MAT 2200 - Série 8 - Corrigé

Exercice 8.1

On se place dans l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(t)v(t)\,dt$.

On note $g : \begin{array}{l}[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t\end{array}$; ainsi $g \in E$ et $f \in E$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\langle f, g\rangle^2 \leq \|f\|^2 \cdot \|g\|^2$$

c'est-à-dire $\left(\int_0^1 t f(t)\,dt\right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2\,dt \cdot \int_0^1 t^2\,dt$.

Or $\int_0^1 t f(t)\,dt = 1$ et $\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$, donc $\int_0^1 f(t)^2\,dt \geq 3$.

De plus, $\int_0^1 f(t)^2\,dt = 3 \iff |\langle f, g\rangle| = \|f\| \cdot \|g\|$

$\iff f$ est colinéaire à g

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = 3t$ (car $\int_0^1 t f(t)\,dt = 1$).

Exercice 8.2

a) Fait en classe.

b) Notons $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2$, $P_3 = X^3$.

On pose :

$\rightarrow Q_0 = P_0 = 1$ $\qquad \|Q_0\|^2 = 4$

$\rightarrow Q_1 = P_1 - \frac{\langle Q_0, P_1\rangle}{\|Q_0\|^2} Q_0 = X - \frac{1+i}{2}$ $\qquad \|Q_1\|^2 = 2$

$\rightarrow Q_2 = P_2 - \frac{\langle Q_0, P_2\rangle}{\|Q_0\|^2} Q_0 - \frac{\langle Q_1, P_2\rangle}{\|Q_1\|^2} Q_1$

$= X^2 - \frac{i}{2} - (1+i)\left(X - \frac{1+i}{2}\right)$

$= X^2 - (1+i)X + \frac{i}{2}$ $\qquad \|Q_2\|^2 = 1$

$= \left(X - \frac{1+i}{2}\right)^2$

$\rightarrow Q_3 = \dots = \left(X - \frac{1+i}{2}\right)^3$ $\qquad \|Q_3\|^2 = \frac{1}{2}$

On pose ensuite $E_0 = \frac{1}{2} Q_0$, $E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} Q_1$, $E_2 = Q_2$, $E_3 = \sqrt{2} \cdot Q_3$,

et on obtient une base orthonormée $\mathcal{E} = (E_0, E_1, E_2, E_3)$.

c) Le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{C}_2[X]$ est :

$$p(X^3) = p(P_3) = \frac{\langle Q_0, P_3\rangle}{\|Q_0\|^2} Q_0 + \frac{\langle Q_1, P_3\rangle}{\|Q_1\|^2} Q_1 + \frac{\langle Q_2, P_3\rangle}{\|Q_2\|^2} Q_2$$

$$= X^3 - \left(X - \frac{1+i}{2}\right)^3$$

$$= \frac{3(1+i)}{2} X^2 - \frac{3i}{2} X + \frac{1-i}{4}.$$

Exercice 8.3

a) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Donc $\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{x}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{x}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{x}_3} \right\}$ est une base de F.

$\vec{V_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u_1} = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{V_2} = \vec{x_2} - \frac{\langle \vec{V_1}, \vec{x_2} \rangle}{\langle \vec{V_1}, \vec{V_1} \rangle}\vec{V_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-3}{10}\vec{V_1} = \begin{bmatrix} 3/10 \\ 1/10 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{U_2} = \frac{\sqrt{110}}{110}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{V_3} = \vec{x_3} - \frac{\langle \vec{V_1}, \vec{x_3} \rangle}{\langle \vec{V_1}, \vec{V_1} \rangle}\vec{V_1} - \frac{\langle \vec{V_2}, \vec{x_3} \rangle}{\langle \vec{V_2}, \vec{V_2} \rangle}\vec{V_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-9}{10}\vec{V_1} - \frac{3/10}{11/10}\vec{V_2}$

$= \begin{bmatrix} 9/10 - \frac{9}{110} \\ 3 - 27/10 - 3/110 \\ -3/11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/11 \\ 3/11 \\ -3/11 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} \right\|^2 = 220$ $\Rightarrow \vec{U_3} = \frac{\sqrt{55}}{110}\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix}$

