Programmes de colles

MPSI

Erwan Biland

Lycée Stanislas, classe de MPSI 1, 2009/2010

Table des matières

Programme de colles

Semaine 1 : du 21 au 25 septembre 2009

1 Techniques de calcul

Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss. Rang d'un système linéaires (point de vue naïf : c'est le nombre d'équations indépendantes après application de la méthode du pivot). Formules de Cramer pour un système de Cramer 2×2.

Calculs de sommes et de produits avec changement d'indice. $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$. Factorielle, coefficients binomiaux.

Question de cours : formule du binôme de Newton

Congruences dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Z}$, division euclidienne. Application aux fonctions périodiques.

Question de cours : pour $x \in \mathbb{R}$, $b > 0$ et I un intervalle semi ouvert de longueur b, il existe un unique élément de I congru à x modulo b.

2 Fonctions usuelles

Savoir réaliser une étude de fonction avec les outils de terminale : parité, périodicité, variations, dérivation... Pour les études aux bornes : savoir reconnaître une asymptote, une branche parabolique.

Fonctions logarithmes et exponentielles (népérien(ne) ou de base a), avec leurs équations fonctionnelles. Fonctions puissances.

Question de cours : déterminer l'ensemble des fonctions dérivables qui vérifient l'équation fonctionnelle du logarithme.

Fonctions circulaires et hyperboliques cos, sin, tan, cosh, sinh, tanh et leurs réciproques.

Question de cours : définition, étude et représentation graphique de l'une des fonctions précédentes (sauf cos, sin, tan).

Question de cours : formulaire de trigonométrie circulaire, ou hyperbolique.

Question de cours : Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π, tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.

3 Eléments de théorie des ensembles

Ensembles : appartenance, inclusion, égalité ensembliste. Ensemble vide. Opérations sur les parties d'un ensemble : complémentaire, union, intersection, différence, différence symétrique ; propriétés élémentaires. Produit cartésien de deux ensembles.

Applications : définition par ensemble de départ, ensemble d'arrivée et graphe. Restrictions au départ et à l'arrivée. Composition. Image directe, image réciproque d'une partie convenable.

Question de cours : image directe ou réciproque d'une réunion, d'une intersection de parties.

Injection, surjection, bijection : définition ; composée de deux applications injectives, surjectives, bijectives. Bijection réciproque.

Question de cours : caractérisation des bijections ($f : E \to F$ est bijective ssi il existe $g : F \to E$ tel que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$).

Famille d'éléments d'un ensemble, famille de parties d'un ensemble ; réunion, intersection.

Programme de colles

Semaine 2 : du 28 septembre au 2 octobre 2009

Je rappelle aux élèves qu'ils n'auront la moyenne que s'ils savent répondre à la question de cours. Dans le cas contraire, ils devront me rendre, sur feuille, la question de cours non sue et la solution du ou des exercice(s).

1 Théorie des ensembles

2 Nombres complexes

Parties réelle et imaginaire, module, argument.

Question de cours : Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

Groupe des nombres complexes de module 1 (la structure de groupe n'est pas encore à connaître).

Racines de l'unités, équation du type $z^n = a$ (il faut savoir démontrer qu'elle a n solutions pour $a \neq 0$, et savoir représenter géométriquement ces solutions).

Calcul explicite des racines carrées d'un nombre donné sous forme algébrique.

Question de cours : Recherche et dénombrement des racines n-ièmes de 1.

Question de cours : Représentation à la règle et au compas de $e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

Equations du second degré à coefficients complexes. Systèmes de racines du polynôme associé.

Question de cours : Relations entre coefficients et racines d'une équation du second degré.

Exponentielle complexe. Dérivation d'une fonction du type $t \mapsto e^{\varphi(t)}$, où φ est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

3 La suite

Equations différentielles linéaires

Programme de colles

Semaine 3 : du 5 au 9 octobre 2009

Peu de questions de cours : la connaissance du cours sera évaluée d'abord par la maîtrise des techniques de résolutions.

Merci de rappeler aux élèves qui ont moins de 9 qu'ils doivent me rendre la question de cours et l'exercice sur feuille.

1 Équations différentielles

Notion d'équation différentielle linéaire d'ordre n (pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Equation homogène à coefficients constants d'ordre 1 ou 2 : équation caractéristique, résolution.

Question de cours : Résolution de l'équation homogène d'ordre 1 $y' + a(x)y = 0$ **(on demande la démonstration rigoureuse, bien sûr !).**

Equations avec second membre : utilité d'une solution particulière, principe de superposition.

Question de cours : solution générale de l'équation (E) **connaissant une solution particulière de** (E) **et la solution générale de l'équation homogène associée** (H)**.**

Pour trouver une solution particulière : cas des équations à coefficients constants avec second membre du type polynôme-exponentielle ; méthode de variation de la constante (cette méthode doit être bien connue pour pouvoir être utilisée en exercice).

Pour les équations d'ordre 2, la méthode dite de «variation des deux constantes» a été vue en cours, mais n'est pas au programme. Au minimum, les élèves doivent savoir utiliser la méthode d'abaissement de l'ordre («variation d'une constante») si elle se révèle nécessaire.

2 La semaine suivante

Problème du raccordement de solutions.

Structures algébriques.

Programme de colles

Semaine 4 : du 12 au 16 octobre 2009

1 Équations différentielles

En plus de la semaine dernière :

Equations d'ordre 1 du type $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ (E), où a est une fonction qui peut s'annuler : problème du raccordement de solutions.

2 Groupes

Lois de composition interne : associativité, commutativité, élément neutre (unicité).

Dans un monoïde : élément simplifiable, élément symétrisable, symétrique d'un élément (unicité). Elément absorbant, élément idempotent.

Groupes : définition, groupes abéliens ; notations additives et multiplicative. Sous-groupes, caractérisations. Morphismes de groupes (endo-, iso-, auto-) ; noyau et image d'un morphisme.

