

Nom :

Numéro d'étudiant-e :

Test n°3

Mardi 8 avril, de 8h30 à 9h20

Consigne. Vous devez répondre sur la feuille d'énoncé. Les calculatrices sont interdites. Chaque question compte 10 points, pour un total sur 50 points. Vous pouvez utiliser l'autre face de la feuille d'énoncé comme brouillon.

Barème de la question 1 : 10 pour quatre réponses justes, 6 pour trois réponses justes, 2 pour deux réponses justes, 0 pour une réponse juste ou moins.

Barème des questions 2 et 5 : 10 pour la bonne réponse, 0 pour une réponse fausse.

Barème des questions 3 et 4 : 10 pour la bonne réponse, possibilités de points pour des réponses approchantes.

1 - Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel hermitien, et x, y deux vecteurs de E . Pour chacune des propositions suivantes, indiquez si elle est vraie (c'est-à-dire toujours vraie) ou fausse (c'est-à-dire parfois fausse).

- a) $\langle y, x \rangle = -\overline{\langle x, y \rangle}$ VRAI FAUX
b) $|\langle x, y \rangle| \geq \|x\| \cdot \|y\|$ VRAI FAUX
c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ VRAI FAUX
d) $\langle 2x + iy, x + iy \rangle = 2\|x\|^2 + 3i\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ VRAI FAUX

2 - Dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$, soit A la matrice (dans la base canonique) du projecteur orthogonal sur le sous-espace $F = \text{vect}\{[1 \ 2 \ 3]^t\}$. Cocher la bonne réponse :

$A = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ $A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

3 & 4 - Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 9, et $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme tel que $u^4 = \tilde{0}$. On suppose que $\text{rang}(u) = 6$, $\text{rang}(u^2) = 3$, $\text{rang}(u^3) = 1$. Tracer le diagramme de Young de u , puis écrire la matrice de u dans une base adaptée \mathcal{E} :

$$[u]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

5 - On considère la matrice $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}BP = \dots$

(cocher l'unique bonne réponse)

a) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$