Série 8

Produit scalaire, projection orthogonale, procédé de Gram-Schmidt

Exercice 8.1 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 tf(t)\,dt = 1$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^2\,dt \geqslant 3$, et préciser dans quel cas il y a égalité.

Exercice 8.2 Soit $E = \mathbb{C}_3[X]$. Pour P, Q deux polynômes, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \overline{P(0)}Q(0) + \overline{P(1)}Q(1) + \overline{P(1+i)}Q(1+i) + \overline{P(i)}Q(i).$$

a) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

b) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ pour obtenir une base orthonormale (E_0, E_1, E_2, E_3).

c) Calculer le projeté orthogonal du vecteur X^3 sur le sous-espace vectoriel $F = \mathbb{C}_2[X]$.

Exercice 8.3 On note $E = \mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire canonique.
Soit $F = \left\{ [x\ y\ z\ t]^t \mid 3x + y = z + 3t \right\}$.

a) Donner une base de F, puis utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour en déduire une base orthonormale de F. Calculer la matrice dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $p : E \to E$, le projecteur orthogonal sur F.

b) (sans utiliser la question a) Donner une base orthonormale de $F^\perp$. Calculer la matrice dans $\mathscr{C}$ de $q : E \to E$, le projecteur orthogonal sur $F^\perp$. En déduire la matrice dans $\mathscr{C}$ de p.

c) Soit $f : E \to E$ l'application telle que $f_{|F} = 2\mathrm{Id}_F$ et $f_{|F^\perp} = -5\mathrm{Id}_{F^\perp}$. Calculer la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$.

d) Soit $s : E \to E$ la symétrie orthogonale par rapport à F. Calculer la matrice de s dans la base $\mathscr{C}$.

Exercice 8.4 Donner la décomposition QR de la matrice inversible $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$.

Exercice 8.5 Soit E un espace vectoriel euclidien, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que $F \subset G$ implique $G^\perp \subset F^\perp$.

b) Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

c) Ces propriétés restent-elles vraies en dimension infinie ?