Série 2

Familles de vecteurs, matrices

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps (en pratique, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 2.1 Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé. Pour $k = 0, \ldots, n$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(t) = |t - k|$. Montrer que la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Indication : en notant $g = \lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_n f_n$, chercher à quelle condition la fonction g est dérivable en 0, en 1, ..., en n.

Exercice 2.2 On définit une application $u : \mathbb{C}_3[X] \to \mathbb{C}^3$ en posant $u(P) = (P(1), P'(0), P''(2))$.
a) Montrer que l'application u est linéaire, et calculer sa matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_3[X]$ et $\mathbb{C}^3$.
b) Calculer le noyau et l'image de l'application linéaire u.

Exercice 2.3 On définit une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en posant $f(z) = (1 + i)z + (2 - 3i)\bar{z}$.
a) Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire, et calculer sa matrice A dans la base canonique $\mathscr{C} = (1, i)$.
b) On pose $e_1 = 1 - i$ et $e_2 = 1 + i$. Vérifier que $\mathscr{E} = (e_1, e_2)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, et calculer la matrice B de f dans cette base.
c) Écrire la matrice de passage P de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{E}$, et la matrice de passage Q de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{C}$. Écrire la formule de changement de base avec les matrices P, Q, A, B.

Exercice 2.4 (Polynômes de Hilbert)
On pose $H_0 = 1$, $H_1 = X$ et, pour $k \geqslant 2$, $H_k = \dfrac{X(X-1)\ldots(X-k+1)}{k!}$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer que la famille $\mathscr{H} = (H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Soit $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P(X)$. Déterminer la matrice de l'endomorphisme Δ dans la base $\mathscr{H}$, puis dans la base canonique.
c) Même question avec l'application $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P'$ (on se contentera de $n = 4$).

Exercice 2.5 (plus difficile) Soit $E = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\,;\ (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$.
a) Montrer que E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
b) Déterminer la dimension de E sur le corps $\mathbb{Q}$.
c) *(bonus)* $\mathbb{R}$ est-il un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie ?

Exercice 2.6 Soit $\mathscr{H} = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$. Montrer que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, préciser sa dimension, et en donner une base.