Série 5

Sommes directes, polynômes annulateurs

Exercice 5.1 Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}_4[X]$, on considère les sous espace vectoriels :

$$\begin{aligned} &F = \{P \in E \mid P(-1) = P(0) = P(1) = 0\} \\ &G = \{P \in E \mid P(i) = P(0) = P(-i) = 0\} \\ &H = \text{vect}\{1\} \end{aligned}$$

a) Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.
b) Soit $u : E \to E$ l'unique application telle que $u_{|_F} = 2\mathrm{Id}_F$, $u_{|_G} = -2\mathrm{Id}_G$, et $u_{|H} = \tilde{0}$. Calculer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{C}_4[X]$.
c) Trouver un polynôme annulateur (idéalement de degré 3) de l'endomorphisme u.
[Indication pour le c) : ce sera plus facile en écrivant la matrice de u dans une base «adaptée».]

Exercice 5.2 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$.
a) Calculer les matrices A^2 et A^3.
b) Trouver des nombres (entiers) α, β, γ tel que $A^3 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$. En déduire un polynôme annulateur de la matrice A.
c) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et comparer.

Exercice 5.3 Soit $u : E \to E$ un endomorphisme. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E = F \oplus G$, que F et G sont stables par u, que la restriction $u_{|F}$ est un automorphisme de F, et que la restriction $u_{|G}$ est un automorphisme de G.

Montrer que u est un automorphisme de E de deux manières :
a) à partir de la définition d'une bijection ;
b) en calculant le déterminant de la matrice de u dans une base adaptée (en supposant que E est de dimension finie).