définition (sur un espace vectoriel de dimension quelconque). Effet d'une manipulation élémentaire sur les arguments. Effet d'une permutation des arguments. L'image d'une famille liée est nulle.

c) Déterminants

On appelle déterminant toute forme n-linéaire alternée non nulle sur E de dimension n. Espace vectoriel $\Lambda^n(E)$.

Si $\mathscr{E}$ est une base de E, $\mathscr{X}$ une famille quelconque, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{X})$ et $\varphi \in \Lambda^n(E)$, calcul de $\varphi(\mathscr{X})$ en fonction de $\varphi(\mathscr{E})$ et des coefficients de A.

$\dim \Lambda^n(E) = 1$. Existence et unicité de $\det_{\mathscr{E}}$.

3 Déterminant et algèbre linéaire

a) Changement de base

Formule de changement de base. Caractérisation des bases par le déterminant.

b) Déterminant d'un endomorphisme linéaire

Définition (deux points de vue possibles). Déterminant d'un composé d'endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.

c) Orientations d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Bases de même orientation, d'orientations opposées. On définit ainsi une relation d'équivalence admettant deux classes d'équivalence. Choix d'une orientation : bases directes et indirectes.

Automorphismes directs et indirects (indépendamment du choix d'une orientation). Transformations affines directes et indirectes.

4 Déterminant d'une matrice carrée

a) Définition

$\det A = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$.

$\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{X}) = \det(\mathrm{mat}_{\mathscr{E}}\,\mathscr{X})$; $\det(u) = \det(\mathrm{mat}_{\mathscr{E}}\,u)$.

Caractérisation des matrices inversibles. Déterminant d'un produit de matrices.

Déterminant de la transposée. Forme n-linéaire alternée des colonnes, des lignes. Effet d'une manipulation élémentaire sur le déterminant d'une matrice.

Exemples de calculs par manipulations élémentaires. Formules de Sarrus.

b) Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Déterminant d'une matrice triangulaire, puis triangulaire par blocs (on se contente de deux blocs).

c) Développement par rapport à une rangée

On se ramène à une somme de déterminants triangulaires par blocs.

d) Comatrice

$A\,{}^t\mathrm{Com}(\mathrm{A}) = {}^t\mathrm{Com}(A).A = \det A.I_n$. Application au calcul de l'inverse.

Exercice : rang de la comatrice de A en fonction de celui de A.

5 Application à la résolution des systèmes linéaires

a) Résolution par la méthode du pivôt

Un exemple.

b) Formules de Cramer

Lien avec la comatrice ?

Chapitre 24

Espaces vectoriels euclidiens

Le programme est succinct sur ce chapitre, l'objectif étant la taxinomie des automorphismes orthogonaux en dimensions 2 et 3. Dans ce plan, on retarde autant que possible l'introduction des espaces euclidiens, afin d'énoncer les résultats sur la projection orthogonale et le supplémentaire orthogonale dans un cadre un peu plus général, qui sera utile en deuxième année.

On prépare au passage le terrain pour l'étude des transformations affines.

1 Produit scalaire, orthogonalité

a) Produit scalaire, norme euclidienne

Définition. Espace préhilbertien, espace euclidien. Formules de polarisation, égalité du parallélogramme. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire. Exemples.

b) Orthogonalité

Angle non orienté entre deux vecteurs. Vecteurs orthogonaux, unitaires. Familles orthogonales, orthonormales. Liberté de ces familles.

Sous-espaces vectoriels orthogonaux, intersection. Orthogonal d'une partie, d'un sous-espace ; $\text{vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$. Pour F un sev, $F^{\perp\perp} = F \iff E = F \oplus F^{\perp}$.

c) Calcul dans une famille orthogonale

Si $\mathscr{F}$ est une famille orthogonale et $(x, y) \in (\text{vect}\,\mathscr{F})^2$, coordonnées de x dans $\mathscr{F}$, produit scalaire $\langle x, y\rangle$, norme de x en fonction de ces coordonnées.

Projection orthogonale sur $\text{vect}\,\mathscr{F}$.

d) Orthogonalité et dimension finie

Si F admet une base orthogonale, alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

Par récurrence : existence d'une base orthogonale/orthonormale, et donc d'un supplémentaire orthogonal, pour tout sous-espace de dimension finie.

2 Espaces vectoriels euclidiens

a) Propriétés spécifiques

Existence de supplémentaires orthogonaux, bases adaptées. Théorème de la base orthogonale/orthonormale incomplète.

b) Procédé de Gram-Schmidt

Algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, justifié par le travail sur la projection orthogonale au paragraphe précédent. Théorème d'existence/unicité associé. Exemple(s).

c) Formes linéaires et produit scalaire

Isomorphisme entre E et son dual associé au produit scalaire. Vecteur normaux à un hyperplan.

3 Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

a) Automorphimes orthogonaux

Définition, caractérisation (linéarité + conservation de l'orthonormalité d'une base, linéarité + conservation de la norme).

