Série 6
Endomorphismes diagonalisables, endomorphismes nilpotents

Exercice 6.1 Soit la matrice réelle $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A, puis ses valeurs propres α, β et γ.
b) Sans calculer les sous-espaces propres de A, montrer que $\mathbb{R}^3 = E_\alpha(A) \oplus E_\beta(A) \oplus E_\gamma(A)$.
c) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 6.2 Soit $n \geqslant 1$ un entier.
Avant de traiter le cas général, vous pouvez résoudre cet exercice dans le cas $n = 4$.
On considère la matrice réelle A de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
a) Donner une base de $\operatorname{im} A$ et une équation de $\ker A$. Préciser la dimension de ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
b) Montrer que $\operatorname{im} A$ est un sous-espace propre de A pour une valeur propre λ à préciser. Que dire de $\ker A$? Montrer que l'endomorphisme $u_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est diagonalisable, en utilisant la définition avec les sous-espaces propres.
c) Donner une base $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $e_1, \dots, e_n$ soient tous des vecteurs propres de A. En déduire une matrice P telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 6.3 Soit $n \geqslant 1$ un entier.
Avant de traiter le cas général, vous pouvez résoudre cet exercice dans le cas $n = 4$.
Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme tel que $u^n = \tilde{0}$ mais $u^{n-1} \neq \tilde{0}$.
a) Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E \setminus \ker(u^{n-1})$.
b) On note $e_0 = x$, $e_1 = u(x)$, $e_2 = u^2(x)$, ... $e_{n-1} = u^{n-1}(x)$. Montrer que la famille $\mathscr{E} = (e_{n-1}, \dots, e_1, e_0)$ est une base de E. L'ordre des vecteurs est volontaire, en vue de la question suivante.
[Indication : on peut commencer par montrer que $\mathscr{E}$ est libre, en s'inspirant du cours sur les endomorphismes nilpotents.]
c) Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{E}$.

Exercice 6.4 Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application linéaire définie en posant :

$$u(P) = P(0).(X^2 - X) + P(1).(X^2 - 1).$$

a) Montrer que u est nilpotente. Calculer les rangs de u^0, u^1, u^2, u^3.
b) Trouver une base $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ telle que $[u]_{\mathscr{E} \leftarrow \mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 6.5 Soit la matrice réelle $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Montrer que la matrice N est nilpotente, et tracer son diagramme de Young.
b) Trouver une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}NP$ soit particulièrement simple (c'est-à-dire de la forme vue dans le cours sur les endomorphismes nilpotents).