MAT-2200 - Série 4 - Corrigé

Exercice 4.1

F, G, H sous-espaces vectoriels de E.

a) On suppose $F \cap G = F \cap H$, $F + G = F + H$ et $G \subseteq H$.

Soit $x \in H$. Alors $x \in F + H$, donc $x \in F + G$: il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. Or $G \subseteq H$, donc $z \in H$. De plus H est un sous-espace vectoriel, donc $x - z \in H$. Mais alors $x - z = y \in F \cap H$, donc $y \in F \cap G$. Il s'ensuit que $x = y + z \in G$, car G est un sous-espace vectoriel de E. Ainsi $H \subseteq G$, donc $G = H$.

b) Si $E = F \oplus G = F \oplus H$, alors $F \cap G = F \cap H = \{0\}$ et $F + G = F + H = E$. Si $G \subseteq H$, il découle du a) que $G = H$.

c) • Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = H = \mathbb{R}$ et $F = G = \{0\}$, alors $F \cap G = F \cap H$ et $G \subseteq H$, mais $G \neq H$.

• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = F = H = \mathbb{R}$ et $G = \{0\}$, alors $F + G = F + H$ et $G \subseteq H$, mais $G \neq H$.

• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{R}$, $G = i\mathbb{R}$ et $H = (1+i)\mathbb{R}$, alors $F \cap G = F \cap H$, $F + G = F + H$ ~~mais~~ $G \neq H$.

Exercice 4.2

Corrigé en classe.

Exercice 4.3

Corrigé en classe.

Exercice 4.4

a) Notons $e_1 = (1,0,0,1)$, $e_2 = (0,1,1,0)$, $e_3 = (1,-1,1,-1)$ et $e_4 = (1,1,-1,-1)$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0$. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 & \frac{1}{2}(L_1 + L_4) \\ \lambda_2 = 0 & \frac{1}{2}(L_2 + L_3) \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & \frac{1}{2}(L_1 - L_4) \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0 & \frac{1}{2}(L_3 - L_2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 & \\ \lambda_2 = 0 & \\ \lambda_3 = 0 & \frac{1}{2}(L_3' + L_4') \\ \lambda_4 = 0 & \frac{1}{2}(L_3' - L_4') \end{cases}$$

La famille $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est donc libre dans $\mathbb{R}^4$, qui est de dimension 4 sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Il s'ensuit que

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\} \oplus \mathrm{Vect}\{e_3, e_4\} = F \oplus G.$$

b) Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. On cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$. Comme en a), on trouve :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = x_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = x_2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = x_3 \\ \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4 = x_4 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \lambda_1 = (x_1 + x_4)/2 \\ \lambda_2 = (x_2 + x_3)/2 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = (x_1 - x_4)/2 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = (x_3 - x_2)/2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda_1 = (x_1 + x_4)/2 \\ \lambda_2 = (x_2 + x_3)/2 \\ \lambda_3 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)/4 \\ \lambda_4 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)/4 \end{cases}$$

On a alors $p(x) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$.

En notant $\mathcal{E} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on calcule :

$$\begin{aligned} p(c_1) &= \tfrac{1}{2} e_1 = (\tfrac{1}{2}, 0, 0, \tfrac{1}{2}) \\ p(c_2) &= \tfrac{1}{2} e_2 = (0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0) \\ p(c_3) &= \tfrac{1}{2} e_2 \\ p(c_4) &= \tfrac{1}{2} e_1 \end{aligned} \qquad \text{d'où} \quad A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1/2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

c) En prenant $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on a $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Notons $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix} = P^{-1}$,

on sait que $A = P\,B\,Q = PAP^{-1}$.

<u>Exercice 4.5</u>

• Soient $p, q : E \longrightarrow E$ linéaires tels que $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $p \circ q = 0$.

Alors, en notant $f = p + q - q \circ p$, on a pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(p(x) + q(x) - q \circ p(x)) = f(p(x)) + f(q(x)) - f(q \circ p(x)) \quad \text{car } f \text{ est linéaire.} \\ &= \big[p(p(x)) + q(p(x)) - q \circ p(p(x))\big] + \big[p(q(x)) + q(q(x)) - q \circ p(q(x))\big] \\ &\qquad - \big[p(q \circ p(x)) + q(q \circ p(x)) - q \circ p(q \circ p(x))\big] \\ &= p(x) + q \circ p(x) - q \circ p(x) + 0 + q(x) - 0 - 0 + q \circ p(x) - 0 \\ &\qquad \text{car } p^2 = p,\ q^2 = q \text{ et } p \circ q = 0. \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Donc f est un projecteur.

