Série 4

Supplémentaires, projecteurs et symétries

Exercice 4.1 Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
a) On suppose $F \cap G = F \cap H$, $F + G = F + H$ et $G \subseteq H$. Montrer que $G = H$.
[Indication : utiliser le fait que $H \subseteq F + H$.]
b) En déduire que, si G et H sont deux supplémentaires d'un même sous-espace F tels que $G \subset H$, alors $G = H$.
c) Montrer par des exemples que le résultat du a) est faux si on supprime l'une des trois hypothèses.
[Indication : faire des dessins en dimension 2.]

Exercice 4.2 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $F = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, et on pose :

$$G = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\} \qquad ; \qquad H = \{g : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

a) Montrer que G et H sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans F.
b) Pour une fonction $f \in F$, expliciter le projeté g de f sur G parallèlement à H, et le projeté h de f sur H parallèlement à G.

Exercice 4.3 Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \frac{1}{3}(x + 2y + 2z, 2x + y - 2z, 2x - 2y + z)$. L'application u est-elle linéaire ? Est-ce un projecteur, une symétrie ? Si oui, préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 4.4 Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces $F = \mathrm{vect}\{(1,0,0,1), (0,1,1,0)\}$ et $G = \mathrm{vect}\{(1,-1,1,-1), (1,1,-1,-1)\}$.
a) Montrer que F et G sont supplémentaires.
b) Calculer la matrice A (dans la base canonique $\mathscr{C}$) du projecteur p sur F parallèlement à G.
c) Sans utiliser la question b), choisir une base $\mathscr{E}$ de E telle que la matrice B de p dans $\mathscr{E}$ soit particulièmement simple. Puis utiliser la formule de changement de base pour retrouver la matrice A de la question b).

Exercice 4.5 Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $p \circ q = 0$. On pose $f = p + q - q \circ p$. Montrer que f est un projecteur de E ; déterminer son noyau et son image.
[Indication : montrer que $\mathrm{inv}\, f = \mathrm{inv}\, p + \mathrm{inv}\, q$ *et* $\ker f = \ker p \cap \ker q$*.]*

Exercice 4.6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (avec $\mathbb{K}$ un corps tel que $1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$). Soit $s : E \to E$ un endomorphisme linéaire tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Montrer que s est une symétrie.
[Indication : poser $p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s)$, et montrer que p est un projecteur.]

Exercice 4.7 Soient F et G deux sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note $B = F \cap G$. Soit A un supplémentaire de B dans F, et C un supplémentaire de B dans G (si E est de dimension infinie, on admet que A et C existent).
a) Montrer que $F + G = A \oplus B \oplus C$.
b) Si F et G sont de dimensions finies, montrer que la somme $F + G$ est de dimension finie, et donner une formule pour la dimension de $F + G$ en fonction des dimensions de F, G et $F \cap G$.

Exercice 4.8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E.
a) Montrer que $(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C$.
b) Si E est de dimension finie, en déduire que :
$\dim(A+B+C) \leqslant \dim A + \dim B + \dim C - \dim(A \cap B) - \dim(B \cap C) - \dim(C \cap A) + \dim(A \cap B \cap C)$.
c) Montrer par un exemple que l'inégalité peut être stricte.