Projecteur : $p(x) = \langle u_1, x \rangle \vec{u_1} + \langle u_2, x \rangle \vec{u_2} + \langle u_3, x \rangle \vec{u_3}$

$P(e_1) = \frac{\sqrt{10}}{10}\vec{u_1} + \frac{3\sqrt{110}}{110}\vec{u_2} + \frac{9\sqrt{55}}{110}\vec{u_3} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$P(e_2) = \frac{-3\sqrt{10}}{10}\vec{u_1} + \frac{\sqrt{110}}{110}\vec{u_2} + \frac{3\sqrt{55}}{110}\vec{u_3} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -3 \\ 19 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$P(e_3) = 0\,\vec{u}_1 + 10 \cdot \frac{\sqrt{110}}{110}\,\vec{u}_2 - \frac{3\sqrt{55}}{110}\,\vec{u}_3 = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 19 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$P(e_4) = 0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + 11 \cdot \frac{\sqrt{55}}{110}\,\vec{u}_3 = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Donc $[P]_{e \leftarrow e} = \dfrac{1}{20}\begin{bmatrix} 11 & -3 & 3 & 9 \\ -3 & 19 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 19 & -3 \\ 9 & 3 & -3 & 11 \end{bmatrix}$

b) Tous les vecteurs de F satisfont

$3x+y = z+3t \Leftrightarrow 3x+y-z-3t=0 \Leftrightarrow (x,y,z,t)\cdot(3,1,-1,-3)=0$

Donc $(3,1,-1,-3) \in F^{\perp}$.

Aussi, $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim F^{\perp} = 4-3 = 1$.

Donc $F^{\perp} = \text{vect}\{(3,1,-1,-3)\}$

$$= \text{vect}\left\{ \underbrace{\frac{\sqrt{5}}{10}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{=:\vec{w}_1} \right\}$$

$q(x) = \langle \vec{w}_1, x \rangle\, \vec{w}_1$

$q(e_1) = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $q(e_2) = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $q(e_3) = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $q(e_4) = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$[q]_{e \leftarrow e} = \dfrac{1}{20}\begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 & -9 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ -9 & -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

Comme $[p]_{e\leftarrow e} + [q]_{e\leftarrow e} = Id_4$

$\Rightarrow [p]_{e\leftarrow e} = Id_4 - [q]_{e\leftarrow e}$

$$= \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 11 & -3 & +3 & +9 \\ -3 & 19 & +1 & +3 \\ +3 & +1 & 19 & -3 \\ +9 & +3 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

c) Soit $x \in E$. Alors $x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{q(x)}_{\in F^\perp}$.

$f(x) = f(p(x) + q(x)) = f(p(x)) + f(q(x))$

$= 2p(x) - 5q(x)$

Ainsi, $[f]_{e\leftarrow e} = 2[p]_{e\leftarrow e} - 5[q]_{e\leftarrow e}$

$$= \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -23 & -9 & 9 & 27 \\ -9 & 33 & 3 & 9 \\ 9 & 3 & 33 & -9 \\ 27 & 9 & -9 & -23 \end{bmatrix}$$

d) S symétrie. $S = p - q$.

$$[S]_{e\leftarrow e} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 6 & 18 \\ -6 & 18 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 18 & -6 \\ 18 & 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 8.4

$$C_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ C_2 = \begin{bmatrix}1\\4\\9\end{bmatrix},\ C_3 = \begin{bmatrix}1\\8\\27\end{bmatrix}$$

$$\vec{V_1} = \vec{C_1} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{U_1} = \frac{\sqrt{14}}{14}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$\vec{V_2} = \vec{C_2} - \frac{\langle U_1, C_2\rangle}{\|U_1\|^2}\vec{U_1} = \vec{C_2} - \frac{18\sqrt{14}}{7}\vec{U_1} = \frac{18}{7}\begin{bmatrix}-11\\-8\\9\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{U_2} = \frac{\sqrt{266}}{266}\begin{bmatrix}-11\\-8\\9\end{bmatrix}$$

$$\vec{V_3} = \vec{C_3} - \frac{\langle \vec{U_1}, \vec{C_3}\rangle}{\|U_1\|^2}\cdot\vec{U_1} - \frac{\langle \vec{U_2}, \vec{C_3}\rangle}{\|U_2\|^2}\cdot\vec{U_2}$$