Il faut bien sûr connaître les exemples (et contre-exemples) classiques.

Question de cours : unicité de l'élément neutre et, dans un monoïde, du symétrique d'un élément.

Question de cours : le seul élément idempotent simplifiable/symétrisable est l'élément neutre.

Question de cours : caractérisation des sous-groupes.

Question de cours : l'image et le noyau d'un morphisme sont des sous-groupes.

Question de cours : l'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

3 La semaine suivante

Anneaux et corps

Programme de colles

Semaine 5 : du 19 au 23 octobre 2009

Rappel : pas de colles les deux semaines suivantes. Merci de rattraper les colles du mercredi 11 novembre, de préférence le jeudi 5 ou vendredi 6 novembre (ainsi pas de problème de salle).

Je laisse les questions de cours à la discrétion des colleurs.

1 Groupes

(voir semaine précédente)

2 Anneaux et corps

Anneaux. Calcul dans les anneaux ; identités remarquables, formule du binôme. Anneau nul.

Groupe des inversibles d'un anneau (exemple de l'anneau des entiers de Gaus).

Anneaux intègres, corps.

Sous-anneaux, sous-corps, caractérisations.

3 A la rentrée

Géométrie élémentaire du plan et de l'espace.

Programme de colles

Semaine 6 : du 9 au 13 novembre 2009

1 Géométrie élémentaire du plan

Coordonnées cartésiennes, changement de repère (il **faut** savoir retrouver rapidement les formules). Linéarité des coordonnées. Coordonnées polaires, repère polaire $(u_\theta, u_{\theta+\frac{\pi}{2}})$, formules de changement de repère orthonormal direct.

Produit scalaire : définition géométrique, propriétés algébriques.
Déterminant : définition géométrique, interprétation en termes d'aire, propriétés algébriques.

Question de cours : Symétrie et bilinéarité du produit scalaire.

Droites : équations cartésiennes, équations cartésiennes normales, paramétrages, équations polaires. Distance d'un point à une droite : géométriquement, en coordonnées cartésiennes, en polaires.

Cercles : équation cartésienne d'après centre et rayon, d'après diamètre ; équation polaire d'un cercle passant par l'origine. Théorème de l'angle inscrit.

Problèmes d'intersections : de deux droites, d'un cercle et d'une droite, de deux cercles.
Question de cours : lignes de niveau de $M \mapsto \vec{u}.\overrightarrow{AM}$ ou de $M \mapsto \det(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.

2 Géométrie élémentaire de l'espace

Coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques.

Produit scalaire, produit vectoriel (définition géométrique), déterminant.

Question de cours : définitions et principales propriétés du produit vectoriel et du déterminant. (sans démonstration)

Plan : équations cartésiennes, équations cartésiennes normales, paramétrages. Distance d'un point à un plan : géométriquement, en coordonnées cartésiennes.

Droites : systèmes d'équations cartésiennes, paramétrages. Distance d'un point à une droite (géométriquement).

Question de cours : Construction de la perpendiculaire commune à deux droites non parallèles.

Problèmes d'intersections : de plans, de droites (application de la notion de rang d'un système vue en début d'année), de sphères, *etc.*

Les colleurs vérifieront que tous les élèves savent déterminer une équation de droite ou de plan, dans le plan ou dans l'espace, avec des données suffisantes (point et vecteur normal, point et vecteur directeur, etc.).

Programme de colles

Semaine 7 : du 16 au 20 novembre 2009

1 Courbes paramétrées

Savoir représenter graphiquement une courbe du plan $\mathbb{R}^2$, définie par un paramétrage du type $x = x(t),\ y = y(t)$ (en coordonnées cartésiennes).

Interprétation des variations de x et y. Vecteur vitesse, vecteur accélération. Définition d'un point régulier, tangente en un tel point ; définition d'un point birégulier, position de la courbe par rapport à sa tangente en un tel point. Etude au cas par cas de l'allure de la courbe en un point non birégulier.

Etude des symétries.

Etude aux bornes : limite finie avec tangente éventuelle ; branche infinie, direction asymptotique, asymptote ou branche parabolique.

Il faut aussi savoir : déterminer une équation de la tangente, ou de la normale, à une courbe paramétrée en un point donné ; étudier un problème de lieu en utilisant un paramétrage adapté.

2 Courbes en polaires

Etude locale en dehors du point O, étude locale au point O. Etude aux bornes : branches spirales ; branche infinie avec direction asymptotique, asymptote éventuelle. Etude des symétries et points multiples.

3 La semaine suivante

Coniques.

Programme de colles

Semaine 8 : du 23 au 27 novembre 2009

1 Coniques

Définition par directrice, foyer, excentricité. Equation polaire. Classification.

Question de cours : établir l'équation polaire d'une conique définie par foyer, directrice et excentricité.

Equation cartésienne dans un repère adapté (avec toutes les petites formules associées). Représentation graphique : une ellipse est l'image d'un cercle par une affinité orthogonale ; asymptotes d'une hyperbole ; axes de symétrie.

Question de cours : retrouver, à partir d'une équation cartésienne réduite de la conique $\mathscr{C}$, ses caractéristiques : foyer(s), excentricité, directrice(s).

Paramétrage des ellipses, des hyperboles à l'aide des fonctions circulaires, hyperboliques. Paramétrages à l'aide de fonctions rationnelles.

Définition bifocale des ellipses et des hyperboles. Caractérisation géométrique des tangentes aux trois types de coniques.

Question de cours : Equation bifocale d'une hyperbole (c'est l'ellipse qui a été traitée en cours).

Question de cours : La tangente au point M à une ellipse de foyers F et F' est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Partie du plan définie par une équation algébrique de degré 2 : typologie à l'aide du discriminant, étude pratique. Equation de la tangente en $M(x_0, y_0)$ à une courbe algébrique de degré 2.

