MAT 2200 - Série 2 - Corrigé

Exercice 2.1

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n = \tilde{0}$.

Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Supposons $\lambda_i \neq 0$. Alors $f_i = \frac{1}{\lambda_i}\left[\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_{i-1} f_{i-1} + \lambda_{i+1} f_{i+1} + \dots + \lambda_n f_n\right]$.

Or toutes les fonctions du membre de droite sont dérivables au point i, donc f_i est dérivable au point i. Mais ceci est une contradiction, car les dérivées à gauche et à droite du point i sont différentes pour la fonction f_i. Donc $\lambda_i = 0$, quel que soit $i \in \{0, \dots, n\}$.

La famille $f_0, \dots, f_n$ est donc libre.

Exercice 2.2

$$u : \mathbb{C}_3[X] \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad P \longmapsto (P(1), P'(0), P''(2)).$$

a) Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in (\mathbb{C}_3[X])^2$, on a :

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= \left([\lambda P + \mu Q](1), [\lambda P + \mu Q]'(0), [\lambda P + \mu Q]''(2)\right) \\ &= \lambda (P(1), P'(0), P''(2)) + \mu (Q(1), Q'(0), Q''(2)) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q). \end{aligned}$$

Donc l'application u est linéaire.

$u(1) = (1, 0, 0)$

$u(X) = (1, 1, 0)$

$u(X^2) = (1, 0, 2)$

$u(X^3) = (1, 0, 12)$

d'où la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}$.

b) Les lignes de la matrice A sont linéairement indépendantes (matrice triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonale).

Donc $\text{rang}(u) = \text{rang}(A) = 3$, et u est surjective :

$$\text{im}(u) = \mathbb{C}^3.$$

Par le théorème du rang, $\dim(\ker u) = \dim \mathbb{C}_3[X] - \text{rang}\, u = 1$.

Or $u(X^3 - 6X^2 + 5) = 0$, donc :

$$\ker u = \{\lambda(X^3 - 6X^2 + 5) \; ; \; \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Exercice 2.3

a) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{C}$, $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$,

donc f est $\mathbb{R}$-linéaire.

$f(1) = 3 - 2i$ et $f(i) = -4 - i$, d'où $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $\dfrac{e_1}{e_2} = \dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i \notin \mathbb{R}$, donc e_1 et e_2 ne sont pas $\mathbb{R}$-colinéaires.

La famille (e_1, e_2) est donc libre ; de plus elle comprend 2 vecteurs dans un espace de dimension 2 ; c'est donc une base de $\mathbb{C}$.

$u(e_1) = 7 - i = 4(1-i) + 3(1+i)$

$u(e_2) = -1 - 3i = 1(1-i) - 2(1+i)$

d'où $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

c) $P = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

$$A = PBQ.$$

Exercice 2.4

$H_0 = 1$, $H_1 = X$, $H_k = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$ pour $k \geq 2$.

a) Pour tout entier $k \geq 0$, on a $\deg(H_k) = k$. Les polynômes $H_0, \dots, H_n$ sont échelonnés en degré, donc la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est libre. Il s'agit d'une famille de $n+1$ vecteurs dans $\mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$, donc c'est une base.

b) On calcule $\Delta(H_0) = 0$, $\Delta(H_1) = X + 1 - X = 1 = H_0$, et pour $k \geq 2$:

$$\Delta(H_k) = \frac{1}{k!}\left[(X+1)X(X-1)\dots(X-k+2) - X(X-1)\dots(X-k+2)(X-k+1)\right]$$

$$= \frac{X(X-1)\dots(X-k+2)}{k!}\left[(X+1) - (X-k+1)\right]$$

$$= \frac{X(X-1)\dots(X-k+2)}{\cancel{k}\cdot(k-1)!}\cdot\cancel{k} = H_{k-1}.$$

D'où $\mathrm{mat}_{\mathcal{H}}(\Delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{bmatrix}$.

Par ailleurs, $\Delta(1) = 0$, $\Delta(X) = 1$, $\Delta(X^2) = 2X + 1, \dots$

$\dots, \Delta(X^n) = \binom{n}{n-1}X^{n-1} + \binom{n}{n-2}X^{n-2} + \dots + \binom{n}{1}X + \binom{n}{0}$.

D'où $\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(\Delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \binom{n}{0} \\ & \ddots & 2 & 3 & & \vdots \\ & & \ddots & 3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ (0) & & & & & 0 \end{bmatrix}$

c) $D(1) = 0$ et, pour $k \geq 1$, $D(X^k) = k.X^{k-1}$, d'où :

$$\text{mat}_{\mathcal{E}}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & (0) & & & n \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

$D(H_0) = 0$; $D(H_1) = H_0$; $D(H_2) = X - \frac{1}{2} = H_1 - \frac{1}{2} H_0$

$D(H_3) = \dfrac{3X^2 - 6X + 2}{6} = H_2 - \frac{1}{2} H_1 + \frac{1}{3} H_0$; $D(H_4) = \dots = H_3 - \frac{1}{2} H_2 + \frac{1}{3} H_1 - \frac{1}{4} H_0$

d'où :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/2 & 1/3 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On remarque que la base $\mathcal{C}$ est mieux adaptée à l'endomorphisme D, et la base $\mathcal{E}$ mieux adaptée à l'endomorphisme Δ.

Exercice 2.5

a) E est l'ensemble des combinaisons $\mathbb{Q}$-linéaires de 1, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
C'est donc un sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

b) Montrons que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre sur $\mathbb{Q}$.
On a $1 \neq 0$, donc la famille (1) est libre.
Si $\sqrt{2} = \alpha.1$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: contradiction. Donc la famille $(1, \sqrt{2})$ est libre.
Supposons $\sqrt{3} = \alpha.1 + \beta.\sqrt{2}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. En élevant au carré, $3 = \alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta\sqrt{2}$. Si $\alpha\beta \neq 0$, on trouve $\sqrt{2} = \dfrac{3 - \alpha^2 - 2\beta^2}{2\alpha\beta} \in \mathbb{Q}$: contradiction. Donc $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Si $\beta = 0$, alors $\sqrt{3} = |\alpha| \in \mathbb{Q}$: contradiction.
Si $\alpha = 0$, alors $\sqrt{\frac{3}{2}} = |\beta| \in \mathbb{Q}$: contradiction. Donc $\sqrt{3} \notin \text{Vect}_{\mathbb{Q}}\{1, \sqrt{2}\}$, et la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est $\mathbb{Q}$-libre.
Ainsi $\dim_{\mathbb{Q}}(E) = 3$.

Exercice 2.6

$\mathcal{H}$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Par le théorème du rang, $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - 1 = n^2 - 1$.

Une base de $\mathcal{H}$ est donnée par les n^2-1 vecteurs :

$$E_{i,j} \ , \ i \neq j \qquad \text{et} \qquad E_{i,i} - E_{n,n} \ , \ i = 1, \dots, n-1$$

$$\text{où} \quad E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} j \\ \downarrow \end{array} & \\ \begin{bmatrix} (0) & \vdots & \\ & 1 & \cdots \\ & (0) & \end{bmatrix} & \leftarrow i \end{array} .$$