Série 9
Endomorphismes auto-adjoints, formes quadratiques

Exercice 9.1 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $q : E \to \mathbb{R},\ P \mapsto \int_0^1 P(x)P'(x)\,dx$.

a) Montrer que q est une forme quadratique sur E, et préciser la forme polaire associée.

b) Calculer la matrice de la forme quadratique q dans la base canonique.

c) Trouver une base de diagonalisation pour la forme quadratique q.

Exercice 9.2 Soit A une matrice réelle de taille $n \times n$. On ne suppose pas A symétrique. Pour un vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n$, on note $q(x) = X^t \cdot A \cdot X$.

a) Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.
Indication : pour calculer la forme polaire, on pourra utiliser une formule de polarisation.

b) Calculer la matrice B de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, en fonction de A.

Exercice 9.3 Soit E un espace vectoriel euclidien, et $u : E \to E$ un endomorphisme symétrique. Pour tout $x \in E$, on note $q(x) = \langle x, u(x) \rangle$.

a) Montrer que q est une forme quadratique sur E, et donner sa forme polaire.

b) Si $\mathscr{E}$ est une base orthonormale de E, montrer que $[q]_{\mathscr{E}} = [u]_{\mathscr{E} \leftarrow \mathscr{E}}$.

c) Montrer par un exemple que le résultat de la question b) est faux si la base $\mathscr{E}$ n'est pas orthonormale.

d) Réciproquement, soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme symétrique $u : E \to E$ tel que : $\forall x \in E,\ q(x) = \langle x, u(x) \rangle$.
Indication : définir u par sa matrice dans une base orthonormale.

Exercice 9.4 L'objectif de cet exercice est de redémontrer le théorème de diagonalisation des formes quadratiques, sans utiliser le théorème spectral.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie (sans produit scalaire). Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique, et $q : E \times E \to \mathbb{R}$ sa forme polaire.

a) Pour cette question, on suppose que $\forall x \in E,\ q(x) = 0$. Montrer que la matrice de q dans n'importe quelle base de E est la matrice nulle (et donc, en particulier, une matrice diagonale).

b) Pour cette question, on suppose qu'il existe un vecteur $e_0 \in E$ tel que $q(e_0) \neq 0$. On note $F = \{x \in E \mid \varphi(e_0, x) = 0$. Montrer que F est un supplémentaire de la droite $\text{vect}\{e_0\}$ (*indication : utiliser la dimension de* F). Montrer que la restriction $q_{|F} : F \to \mathbb{R},\ x \mapsto q(x)$, est une forme quadratique sur F.

c) À l'aide des questions précédentes et en s'inspirant de la preuve du théorème spectral, démontrer par récurrence sur la dimension de E qu'il existe une base $\mathscr{E}$ de E telle que la matrice $[q]_{\mathscr{E}}$ soit diagonale.