2 La suite

Ensembles de nombres : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Programme de colles

Semaine 9 : du 30 novembre au 4 décembre 2009

MERCI AUX COLLEURS DE REPORTER SOUS EXCEL LES NOTES DU TRIMESTRE.

1 Relations d'ordre

Relations d'ordre : majorant, minorant, plus petit élément, plus grand élément, borne inférieure, borne supérieure. Ordre total.

2 Nombres entiers, récurrence

Définition axiomatique de $\mathbb{N}$. Il n'existe pas dans $\mathbb{N}$ de suite strictement décroissante, ni de suite strictement croissante et majorée. Notion de successeur, de prédécesseur d'un entier.

Question de cours : énoncé et démonstration du théorème de la récurrence.

Démonstrations par récurrence simple, double, forte, descendante, etc.

3 Nombres réels

Le corps totalement ordonné $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$. Axiome d'existence d'une borne supérieure pour toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

Question de cours : démonstration de l'existence d'une borne inférieure pour toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

Question de cours : caractérisation de la borne supérieure

($s = \sup A$ ssi s majore A et $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A\ a > S - \varepsilon$).

Caractérisation de la borne inférieure.

Question de cours : La partie $\mathbb{N}$ n'est pas majorée dans $\mathbb{N}$. Toute partie de $\mathbb{Z}$ majorée/minorée dans $\mathbb{R}$ l'est aussi dans $\mathbb{Z}$.

Applications : intervalles de $\mathbb{R}$ (définition, caractérisation par la convexité, classification). Droite réelle achevée $\bar{\mathbb{R}}$, borne inférieure/supérieure dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Question de cours : Les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Partie entière (notée $\lfloor x \rfloor$) : définition, caractérisation comme le plus petit entier relatif inférieur ou égal au réel x. Partie entière supérieure (notée $\lceil x \rceil$).

Question de cours : Existence et unicité de la partie entière d'un réel positif, caractérisations.

4 La suite

Un peu de topologie de $\mathbb{R}$. Suites réelles et complexes.

Programme de colles

Semaine 10 : du 7 au 11 décembre 2009

Pas de colles la semaine suivante, pour cause de concours blanc.

Avec un peu d'avance, la classe de MPSI 1 souhaite un **Joyeux Noël** à tous les colleurs !

1 Nombres réels (en plus de la semaine dernière)

Valeurs décimales approchées, par défaut et par excès.

Un peu de topologie de $\mathbb{R}$ (hors-programme) : voisinages, ouverts, fermés, points adhérents, parties denses. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

2 Suites de nombres réels ou complexes

Opération usuelles sur les suites, structure d'algèbre. Suites bornées (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), suites minorées ou majorées (dans $\mathbb{R}$).

Convergence d'une suite : définition «en ε». Limites infinies des suites réelles.
Question de cours : théorème d'unicité de la limite
Question de cours : toute suite convergente est bornée ; résultats similaires pour les limites infinies.

Une suite complexe est bornée (resp. convergente) si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.

Suites extraites. Toute suite extraite d'une suite bornée (resp. convergente) est bornée (resp. convergente de même limite). Application à la preuve qu'une suite est divergente de deuxième espèce.
Question de cours : si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent de même limite, alors u converge.

Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle. Théorèmes opératoires sur les limites, finies ou infinies.
Question de cours : convergence de la somme de deux suites convergentes.
Question de cours : convergence du produit de deux suites convergentes.

Compatibilité de l'ordre (large !) avec le passage à la limite, applications.
Question de cours : théorème d'encadrement, pour une limite finie ou infinie

Les élèves sont bien sûr supposés connaître les limites classiques vues en terminale.

3 A la rentrée

Suites de références, théorèmes d'existence de limite.

Fonctions.

Programme de colles

Semaine 11 : du 4 au 8 janvier 2010

Beaucoup de questions de cours dans ce chapitre, en particulier sur les espaces vectoriels. Les élèves sont encore en phase de découverte de l'algèbre linéaire, ne poser d'exercices que sur les suites.

1 Suites numériques

En plus du programme précédent :

Etude des suites de référence : arithmétiques, géométriques, polynomiales, $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comparaison de ces suites.

Suites monotones.

Question de cours : toute suite u croissante est soit majorée et convergente, avec $\lim u = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$**, soit non majorée et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.**

Suites adjacentes, théorème des segments emboîtés.

Question de cours : Lemme de Cesaro (plus qu'un simple exercice !).

Question de cours : Théorème de Bolzano-Weierstrass (pour une suite réelle).

2 Espaces vectoriels

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. Exemples classiques.

Applications linéaires : noyau, image. L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$. L'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$. Le groupe $(GL(E), \circ)$.

Question de cours : l'image directe/réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Question de cours : caractérisation de l'injectivité/surjectivité à l'aide du noyau et de l'image.

Question de cours : la composée de deux applications linéaires, la réciproque d'un isomorphisme linéaire sont des applications linéaires.

Question de cours : détermination de l'ensemble des endomorphismes $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$.

Question de cours : détermination de l'ensemble des formes $\mathbb{K}$-linéaires sur $\mathbb{K}^n$.

3 La semaine suivante

Suite de l'algèbre linéaire, et un peu de géométrie affine.

Programme de colles

Semaine 12 : du 11 au 15 janvier 2010

1 Algèbre linéaire

Sous-espace vectoriel engendré par une partie.

Question de cours : Définition de $\mathrm{vect}(A)$**.** $\mathrm{vect}(A)$ **est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de** A**.**

Somme, intersection de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Question de cours : F **et** G **sont supplémentaires dans** E **ssi tout vecteur de** E **se décompose de façon unique dans la somme** $E + F$**.**

Question de cours : si $u \in \mathscr{L}(E, F)$**, tout supplémentaire dans** E **de** $\ker u$ **est canoniquement isomorphe à** $\mathrm{im}\ u$**.**

Projecteurs, symétries associés à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Homothéties, affinités.

Question de cours : caractérisation des projecteurs vectoriels, caractérisation des symétries vectorielles.