$$= \vec{C_3} - \frac{\sqrt{14}}{14}\cdot 98\cdot\vec{U_1} - \frac{\sqrt{266}}{266}\cdot 168\ \vec{U_2}$$

$$= \vec{C_3} - 7\sqrt{14}\,\vec{U_1} - \frac{\sqrt{266}}{19}\cdot 12\cdot\vec{U_2}$$

$$= \begin{bmatrix}1-7+132/19\\ 8-14+96/19\\ 27-21-\frac{108}{19}\end{bmatrix} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix}18\\-18\\6\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{U_3} = \frac{\sqrt{19}}{19}\begin{bmatrix}3\\-3\\1\end{bmatrix}$$

Donc $Q = \frac{\sqrt{266}}{266}\begin{bmatrix}\sqrt{19} & -11 & 3\sqrt{14}\\ 2\sqrt{19} & -8 & -3\sqrt{14}\\ 3\sqrt{19} & 9 & \sqrt{14}\end{bmatrix}$

$$R = \begin{bmatrix}\langle U_1, C_1\rangle & \langle U_1, C_2\rangle & \langle U_1, C_3\rangle\\ 0 & \langle U_2, C_2\rangle & \langle U_2, C_3\rangle\\ 0 & 0 & \langle U_3, C_3\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{14} & \frac{18}{7}\sqrt{14} & 7\sqrt{14}\\ 0 & \frac{1}{7}\sqrt{266} & \frac{12}{19}\sqrt{266}\\ 0 & 0 & 6\sqrt{19}/19\end{bmatrix}$$

EXERCICE 8.5

a) Supposons que $F \subseteq G$.

Soit $\vec{v} \in G^\perp$. Soit $\vec{u} \in F \subseteq G$.

Alors $\vec{v} \perp \vec{u}$ car $\vec{u} \in G$ en particulier.

Donc $\vec{v} \in F^\perp$ car $\vec{v} \perp \vec{u}$ $\forall \vec{u} \in F$.

b) $(F+G)^\perp \subseteq F^\perp \cap G^\perp$

Soit $\vec{v} \in (F+G)^\perp$. Montrons que $\vec{v} \in F^\perp$.

Soit $\vec{f} \in F$. Alors $\vec{f} \in F+G$ en particulier.

Donc $\vec{v} \perp \vec{f}$ $\forall \vec{f} \in F$. Donc $\vec{v} \in F^\perp$

De même, $\vec{v} \in G^\perp$. Donc $\vec{v} \in F^\perp \cap G^\perp$.

$(F+G)^\perp \subseteq F^\perp \cap G^\perp$

$F^\perp \cap G^\perp \subseteq (F+G)^\perp$

Soit $\vec{v} \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $\vec{u} \in F+G$, $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$, $\vec{f} \in F$, $\vec{g} \in G$.

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{f}+\vec{g} \rangle = \underbrace{\langle \vec{v}, \vec{f} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \vec{v}, \vec{g} \rangle}_{=0} = 0$$

Donc $\vec{v} \perp \vec{u}$ $\forall \vec{u} \in F+G$. $\vec{v} \in (F+G)^\perp$

Enfin : $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$. En dimension finie $(F^\perp)^\perp = F$

Il suffit de remarquer que

$$(F \cap G)^\perp = (F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp})^\perp \overset{(a)}{=} ((F^\perp + G^\perp)^\perp)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

$(F^{\perp})^{\perp} = F$

$(F^{\perp})^{\perp} \subseteq F$

Soit $\vec{v} \in (F^{\perp})^{\perp}$.

Alors $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$, $v_1 \in F$, $v_2 \in F^{\perp}$.

Donc on doit avoir $\langle \vec{v} ; v_2 \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle v_1 + v_2 , v_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle v_1 , v_2 \rangle}_{=0} + \|v_2\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \|v_2\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \|v_2\|^2 = 0$$

Donc $\vec{v} = v_1 \in F$.

$F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$

Soit $\vec{v} \in F$, $u \in F^{\perp}$. Alors $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$. Donc $\vec{v} \in (F^{\perp})^{\perp}$.

C) Non pour $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$, car en dimension infinie, on n'a pas $(F^{\perp})^{\perp}$.

E les fct. continues sur $[0,1]$

F les polynômes sur $[0,1]$.