Exemple : symétries orthogonales (exemple des fonctions paires/impaires)

b) Isométries, similitudes

Nouvelles caractérisations des automorphismes orthogonaux, sans hypothèse de linéarité (conservation du produit scalaire, conservation de la distance et de l'origine).

Application : les isométries sont des applications affines bijectives. Idem pour les similitudes. Groupes $\mathrm{Is}(E)$, $\mathscr{S}(E)$

c) Matrices orthogonales

Matrice de Gram G d'une famille $\mathscr{X}$ de vecteurs. Si A est la matrice de $\mathscr{X}$ dans une BON, $G = {}^tA.A$. La famille est orthonormale ssi G est l'identité.

Définition des matrices orthogonales. Nombreuses caractérisations intrinsèques, lien avec les automorphismes orthogonaux, les bases ortonormales.

d) Déterminant des matrices orthogonales, applications

Déterminant des automorphismes orthogonaux. Groupe $SO(E)$. Déplacements, antidéplacements.

Produit mixte noté Det, produit vectoriel.

Chapitre 25

Fonctions de plusieurs variables

Ce chapitre regroupe toutes les notions au programme relatives aux fonctions de plusieurs variables : continuité, différentiation, intégration. On commence par justifier l'insuffisance des fonctions d'une variable (fonctions partielles) en montrant que la continuité «partielle» n'est pas conservée par composition.

Les paragraphes sur la continuité et le calcul différentiel doivent être illustrés par de nombreux exemples et dessins (Maple ?), en particulier la preuve de l'existence du DL_1 pour les fonctions $\mathscr{C}^1$.

L'intégrale multiple est traitée rapidement. En pratique, les calculs d'aire utiliseront plutôt la formule de Green-Riemann.

1 Les fonctions partielles, et leur insuffisance

a) Continuité partielle, dérivées partielles

Définition des fonctions partielle, dérivées partielles, dérivée selon un vecteur. Gradient.

b) Exemples

Continuité des fonctions $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $g : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Recherche d'extremums de la fonction $h : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

c) Compléments

Fonctions composantes. Matrice jacobienne, matrice hessienne.

2 Limites, continuité

a) Normes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Définition. Exemples en dimension finie et infinie. Normes équivalentes. Equivalence des normes N_1, N_2, N_∞ sur $\mathbb{R}^n$. Représentation des boules associées.

b) Eléments de topologie

Voisinages. Points intérieurs, points adhérents à une partie. Parties ouvertes, fermées.

c) Application : notion d'extremum local

Si f admet un extremum local en un point, ses fonctions partielles admettent des extrema aux points correspondants. Conséquence sur les dérivées partielles.

d) Limites, continuité

Limite d'une fonction en un point adhérent à son ensemble de définition. Continuité.

Théorèmes opératoires (somme, éventuellement produit). Composition de fonctions continues.

Fonctions lipschitziennes. Continuité des fonctions composantes, de la norme.

e) En pratique

Preuve de continuité par les théorèmes opératoires.

Pour les fonctions de deux variables : étude en coordonnées polaires au voisinage de $(0, 0)$.

3 Calcul différentiel

a) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition. Existence d'un développement limité à l'ordre 1 en un point de continuité (globale) des fonctions dérivées partielles. Notion de fonction différentiable (*i.e.* admettant un DL_1) en un point.

b) Théorèmes opératoires

Somme, produit éventuelle. Composition de fonctions différentiables : écriture à l'aide des matrices jacobiennes.

c) Dérivées partielles successives

Théorème de Schwartz (avec ou sans démonstration ?).

4 Quelques exemples d'équations aux dérivées partielles

a) Equations du premier ordre

Equations $\dfrac{\partial f}{\partial x} = a(x,y)$, $a\dfrac{\partial f}{\partial x} + b\dfrac{\partial f}{\partial y} = b(x,y)$, $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.
Problème des conditions initiales.

b) Equations du second ordre

Equation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = c(x,y)$. Equation des cordes vibrantes.

5 Intégrale double

a) Les fonctions en escalier et leur intégrale

Subdivisions d'un domaine rectangulaire. L'intégrale d'une fonction en escaliers est indépendante de la subdivision adaptée selon laquelle on l'a calculée.

b) Parties quarrables, fonctions intégrables

Une fonction définie sur une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ est intégrable si, après l'avoir prolongée à un domaine rectangulaire, on peut l'encadrer par deux fonctions en escalier de sorte que l'intégrale de la différence soit plus petite que ε. Définition de l'intégrale double.

Une partie est quarrable si sa fonction indicatrice est intégrable. Aire d'une telle partie. Toute fonction continue sur une partie quarrable fermée est intégrable (preuve ?).

Exemple de partie non quarrable : $\mathbb{Q}^2 \cap ([a,b] \times [c,d])$.

c) Théorème de Fubini

Toute partie du type $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ et} f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$ est quarrable (exemples). L'intégrale double d'une fonction continue sur une telle partie se ramène à deux intégrales simples imbriquées.