2 Géométrie affine

Equations linéaires du type $u(x) = b$. Sous-espace affine, direction. Parallélisme.

Question de cours : caractérisation des sous-espaces affines à l'aide du barycentre.

Applications affines, partie linéaire. Composée de deux applications affines, réciproque d'une application affine. Groupe $\mathrm{Aff}(E)$ des transformations affines.

Exemples : homothéties affines, projecteurs affines. **Question de cours : caractérisation des projecteurs affines, des symétries affines**

3 La semaine suivante

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: limites, continuité.

Programme de colles

Semaine 13 : du 18 au 22 janvier 2010

1 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: limites, continuité.

Espace vectoriel des fonctions de X dans $\mathbb{K}$; sous-espaces vectoriels des fonctions bornées, paires, impaires, T-périodiques ou anti-périodiques.

Limite finie ou infinie d'une fonction en un point, en $-\infty$ ou en $+\infty$. Unicité de la limite. Limite à gauche, limite à droite. Continuité en un point.

Notion de propriété vraie «au voisinage d'un point». Si f admet une limite finie en $a \in \bar{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Théorèmes opératoires sur les limites, la continuité. Compatibilité avec l'ordre, théorème d'encadrement, existence de limites pour les fonctions monotones.

Question de cours : limite d'une fonction composée
Question de cours : caractérisation séquentielle d'une limite

Caractérisation séquentielle de l'adhérence, des parties denses. Deux fonctions continues qui coïncident sur $\mathbb{Q}$ (ou une partie dense de $\mathbb{R}$) coïncident sur $\mathbb{R}$.

Suites définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (recherche des intervalles stables et points fixes par f, monotonie de la suite u ou de ses suites extraites...).

Question de cours : Equivalence des deux définitions de la densité (par les suites et par l'intersection avec tout intervalle ouvert).

On pourra utiliser dans les exercices le résultat vu en lycée sur la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *en un point a où la fonction f est dérivable.*

2 La semaine suivante

Étude globale des fonctions continues, fonctions polynomiales.

Programme de colles

Semaine 14 : du 25 au 29 janvier 2010

Les colleurs ne sont pas tenus de poser une question de cours. Par contre, merci de demander à chaque élève au moins un calcul d'équivalent (n'utilisant pas les développements limités).

1 Fonctions à valeurs réelles continues sur un intervalle

Question de cours : théorème des valeurs intermédiaires.
Contraposée de ce théorème. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Fonctions continues strictement monotones : image J d'un intervalle I par une telle fonction f ; f induit une bijection de I sur J, et la bijection réciproque est continue.

Question de cours : Théorème des bornes (à l'aide de Bolzano-Weierstrass).
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Fonctions uniformément continues, fonctions lipschitziennes.
Question de cours : Défintions, exemple de fonction u.c. mais pas lipschitzienne, de fonction continue mais pas u.c. (avec preuves).
Théorème de Heine.

2 Relations de comparaison

Relations de domination, de négligeabilité (ou prépondérance), d'équivalence sur les fonctions au voisinage d'un point. Théorèmes usuels : transitivité, produit, quotient, changement de variables (on veillera à ce que les élèves les fassent soigneusement).

Question de cours : somme de deux fonctions dominées par une fonction φ, négligeables devant φ, équivalentes à des multiples de φ.

Equivalent d'une fonction admettant une limite non nulle en un point, ou une dérivée non nulle. Les équivalents usuels doivent être connus, et leur méconnaissance sera sanctionnée.

3 La suite

Polynômes et fonctions polynomiales. Développements limités.

Programme de colles

Semaine 15 : du 1er au 5 février 2009

Pour cette semaine, la question de cours pourra être remplacée par une recherche de DL/équivalent.

1 Polynômes et fonctions polynomiales

Algèbre $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ (définition axiomatique, sans construction). Degré, valuation. Degré d'une somme, d'un produit.

Evaluation d'un polynôme en un point, racines, fonctions polynomiales. Si les fonctions polynomiales associées à deux polynômes coïncident en une infinité de points, ces polynômes sont égaux (admis pour l'instant).

Composition, dérivation des polynômes.

Polynôme annulateur d'un endomorphisme ; exemple des projecteurs, des symétries.

Le but de cette première étude est de fixer quelques définitions avant, notamment, l'étude des développements limités. L'étude plus fine des racines, de la factorisation et de rudiments d'arithmétique des polynômes sera faite dans un chapitre ultérieur.

2 Comparaison des fonctions, développements limités

En plus de la semaine dernière :

Développements limités ; addition, produit, composition, quotient. Notion de développement asymptotique (en $+\infty$ ou $-\infty$).

A partir de mardi : application à des études locales, en particulier recherche d'asymptote / de tangente, et étude de la position par rapport à l'asymptote / à la tangente pour des courbes paramétrées ou des graphes de fonctions.

Les développements limités usuels (exp**,** ln**,** $x \mapsto \frac{1}{1-x}$**,** $x \mapsto (1+x)^\alpha$**, fonctions circulaires et hyperboliques) doivent être connus, et pourront être demandés (sans démonstration).**

3 La semaine suivante

Dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Programme de colles

Semaine 16 : du 8 au 12 février 2010

1 Dérivation

Dérivabilité d'une fonction, nombre dérivé, fonction dérivée ; caractère $\mathscr{C}^1$. Dérivée n-ième, caractère $\mathscr{C}^n$. Théorèmes usuels ; formule de Leibniz ; dérivation d'un composée, d'une fonction réciproque.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et atteint un extremum en un point a intérieur à I, alors $f'(a) = 0$.

Question de cours : Théorème de Rolle (énoncé précis et démonstration)

Application : un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n a au plus n racines réelles.

Question de cours : Egalité des accroissements finis (idem)

Inégalité des accroissements finis, application à l'étude de la monotonie (on a notamment vu en cours le critère précis sur la dérivée pour qu'une fonction soit strictement croissante ou décroissante) ou du caractère lipschitzien d'une fonction.

