Nom : **Numéro d'étudiant-e :**

Test n$^{\mathrm{o}}$2

Mardi 11 février, de 8h30 à 9h20

Consigne. Vous devez répondre sur la feuille d'énoncé. Les calculatrices sont interdites. Chaque question compte 10 points, pour un total sur 50 points. Vous pouvez utiliser l'autre face de la feuille d'énoncé comme brouillon.

Barème de la question 1 : 10 pour quatre réponses justes, 6 pour trois réponses justes, 2 pour deux réponses justes, 0 pour une réponse juste ou moins.
Barème de la question 2 : 10 pour quatre réponses justes, 5 pour deux ou trois réponses justes, 0 pour une réponse juste ou moins.
Barème des questions 3, 4 et 5 : 10 pour la bonne réponse, 0 pour une réponse fausse.

1 - Soit $p : E \to E$ un projecteur. Pour chacune des propositions suivantes, indiquez si elle est vraies (c'est-à-dire toujours vraie) ou fausse (c'est-à-dire parfois fausse).

a) $p \circ p = p$ ☐ VRAI ☐ FAUX

b) $p \circ p = \mathrm{Id}_E$ ☐ VRAI ☐ FAUX

c) $E = \mathrm{inv}(p) \oplus \ker(p)$ ☐ VRAI ☐ FAUX

d) $E = \mathrm{im}(p) \oplus \ker(p)$ ☐ VRAI ☐ FAUX

2 - Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on note $F = \mathrm{vect}\{(1,0,1)\}$, $G = \mathrm{vect}\{(1,0,2),(1,1,1)\}$, et $\mathscr{C}$ la base canonique. Attribuer à chaque endomorphisme de E sa matrice, choisie parmi A, B, C, D.

a) La matrice dans $\mathscr{C}$ du projecteur sur F parallèlement à G est ____.

b) La matrice dans $\mathscr{C}$ du projecteur sur G parallèlement à F est ____.

c) La matrice dans $\mathscr{C}$ de la symétrie par rapport à F parallèlement à G est ____.

d) La matrice dans $\mathscr{C}$ de la symétrie par rapport à G parallèlement à F est ____.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \; ; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \; ; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \; ; \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

3 & 4 - Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P(1) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{vect}\{X-1, X^2 - X\}.$$

Cocher les propositions correctes (une dans chaque colonne).

☐ **a)** $\dim F = 3$, $\dim G = 2$.	☐ **a)** F et G sont supplémentaires dans E.
☐ **b)** $\dim F = \dim G = 2$.	☐ **b)** $F \cap G = \{0\}$ mais $F + G \neq E$.
☐ **c)** $\dim F = 4$, $\dim G = 1$.	☐ **c)** $F + G = E$ mais $F \cap G \neq \{0\}$.
☐ **d)** $\dim F = 3$, $\dim G = 1$.	☐ **d)** $F \cap G \neq \{0\}$ et $F + G \neq E$.

5 - Soit $u : E \to F$ une application linéaire, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de E, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ deux bases de F. On note $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$, $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{F}'}(u)$, $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}')$ et $Q = \mathrm{mat}_{\mathscr{F}}(\mathscr{F}')$. Cocher la formule correcte :

☐ **a)** $A = QBP^{-1}$;

☐ **b)** $A = P^{-1}BQ$;

☐ **c)** $A = PBQ^{-1}$;

☐ **d)** $A = Q^{-1}BP$;

☐ **e)** aucune de ces réponses.