MAT-2200 - Série 6 - Corrigé

Exercice 6.1

a) $$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ 1 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix}$$ (développement par rapport à la 2ème ligne)

$$= -(1-x+1) - x(-2x+x^2)$$

$$= (2-x)(x^2-1).$$

La matrice A possède trois valeurs propres: $\alpha=-1$, $\beta=1$, $\gamma=2$.

b) Les trois sous-espaces propres $E_\alpha(A)$, $E_\beta(A)$ et $E_\gamma(A)$ sont chacun de dimension au moins 1, et sont en somme directe. Comme cette somme directe est contenue dans $\mathbb{R}^3$, il s'ensuit que

$$\dim E_\alpha(A) = \dim E_\beta(A) = \dim E_\gamma(A) = 1,$$

et $E_\alpha(A) \oplus E_\beta(A) \oplus E_\gamma(A) = \mathbb{R}^3$.

c) On calcule $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$.

Notons $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $u_A : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X \longmapsto AX \end{array}$, et $\mathscr{E} = \left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$

Alors $$[u_A]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathscr{E}} \cdot [u_A]_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{E}} \cdot P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathcal{E}},$$

c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$,

avec $P = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 6.2

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$. Toutes les colonnes de A sont égales, donc $\mathrm{rang}\, A = 1$ et $\mathrm{im}\, A = \mathrm{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right\}$.

Pour $X = \begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, il est clair que $X \in \ker A \iff x_1 + \cdots + x_n = 0$.

$\dim(\ker A) = n - \mathrm{rang}\, A = n-1$.

b). On calcule $A.\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n\\ \vdots\\ n\end{bmatrix} = n.\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$.

Comme $\operatorname{im} A = \operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\right\}$, il s'ensuit que $\forall X \in \operatorname{im} A,\ AX = nX$.

Réciproquement, si $X \in E_n(A)$, alors $AX = nX$ donc $X = A.(\frac{1}{n}X) \in \operatorname{im} A$

Donc $\operatorname{im} A = E_n(A)$ est le sous-espace propre pour la valeur propre n.

- Par définition, $\ker A = E_0(A)$.
- ~~En fait~~ Les sous espaces propres $E_n(A)$ et $E_0(A)$ sont en somme directe. De plus $\dim E_n(A) + \dim E_0(A) = 1 + (n-1) = n$,

donc $E_n(A) \oplus E_0(A) = \mathbb{R}^n$.

Ainsi A est diagonalisable et n'a pas d'autre valeur propre que 0 et n.

c) On prend $e_1 = \begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$, ..., $e_i = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ ← 1ère ligne ← ième ligne, ..., $e_n = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$.

Alors (e_1) est une base de $\operatorname{im} A$,

$(e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\ker A$,

donc $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.

En notant $P = \begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & 1 & \ddots & (0)\\ 1 & (0) & & 1\end{bmatrix} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}$ et $D = \begin{bmatrix}n & 0 & (0)\\ (0) & \ddots & \\ (0) & & 0\end{bmatrix}$,

on trouve $D = PAP^{-1}$ (cf 6.1 c)).

<u>Exercice 6.3</u>

a) $u^{n-1} \neq \tilde{0}$ donc $\ker(u^{n-1}) \subsetneq E$: il existe $x \in E \setminus \ker(u^{n-1})$.

b) Soient $\lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0$ des scalaires tels que $\lambda_{n-1}e_{n-1} + \dots + \lambda_0 e_0 = 0_E$ (*

Alors $u^{n-1}(\lambda_{n-1}e_{n-1} + \dots + \lambda_0 e_0) = u(0_E) = 0_E$.

Or $u^{n-1}(e_k) = u^{n-1} \circ u^k(x) = u^{n+k-1}(x) = 0_E$ dès que $n+k-1 \geq n$, c'est-à-dire $k \geq 1$.