Généralisation de l'IAF aux fonctions à valeurs complexes (sans démonstration).

Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

Question de cours : Intégration (ou plutôt «primitivation») des développements limités

Question de cours : Théorème de Taylor-Young.

Dérivation d'un DL si on sait déjà que la dérivée admet un DL.

2 La semaine prochaine

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}[i]$. Ensembles finis.

Programme de colles

Semaine 17 : du 15 au 19 février 2010

1 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Multiples et diviseurs, PGCD, PPCM. Congrences, division euclidienne.

Question de cours : Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Question de cours : Théorème de Bézout

Lemme de Gauss. Nombres premiers.

Question de cours : Il existe une infinité de nombres premiers dans $\mathbb{N}$.

Question de cours : Factorisation d'un entier non nul en produit de facteurs premiers (existence, unicité).

2 Compléments à l'arithmétique

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, éléments inversibles. Corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, pour p premier.

Arithmétique dans $\mathbb{Z}[i]$: idéaux, théoréme de Bézout, lemme de Gauss, factorisation. Pour $p \in \mathbb{N}$ premier, p ssi décomposable dans $\mathbb{Z}[i]$ ssi p est somme de deux carrés, ssi $p = 2$ ou $p \equiv 1[4]$.

3 Ensembles infinis

Notions d'ensembles équipotents. Ensembles dénombrables, exemples ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$, nombres algébriques). Ensembles non dénombrables, exemples ($\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$, $\mathbb{R}$).

4 La suite

Ensembles finis, groupes finis, dénombrement.

Programme de colles

Semaine 18 : du 8 au 12 mars 2010

1 Ensembles infinis

Notions d'ensembles équipotents. Ensembles dénombrables, exemples ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$, nombres algébriques). Ensembles non dénombrables, exemples ($\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$, $\mathbb{R}$).

2 Ensembles finis

Notion d'ensemble fini ou infini. Unicité du cardinal d'un ensemble fini.

Question de cours : s'il existe une injection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$, alors $n \leqslant p$.

Parties d'un ensemble fini. Cardinal de la réunion de deux parties finies, disjointes ou non, d'un ensemble quelconque. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité d'une application à l'aide des cardinaux.

Question de cours : si $f : E \to F$ est injective et F fini, alors E est fini, $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$ et ($\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E$ ssi f est bijective).

Question de cours : si $f : E \to F$ est surjective et E fini, alors F est fini, $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$ et ($\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E$ ssi f est bijective).

Relations d'équivalences, partitions, application au dénombrement.

Question de cours : Théorème de Lagrange sur l'ordre d'un sous-groupe d'un groupe fini.

Ordre d'un élément d'un groupe fini. Si $\operatorname{Card} G = n$ et $g \in G$, alors $g^n = 1_G$. Petit théorème de Fermat : si a et n sont premiers entre eux, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1\,[n]$, où $\varphi(n)$ est le nombre d'éléments inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3 Dénombrement

E et F étant des ensembles finis : cardinal de $E \times F$.

Question de cours : Cardinal de $F^E = \mathscr{F}(E, F)$.

Cardinal de l'ensemble des k-arrangements de F, de l'ensemble des injections de E dans F, de l'ensemble $\mathscr{S}(E)$ des permutations de E.

Question de cours : Cardinal de l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E.

Question de cours : Cardinal de l'ensemble $\mathscr{P}_k(E)$ des parties de E de cardinal k.

Interprétations ensemblistes d'identités portant sur les coefficients binomiaux.

4 La suite

Groupe symétrique. Espaces vectoriels de dimension finie.

Programme de colles

Semaine 19 : du 15 au 19 mars 2010

1 Familles (finies) de vecteurs

Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs (déjà vu pour une partie). Familles génératrices. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Familles libres, familles liées. Toute sous-famille d'une famille libre est libre, toute sur-famille d'une famille liée est liée. La famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre ssi $(x_i)_{i\neq j}$ est libre et $x_j \notin \mathrm{Vect}(x_i)_{i\neq j}$.

Bases ; existence et unicité des coordonnées dans une base.

Pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$:
$\mathrm{Vect}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} + \mathrm{Vect}(x_i)_{p+1\leqslant i\leqslant n} = \mathrm{Vect}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Question de cours : $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre si, et seulement si, $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(x_i)_{p+1\leqslant i\leqslant n}$ le sont et $\mathrm{Vect}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \cap \mathrm{Vect}(x_i)_{p+1\leqslant i\leqslant n} = \{0\}$.

Base adaptée à des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

$u : E \to F$ étant linéaire : image par u d'une famille génératrice de E ; d'une famille liée ; d'une famille libre si u est injective.

Question de cours : caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité de u par l'image d'une base de E. (Les élèves seront amenés à reconstruire des démonstrations étalées dans le cours sur plusieurs propositions.)

Fonctions coordonnées, espace dual E^* de E, base duale d'une base de E.

Question de cours : existence, unicité de $u \in \mathscr{L}(E,F)$ si on fixe l'image par u d'une base de E.

Espace vectoriel des matrices $\mathscr{M}_{n,p}(K)$. Matrice d'un vecteur dans une base, d'une application linéaire dans des bases.

Question de cours : Définition de l'application $u \mapsto Mat_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$; c'est un isomorphisme linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Bases canoniques de $\mathbb{C}$ (sur $\mathbb{R}$), de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (sur $\mathbb{K}$).

2 Espaces vectoriels de dimension finie

Le cours sur ce point sera terminé lundi ; merci aux colleurs d'en tenir compte lundi soir.

Théorème de Steinitz : le nombre de vecteurs d'une famille libre est inférieur à celui d'une famille génératrice (dans le même espace). Si un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admet une base, toutes ses bases ont le même nombre d'éléments ; dimension d'un $\mathbb{K}$-ev.

