MAT-2200 - Série 7 - Corrigé

Exercice 7.1

a) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $u : E \longrightarrow E$ diagonalisable.

Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les valeurs propres de u.

Dans une base $\mathcal{E}$ bien choisie, on a :

$$[u]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} = A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_k & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow m_1 \\ \vdots \\ \updownarrow m_k \end{matrix}$$

Alors $\chi_u = \chi_A = (\alpha_1 - X)^{m_1} \dots (\alpha_k - X)^{m_k}$, donc χ_u est scindé.

En notant $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$, on lit dans la matrice que $E_{\alpha_1}(u) = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_{m_1}\}$ donc $\dim E_{\alpha_1}(u) = m_1$.

De plus $E_{\alpha_1}(u) \subseteq E^{car}_{\alpha_1}(u)$, et $\dim E^{car}_{\alpha_1}(u) = m_1$ (vu en classe).

Donc, par dimension, $E_{\alpha_1}(u) = E^{car}_{\alpha_1}(u)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\begin{cases} \text{(i) } \chi_u \text{ est scindé} \\ \text{(ii) pour toute racine } \alpha \text{ de } \chi_u,\ E_\alpha(u) = E^{car}_\alpha(u). \end{cases}$

Comme χ_u est scindé, on a vu en classe (Th. de Cayley-Hamilton et Th. de décomposition des noyaux) que :

$$E = E^{car}_{\alpha_1}(u) \oplus \dots \oplus E^{car}_{\alpha_k}(u),$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont les racines distinctes de χ_u.

Donc $$E = E_{\alpha_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\alpha_k}(u),$$

et u est diagonalisable.