Interversion des variables d'intégration. Cas particulier des variables séparables.

d) Changement de variable

Sans démonstration. Aire d'un parallélogramme. Calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ (vue comme une limite).

Chapitre 26

Géométrie euclidienne de l'espace et du plan

L'objectif est, non seulement la classification proposée, mais aussi l'élaboration de méthodes qui pourront servir dans des espace vectoriels de dimension supérieure (*cf.* l'étude des quarts de tours en dimension 4).

1 Préliminaires

a) Sous-espaces stables par un automorphisme orthogonale

L'orthogonal d'un sous-espace stable est également stable. Les valeurs propres ne peuvent être que -1 ou 1.

b) Valeurs propres en dimension 3

Polynôme caractéristique. Existence d'au moins une valeur propre en dimension 3, qui vaut ± 1 pour un automorphisme orthogonal.

c) Points fixes des applications affines

Condition de commutation d'une application affine et d'une translation.

Si $g = L(f)$ et $E = \mathrm{inv}(g) \oplus \mathrm{im}\ (g - \mathrm{Id}_E)$, alors $f = t_{\vec{u}} \circ \hat{g}$, où $\vec{u} \in \mathrm{inv}(g)$ et $\hat{g}$ a un point fixe.

d) Application à la géométrie affine

Isométries : si g est un automorphisme orthogonal, il vérifie les conditions de la proposition.

Similitudes : si f est une similitude de rapport $\neq 1$, alors g admet un unique point fixe.

2 Géométrie vectorielle euclidienne

Les espaces vectoriels sont désormais supposés euclidiens et orientés.

a) Matrices orthogonales d'ordre 2

Explicitation selon leur déterminant. Morphisme surjectif $\mathbb{R} \to SO_2(\mathbb{R})$.

b) Automorphismes orthogonaux du plan

Rotations, réflexions. Automorphismes orthogonaux du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$.

Angles orientés dans le plan.

c) Automorphismes orthogonaux en dimension 3

On distingue selon la dimension des sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1.

Tableau récapitulatif.

3 Géométrie affine euclidienne

a) Isométries du plan

Rotations, translations, symétries, symétries glissées. Isométries de $\mathbb{C}$.

Décomposition en produit de réflexions.Tableau récapitulatif.

b) Isométries en dimension 3

Translations, rotations, vissages, symétries, symétries glissées, symétries tournées (on pourra se limiter aux déplacements, c'est le cadre du programme).

Décomposition en produit de réflexions. Tableau récapitulatif.

c) Similitudes du plan

Rappel : existence d'un point fixe si le rapport n'est pas 1. Décomposition d'une similitude en produit d'une isométrie et d'une homothétie qui commutent.

Similitudes du plan complexe. Isomorphisme entre $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$.

Chapitre 27

Compléments de géométrie différentielle

Récupérer le cours 2009-2010.

Dernier chapitre de l'année. La plupart des exercices seront traités en classe au fur et à mesure. L'objectif est de poser des bases pour la physique de deuxième année, et de préparer les quelques éléments de géométrie différentielle qui seront donnés en deuxième année (pour une évaluation essentiellement orale).

1 Champs de vecteurs, champs scalaires

a) Gradient, divergence, rotationnel

Formulaire découlant du théorème de Schwartz.

b) Intégrale curviligne

Changement de paramétrage $\mathscr{C}^p$-admissible (*i.e.* $\mathscr{C}^p$-difféomorphisme). Définition d'un arc comme classe d'équivalence dans l'ensemble des paramétrages de courbes.

Circulation d'un champ de vecteur le long d'un arc continu et $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

c) Formule de Green-Riemann

Sans démonstration.

d) Champs de vecteurs dérivant d'un potentiel

Circulation d'un tel champ de vecteur. $\vec{F}$ dérive d'un potentiel ssi sa circulation est nulle sur les lacets. Sur un ouvert étoilé, $\vec{F}$ dérive d'un potentiel ssi son rotationnel est nul. Contre-exemple sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: $\vec{F} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}$ (impossibilité du relèvement $\mathscr{C}^1$ global).

e) Le problème du relèvement

Théorème du relèvement $\mathscr{C}^1$, énoncé et démontré sous forme complexe. Théorème du relèvement continu : au moins l'énoncé.

2 Propriétés métriques des courbes paramétrées

a) Aire du domaine délimité par une courbe

Calcul par la formule de Green-Riemann : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_\Gamma x\,dy = \int_\Gamma (-y)\,dx$.

b) Abscisse curviligne, longueur d'une courbe

Pour un arc régulier, l'abscisse curviligne s est un paramétrage $\mathscr{C}^1$-admissible.

c) Courbure, rayon de courbure

Base de Frênet (?) $(\vec{T}, \vec{N})$. Pour un arc $\mathscr{C}^2$ birégulier, un relèvement α de $\vec{T}$ est un paramétrage $\mathscr{C}^1$-admissible. Courbure $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds}$. Rayon de courbure.

Exemples : ellipse, cardioïde.