Théorème de l'échange. Tout $\mathbb{K}$-ev admettant une famille génératrice finie admet une base. Théorème de la base incomplète. De toute famille génératrice on peut extraire une base.

Question de cours : tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie est de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité ssi $F = E$.

Caractérisation des bases parmi les familles libres (resp. génératrices) à l'aide de la dimension. Caractérisation des isomorphismes parmi les application linéaires injectives (resp. surjectives) à l'aide de la dimension.

3 La suite

Rang, codimension.

Programme de colles

Semaine 20 : du 22 au 26 mars 2010

1 Espaces vectoriels de dimension finie

En plus de la semaine dernière :

Existence et dimension d'un supplémentaire en dimension finie.

Dimension de $E \times F$; base de $E \times F$ associée à des bases de E et F. Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$; base de $\mathscr{L}(E, F)$ associée à des bases de E et F.

Rang d'une famille de vecteurs. Caractérisation des familles libres/ génératrices à l'aide du rang. Rang d'une application linéaire.

Question de cours : Le rang d'une famille $\mathscr{X}$ est le plus grand cardinal d'une sous-famille libre de $\mathscr{X}$.

Question de cours : théorème du rang.

Question de cours : dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels (formule de Grassman).

2 Codimension

Codimension de F dans E (dimension d'un supplémentaire s'il en existe). Hyperplans.

Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est de rang fini, alors $\ker u$ est de codimension finie dans E, avec $\operatorname{codim}_E(\ker u) = \operatorname{rang} u$.

Question de cours : H est un hyperplan ssi H est le noyau d'une forme linéaire non nulle, qui est alors unique à une constante multiplicative près.

Sous-espace vectoriel F de E défini par un système d'équations linéaires homogènes $(f_i(x) = 0)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, où les f_i sont des formes linéaires sur E.

Question de cours : si la famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, alors F est de codimension n dans E.

Plus généralement, $\operatorname{codim}_E(F) = \operatorname{rang}(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Partie A de E définie par un système d'équations linéaires avec seconds membres $(f_i(x) = \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, où les α_i sont des scalaires. Si la famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, alors A est non vide. Si de plus $\dim E = n$, alors A est un singleton, et le système est dit de Cramer.

3 La suite

Calcul matriciel.

Programme de colles

Semaine 21 : du 29 mars au 2 avril 2010

La maîtrise du cours sera plutôt vérifiée en exercice : les élèves doivent parfaitement connaître les définitions et en particulier savoir calculer l'image, le noyau, le rang, l'inverse éventuel d'une matrice.

1 Calcul matriciel

Matrice d'une application linéaire dans des bases. Produit matriciel et composition des applications linéaires. Matrice dans une base d'un vecteur, d'une famille de vecteurs. Matrice dans la base duale d'une forme linéaire, d'une famille de formes linéaires.

Transposition, propriétés algébriques.

Application linéaire $u_A : X \mapsto AX$ associée à une matrice A ; image, noyau, rang de A.

Caractérisations du rang de A : rang de la famille des colonnes de A, rang de toute application linéaire de matrice A, rang d'une famille de vecteurs de matrice A, d'une famille de formes linéaires de matrice A, de la transposée de A, de la famille des lignes de A.

Matrices carrées : anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; matrices inversibles et isomorphismes. Système linéaire associé à une matrice A ; application au calcul de l'inverse A^{-1} (s'il existe).

Caractérisation des bases par leurs matrices ; matrices de passage.

Question de cours : formules de changement de base(s) pour un vecteur, une application linéaire, un endomorphisme.

Question de cours : dans des bases adaptées, la matrice de $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est du type $J_{n,p,r}$.

Matrices équivalentes, matrices semblables. A est de rang r si, et seulement si, il existe P, Q inversibles tel que $PAQ = J_{n,p,r}$.

Recherche de bases adaptées à des endomorphismes. Matrices triangulaires, diagonales.

Matrices symétriques, antisymétriques.

Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme (vu en exercice).

2 La semaine suivante

Groupe symétrique.

Programme de colles

Semaine 22 : du 6 au 9 avril 2010

1 Révisions

Algèbre linéaire en dimension finie, matrices.

2 Groupe symétrique

Orbites d'une permutation. Support d'une permutation. Cycles, transpositions.

Question de cours : description d'une permutation admettant une seule orbite non triviale de cardinal p (cycle d'ordre p).

Question de cours : décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints (existence, unicité, commutativité).

Question de cours : décomposition d'une permutation en produit de transpositions.

Signature d'une permutation (définie à partir du nombre d'orbites). La signature est un morphisme de groupes de $\S_n$ dans $\{-1, 1\}$. Signature d'une transposition. Groupe alterné $\mathscr{A}_n$ des permutations paires.

3 Compléments hors-programme

Exemples d'actions de groupes. Orbites, points fixes...

Action d'un groupe sur lui-même par conjugaison. Centre d'un groupe. Sous-groupes distingués, groupe quotient par un sous-groupe distingué, groupes simples.

Question de cours : définition de la loi de groupe sur G/H si H est distingué dans G (pour les élèves volontaires uniquement).

Programme de colles

Semaine 23 : du 12 au 16 avril 2010

Les notes pour le deuxième trimestre sont arrêtées à la semaine dernière. Merci aux colleurs de relever les notes et de me les envoyer grâce au fichier excel joint au mail.

1 Racines d'un polynôme

Ordre de multiplicité d'une racine. Factorisation d'un polynôme connaissant des racines et leurs multiplicités ; un polynôme non nul de degré d admet au plus d racines, comptées avec multiplicités. Polynôme scindé sur un corps.

Question de cours : Fonctions symétriques élémentaires ; relations coefficients / racines.

Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$: formule de Taylor en un point a ; quotient et reste de la division euclidienne par $(X-\alpha)^n$. Caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives.

2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Multiples et diviseurs d'un polynôme ; polynômes associés ; polynômes unitaires. Polynômes irréductibles. Idéaux de $\mathbb{K}[X]$ (officiellement hors programme). Division euclidienne avec son algorithme.