- Soit $x \in \mathrm{Inv}(f)$. Alors $x = f(x) = p(x) + q(x - p(x))$,

  donc $x \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Inv}(p) + \mathrm{Inv}(q)$.

  Réciproquement, soit $x = y + z$, avec $y \in \mathrm{Inv}(p)$ et $z \in \mathrm{Inv}(q)$.

  Alors $f(x) = p(y) + p(z) + q(y) + q(z) - q \circ p(y) - q \circ p(z)$.

  Or $p(z) = p(q(z)) = 0$ car $p \circ q = 0$. Et $p(y) = y$, d'où :

  $$f(x) = y + 0 + q(y) + z - q(y) - 0 = y + z = x.$$

  Ainsi $x \in \mathrm{Inv}(f)$, donc $\boxed{\mathrm{Inv}(f) = \mathrm{Inv}(p) + \mathrm{Inv}(q)}$.

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = p(x) + q(x) - q \circ p(x) = 0$,

  donc $p(x) = q(p(x) - x)$. Or $p(x) \in \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Inv}(p)$, et

  $q(p(x) - x) \in \mathrm{Im}(q) \subseteq \mathrm{Ker}(p)$ car $p \circ q = \tilde{0}$. Donc $p(x) \in \mathrm{Inv}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \{0\}$.

  Alors $q \circ p(x) = 0$, et enfin $q(x) = 0$. D'où $x \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.

  Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$, alors $f(x) = 0$.

  Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)}$.

<u>Exercice 4.6</u>

Soit $s : E \to E$ linéaire tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Soit $p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s)$.

Alors $p : E \to E$ est linéaire et, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} p \circ p(x) &= p\left(\tfrac{1}{2}(x + s(x))\right) = \tfrac{1}{2} p(x) + \tfrac{1}{2} p(s(x)) \\ &= \tfrac{1}{4}\left[x + s(x) + s(x) + s \circ s(x)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}(x + s(x)) \qquad \text{car } s \circ s(x) = x \\ &= p(x). \end{aligned}$$

Donc $p^2 = p$, c'est-à-dire que p est un projecteur.

On obtient alors $2p = \mathrm{Id}_E + s$, d'où $s = p - (\mathrm{Id}_E - p)$: c'est la formule qui définit la symétrie par rapport à $\mathrm{Inv}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 4.7

F, G sev de E ; $B = F \cap G$; $F = A \oplus B$; $G = B \oplus C$.

a) Soit $u : \begin{array}{l} A \times B \times C \longrightarrow E \\ (a,b,c) \longmapsto a+b+c \end{array}$. On sait que u est une application linéaire.

- Soit $(a,b,c) \in \operatorname{Ker} u$. Alors $a+b+c=0$, donc $a=-b-c$. Or $a \in F$, $b \in G$ et $c \in G$, donc $a = -b-c \in F \cap G = B$. Mais alors $a \in A \cap B = \{0\}$, donc $a=0$. Alors $c=-b \in B \cap C$, car $c \in C$ et $b \in B$. Mais $B \cap C = \{0\}$, donc $b=c=0$. On a prouvé que $\operatorname{Ker} u = \{0_{A \times B \times C}\}$.
- Clairement, $\operatorname{im}(u) \subseteq F + (F \cap G) + G \subseteq F+G$.
  Réciproquement, soit $x \in F+G$. Alors il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y+z$. Comme $F = A+B$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $y = a+b$. Comme $G = B+C$, il existe $b' \in B$ et $c \in C$ tels que $z = b'+c$. Alors $x = a + (b+b') + c = u(a, b+b', c) \in \operatorname{im} u$.
  Donc $\operatorname{im}(u) = F+G$, et :

$$F+G = A \oplus B \oplus C.$$

b) Si F et G sont de dimensions finies, alors A, B et C sont de dimensions finies, donc aussi $A \oplus B \oplus C = F+G$. De plus,

$$\begin{aligned} \dim(F+G) &= \dim A + \dim B + \dim C \\ &= (\dim F - \dim B) + \dim B + (\dim G - \dim B) \\ &= \dim F + \dim G - \dim F \cap G. \end{aligned}$$