Donc $\lambda_{n-1}u^{n-1}(e_{n-1}) + \dots + \lambda_1 u^{n-1}(e_1) + \lambda_0 u^{n-1}(e_0) = 0_E$

devient $0_E + \dots + 0_E + \lambda_0 u^{n-1}(x) = 0_E$, et $\lambda_0 = 0$ car $u^{n-1}(x) \neq 0$.

On recommence en appliquant $u^{n-2}, \dots, u$ puis Id_E à la relation $(*)$, et on prouve que $\lambda_{n-2} = \dots = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$.

Ainsi la famille $\mathcal{E} = (e_{n-1}, \dots, e_0)$ est libre.

Comme elle contient n vecteurs et $n = \dim E$, $\mathcal{E}$ est donc une base de E.

c)
$$[u]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6.4

a). Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on calcule:

$$u(P) = P(0).(X^2-X) + P(1).(X^2-1)$$
$$u \circ u(P) = [u(P)](0).(X^2-X) + [u(P)](1).(X^2-1)$$
$$= -P(1).(X^2-X)$$
$$u \circ u \circ u(P) = [u \circ u(P)](0).(X^2-X) + [u \circ u(P)](1).(X^2-1)$$
$$= 0$$

Ainsi $u^3 = \tilde{0}$, et u est nilpotente.

- $\operatorname{rang} u^0 = \dim \mathbb{R}_2[X] = 3$.
- Clairement, $\operatorname{Im}(u) \subseteq \operatorname{Vect}\{X^2-X, X^2-1\}$.
  De plus, $u(1-X) = X^2-X$ et $u(X) = X^2-1$, donc $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}\{X^2-X, X^2-1\}$

  Ainsi $\operatorname{rang} u = 2$.
- $\operatorname{Im}(u^2) \subseteq \operatorname{Vect}\{X^2-X\}$ et $u^2(-X) = X^2-X$, donc $\operatorname{Im}(u^2) = \operatorname{Vect}\{X^2-X\}$.

  Ainsi $\operatorname{rang} u^2 = 1$.
- $\operatorname{rang} u^3 = \operatorname{rang} \tilde{0} = 0$.

b) Prenons $\mathcal{E} = (P_3, P_2, P_1)$ avec $P_1 = X$, $P_2 = u(X) = X^2-1$ et $P_3 = u(P_2) = X - X^2$.

Alors $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et $[u]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 6.5

a) On calcule $N^2 = 0$.

En notant L_1, L_2, L_3, L_4 les lignes de N, on trouve

$$L_3 = 2L_2 - L_1 \quad \text{et} \quad L_4 = 3L_2 - 2L_1.$$

De plus L_1 et L_2 ne sont pas colinéaires donc $\operatorname{rang} N = 2$.

D'où $\quad \operatorname{rang} N^0 = 4 \xrightarrow[-2]{} \operatorname{rang} N^1 = 2 \xrightarrow[-2]{} \operatorname{rang} N^2 = 0$

Le diagramme de Young est $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$.

b) Par le théorème du rang, $\dim \ker N = 2$.

Or $N^2 = 0$ donc $\operatorname{im} N \subseteq \ker N$, donc $\operatorname{im} N = \ker N$ par dimension.

Notons $\mathcal{E} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et $u : \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ X \mapsto NX \end{array}$

$u(c_1)$ et $u(c_2)$ ne sont pas colinéaires (ce sont les deux première colonnes de N, donc forment une base de $\operatorname{im} N = \ker N$.

D'après le cours, il s'ensuit que $\mathscr{E} = (u(c_1), c_1, u(c_2), c_2)$ est une base de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{c|c|c|} \cline{2-3} 0 & u(c_1) & c_1 \\ \cline{2-3} 0 & u(c_2) & c_2 \\ \cline{2-3} \end{array}$$

(on peut aussi le montrer à la main).

Notons $N' = [u]_{\mathscr{E} \leftarrow \mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, et $P = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}$.

Par la formule de changement de base,

$$N' = P^{-1} N P \qquad \text{(cf 6.1 c)).}$$