Question de cours : Tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont principaux.

Question de cours : Théorème de Bézout.

Lemme de Gauss. Algorithme d'Euclide, calcul des coefficients de Bézout.

Existence et unicité de la factorisation d'un polynôme non nul en produit de polynômes irréductibles unitaires (sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque).

Polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$, pratique de la factorisation.

Question de cours : Théorème de D'Alembert-Gauss.

Question de cours : Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ de $X^n - 1$.

Complément hors programme : polynômes irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$. Si $P \in \mathbb{Z}[X]$ a des coefficients premiers entre eux dans leur ensemble, P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ ssi il l'est dans $\mathbb{Z}[X]$ (peut être posée en question de cours à des élèves motivés).

3 Fractions rationnelles

Corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$. Représentants d'une fraction rationnelle, représentant irréductible unitaire. Degré.

Ce qui suit sera vu en cours lundi.

Pôles et racines d'une fraction rationnelle, multiplicité. Fonctions rationnelles. Partie polynomiale, parties polaires d'une fraction rationnelle.

Question de cours : Définition, existence, unicité de la partie polaire associée à un pôle donné.

Question de cours : Si $F = P/Q$ avec Q scindé, alors F est la somme de sa partie polynomiale et de ses parties polaires (c'est le cas en particulier si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Calcul pratique de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$.

Question de cours : Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de P'/P.

Programme de colles

Semaine 24 : du 3 au 7 mai 2010

1 Intégration

Subdivisions d'un segment. Fonctions en escaliers, fonctions continues par morceaux, subdivisions adaptées (toujours sur un segment).

Question de cours : Toute somme ou produit de fonctions en escalier est une fonction en escalier.

Question de cours : toute fonction continue par morceaux (sur un segment) est bornée.

Question de cours : toute fonction continue sur un segment peut être encadrée par deux fonctions en escalier distante de moins de ε, et ce quel que soit $\varepsilon > 0$.

Intégrale de fonctions en escalier (indépendante de la subdivision). Linéarité, croissance, additivité par rapport à l'intervalle, invariance par translation.

Question de cours : définition de l'intégrale des fonctions CPM à partir de celle des fonctions en escalier (on demandera les grandes lignes de cette définition, sans y passer toute l'heure de colle...).

Linéarité, croissance, additivité par rapport à l'intervalle et relation de Chasles, invariance par translation. Inégalité de la moyenne et techniques de majorations des intégrales.

Les sommes de Riemann et autres méthodes d'approximation des intégrales seront étudiées plus tard.

2 Intégration et primitivation

Question de cours : si $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I , la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f.

Intégration par partie. Changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ (toujours justifié avec précision !). Changement de variable affine.

Question de cours : calcul de $\int_a^b (x-a)^n (b-x)^p\,dt$.

Question de cours : formule de de Taylor avec reste intégral, avec démonstration. Enoncé (au moins) de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

3 Calcul

Calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle.

Règles de Bioche et autres joyeusetés.

Vous pouvez trouver le polycopié distribué aux élèves et travaillé en classe sur ma page, à l'adresse http://erwanbiland.fr/mpsi_pdf/Polys_2009-2010.pdf (c'est l'avant dernier du recueil).

Programme de colles

Semaine 25 : du 17 au 21 mai 2010

1 Calcul d'intégrales

2 Fonctions convexes

Définition par l'inégalité de convexité $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.

Question de cours : inégalité de convexité généralisée pour un barycentre de n points.

Cas d'égalité : $f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y)$ ssi $x = y$ ou $t = 0$ ou $t = 1$ ou f est affine sur le segment d'extrémités x et y. Fonctions strictement convexes. Fonctions concaves.

Caractérisation des fonctions convexes par la convexité du surgraphe.

Caractérisations : croissance des taux d'accroissement, croissance de la dérivée, positivité de la dérivée seconde.

Exemples : entropie d'une distribution de probabilité sur un univers fini, comparaison des moyennes harmonique, géométrique, arithmétique.

3 Méthodes d'approximation des intégrales

Sommes de Riemann (ou méthode des rectangles à gauche, à droite ou au centre).

Question de cours : convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale si la fonction considérée est continue

Convergence en $O\left(\frac{1}{n}\right)$ des sommes de Riemann pour une fonction lipschitzienne.

Question de cours : méthode des trapèzes pour une fonction $\mathscr{C}^2$, convergence en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Programme de colles

Semaine 26 : du 24 au 28 mai 2010

Analyse et algèbre cette semaine. Il y a matière à de nombreux exercices, donc la question de cours est facultative (pour le colleur bien sûr...).

1 Séries

Notation d'une série, terme général, suite des sommes partielles. Convergence, divergence, grossière divergence. Séries à termes positifs.

Question de cours : Théorème de comparaison des séries à termes positifs : si u et v sont des suites à valeurs positives, au moins à partir d'un certain rang, si $u_n = \underset{n\to\infty}{O}(v_n)$ et si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente. Contraposée de ce théorème.

Convergence absolue : si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge (mais la réciproque est fausse).

2 Approximation

Approximation de sommes par des intégrales.

Question de cours : Formule de Stirling, avec démonstration. La démonstration étant longue, on pourra se contenter des grandes lignes, avec les arguments clés, en laissant de côté la détermination de la constante par les intégrales de Wallis.

Approximation de réels par des séries à l'aide (par exemple) de formules de Taylor. Vitesse de convergence (aucun théorème de sommation des relations de comparaison n'a bien sûr été vu).

3 Manipulations élémentaires sur les matrices

Manipulations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes. Interprétation comme multiplication à gauche ou à droite par les matrices correspondantes.

Méthode du pivôt.

Application : déterminer P et Q inversibles telles que $PAQ = J_r$; calculer l'inverse d'une matrice inversible.

4 La suite

Déterminant.

