MAT 2200 - Série 5 - Corrigé

Exercice 5.1

$E = \mathbb{C}_4[X]$, $F = \{P \in E \mid P(-1) = P(0) = P(1) = 0\}$,

$G = \{P \in E \mid P(i) = P(0) = P(-i) = 0\}$, $H = \mathrm{Vect}\{1\}$.

a). Soit $P \in F$. Alors $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$, donc P est un multiple de $(X+1)X(X-1)$, c'est-à-dire de $X^3 - X$. Comme $\deg P \leq 4$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = (aX+b)(X^3-X)$. Ainsi $F \subseteq \mathrm{Vect}\{X^4-X^2, X^3-X\}$, l'inclusion réciproque étant immédiate.

- De même, $G = \mathrm{Vect}\{X^4+X^2, X^3+X\}$.
- Notons $E_1 = X^4 - X^2$, $E_2 = X^3 - X$, $E_3 = X^4 + X^2$, $E_4 = X^3 + X$, $E_5 = 1$.

On a une famille $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5)$.

On a facilement, si $P = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 \in \mathbb{C}_4[X]$,

$$P = aE_5 + \frac{b}{2}(E_4 - E_2) + \frac{c}{2}(E_3 - E_1) + \frac{d}{2}(E_4 + E_2) + \frac{e}{2}(E_3 + E_1).$$

La famille $\mathcal{E}$ est donc génératrice. Comme $\mathcal{E}$ compte 5 éléments et $\dim E = 5$, $\mathcal{E}$ est une base de E. Il s'ensuit que:

$$E = \mathrm{Vect}\{E_1, E_2\} \oplus \mathrm{Vect}\{E_3, E_4\} \oplus \mathrm{Vect}\{E_5\} = F \oplus G \oplus H.$$

b) Par construction, on a $u(E_1) = 2E_1$, $u(E_2) = 2E_2$, $u(E_3) = -2E_3$, etc.

Alors
$$u(1) = u(E_5) = 0$$
$$u(X) = u\left(\tfrac{1}{2}(E_4 - E_2)\right) = \tfrac{1}{2}\left[-2E_4 - 2E_2\right] = -2X^3$$
$$u(X^2) = \cdots = -2X^4$$
$$u(X^3) = \cdots = -2X$$
$$u(X^4) = \cdots = -2X^2$$

d'où $[u]_{e \leftarrow e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

c) Clairement $[u]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & & & & (0) \\ & 2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & -2 & \\ (0) & & & & 0 \end{bmatrix}$, donc $(u - 2\mathrm{Id}_E) \circ (u + 2\mathrm{Id}_E) \circ u = \tilde{0}$.

Ainsi $(X-2)(X+2)X = X^3 - 4X$ est un polynôme annulateur de u.

Exercice 5.2

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 13 \\ 6 & 17 & 34 \\ 14 & 45 & 94 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 23 & 69 & 141 \\ 57 & \cdots & \cdots \\ 153 & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$

b) Si $A^3 = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$, alors en considérant les termes en position $(1,1)$, $(1,2)$ et $(2,1)$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 23 \\ \beta + 7\gamma = 69 \\ \beta + 6\gamma = 57 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \alpha = 23 - \beta - 3\gamma = 2 \\ \beta = 57 - 6\gamma = -15 \\ \gamma = 69 - 57 = 12 \end{cases}$$

On calcule alors $2I_3 - 15A + 12A^2$, et on vérifie que $A^3 = 2I_3 - 15A + 12A^2$.

c) $P = X^3 - 12X^2 + 15X - 2$ est un polynôme annulateur de A.

Son polynôme caractéristique est $\chi_A = -P$.

Exercice 5.3

$E = F \oplus G$, $u : E \longrightarrow E$ stabilise F et G, $u_{|F}$ est un automorphisme de F,
$u_{|G}$ ——————————— de G.

a)
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. Comme u est linéaire, on a alors $u(x) = u(y) + u(z)$. Or $u(x) = 0_E$, donc $u(y) = -u(z)$. De plus F et G sont stables par u, donc $u(y) \in F$ et $u(z) \in G$, donc $u(y) = -u(z) \in F \cap G = \{0\}$. Ainsi $u(y) = 0$ et $u(z) = 0$. Mais $u_{|F}$ et $u_{|G}$ sont injectives, donc $y = z = 0$, et $x = y + z = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$: u est injective.
- Soit $x \in E$. Il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. Or $u_{|F} : F \to F$ et $u_{|G} : G \to G$ sont surjectives, donc il existe $y' \in F$ et $z' \in G$ tels que $y = u(y')$ et $z = u(z')$. Alors $x = u(y' + z')$: u est surjective.
- Ceci prouve que u est une bijection, donc un automorphisme.

b) Soit $\mathcal{F}$ une base de F et $\mathcal{G}$ une base de G. Alors $\mathcal{E} = \mathcal{F} \sqcup \mathcal{G}$ est une base de E, et $[u]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, avec $A = [u_{|F}]_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}}$ et $B = [u_{|G}]_{\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G}}$.

Donc $\det(u) = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det A . \det B = \det(u_{|F}) . \det(u_{|G}) \neq 0$, car $u_{|F}$ et $u_{|G}$ sont bijectives. Il s'ensuit que u est aussi bijective.