Programme de colles

Semaine 27 : du 31 mai au 4 juin 2010

Peu de questions de cours, la priorité va au calcul de déterminant et aux applications.

1 Déterminant

Formes multilinéaires alternées, antisymétriques (équivalence entre les deux). Effet d'une manipulation élémentaire, d'une permutation des arguments.

Espace $\Lambda^n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel E de dimension n : il est de dimension 1. Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base de E.

Question de cours : si $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ est n-linaire alternée et $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{E}} \mathscr{X}$, alors :

$$\varphi(\mathscr{X}) = \sum_{\sigma \in \S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Formule de changement de base, caractérisation des bases.

Déterminant d'un endomorphisme. Déterminant du composé de deux endomorphismes, caractérisation des automorphismes.

Orientations sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Endomorphismes directs, indirects.

Déterminant d'une matrice. Déterminant de la transposée, effet d'une manipulation élémentaire sur les lignes ou les colonnes. Formules pour les déterminants d'ordre 2 et 3.

Déterminant d'un produit de matrices, caractérisation des matrices inversibles.

Déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire ; déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Question de cours : développement d'un déterminant par apport à une colonne, une ligne.

Comatrice ; application à l'inversion matricielle.

Méthode du pivôt pour la résolution des systèmes linéaires. Formules de Cramer pour les systèmes homonymes.

2 La suite

Produits scalaires, espaces vectoriels euclidiens.

Programme de colles

Semaine 28 : du 7 au 11 juin 2010

1 Espaces vectoriels euclidiens

Produit scalaire, norme euclidienne. Exemples classiques.

Question de cours : inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire.

Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux. Famille orthogonale, orthonormale. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'une partie.

Expression des coordonnées dans une famille orthogonale à l'aide du produit scalaire. Expression du produit scalaire, de la norme à l'aide des coordonnées dans une base orthogonale.

Question de cours : formule donnant le projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace admettant une base orthogonale. Un tel sous-espace est un supplémentaire de son orthogonal, et est l'orthogonal de son orthogonal.

Espace vectoriel euclidien (c'est-à-dire muni d'un produit scalaire et de dimension finie). Existence de bases orthonormales. Théorème de la base orthogonale/normale incomplète.

Question de cours : construction d'une base orthogonale par le procédé de Gram-Schmidt.

Question de cours : pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\varphi = \langle a, \cdot \rangle$.

2 Automorphismes orthogonaux

Automorphismes orthogonaux, groupe $O(E)$ (en dimension finie). Caractérisations : par la conservation du produit scalaire ; par la linéarité et la conservation de la norme, par la linéarité et l'image d'une base orthonormale. Symétries orthogonales.

Question de cours : Toute isométrie est une application affine dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal

Matrices orthogonales, caractérisations diverses, groupe $O_n(\mathbb{R})$. Caractérisation des automorphismes orthogonaux, des bases orthonormales, par leur matrice dans une base orthonormale.

Déterminant des matrices orthogonales ; sous-groupes $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(E)$. Produit mixte dans un espace vectoriel euclidien orienté.

Question de cours : produit vectoriel de $n-1$ vecteurs en dimension $n \geqslant 2$.

3 Géométrie euclidienne

Classification des automorphismes orthogonaux du plan. Rotations, réflexions. Angle orienté.

Géométrie de l'espace euclidien de dimension 3. Angles non orientés. Classification des automorphismes orthogonaux de l'espace de dimension 3. Les automorphismes orthogonaux directs sont les rotations. Savoir retrouver les éléments caractéristiques d'une rotation.

Sera vu lundi : isométries. Les isométries d'un espace vectoriel euclidien sont les applications affines dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal.
Classification des isométries directes, ou déplacements, du plan (rotations, translations) et de l'espace (translations, rotations, vissages).

Similitudes, rapport d'une similitudes. Toute similitude est une application affine. Classification des similitudes directes du plan (translations, similitudes à centre). Interprétation complexe.

Programme de colles

Semaine 29 : du 14 au 18 juin 2010

Un grand merci à tous les colleurs pour leur travail de l'année !

1 Fonctions de plusieurs variables

Pour une fonction d'une partie de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$: fonctions partielles en un point, continuité partielle, dérivées partielles, gradient. Dérivées partielles successives, matrice hessienne. Continuité/dérivée selon un vecteur.

Pour une fonction d'une partie de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$: fonctions composantes, matrice jacobienne.

Normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Boules ouvertes, fermées. Normes équivalentes ; toutes les normes sont équivalentes en dimension finie (admis).

Question de cours : équivalence des normes N_1, N_2, N_∞ sur $\mathbb{R}^n$.

Voisinages, points intérieurs, points adhérents. Parties ouvertes, fermées.

Si E et F sont deux espaces vectoriels normés et $A \subset E$, continuité d'une fonction $f : A \to E$. Théorèmes opératoires (somme, produit pour $F = \mathbb{R}$, composition). Si $F = \mathbb{R}^n$, f est continue ssi ses fonctions composantes le sont. Continuité des fonctions coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Question de cours : la continuité «globale» implique la continuité partielle, mais la réciproque est fausse (exemple).

Pour $A \subset \mathbb{R}^p$, condition nécessaire sur les dérivées partielles pour qu'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ atteigne un extremum local ou global en un point intérieur à A.

Étude de la continuité en $(0, 0)$ d'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par passage en coordonnées polaires.

2 Calcul différentiel

(sera vu lundi)

Une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si ses dérivées partielles sont partout définies et globalement continues. Toute fonction $\mathscr{C}^1$ admet en tout point un DL_1 (et en particulier est continue). Théorèmes opératoires sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$: somme, produit, composée.

La matrice jacobienne de $g \circ f$ en a est le produit de celles de g (en $f(a)$) et de f (en a). Expression des dérivées partielles de $g \circ f$.

Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Théorème de Schwartz.

Résolutions d'équation aux dérivées partielles linéaires simples. Changement de variable affine, passage en polaire.