Série 1
Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 1.1 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels (on précisera de quel espace vectoriel) ?

a) L'ensemble A des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) L'ensemble B des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

c) L'ensemble C des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(1)f(-1) = f(0)$.

d) L'ensemble D des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(1) + f(-1) = f(0)$.

e) $E = \{(3x, x - y, x + y)\,;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

f) $F = \{(3x^2, x - y, x + y)\,;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

g) $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists(A, \theta) \in \mathbb{R}^2\ \forall t \in \mathbb{R}\ f(t) = A\cos(t + \theta)\}$.

Exercice 1.2 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

a) $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x$

b) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x + 1$

c) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x(x + 1)$

d) $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2x - 5y + 3$

e) $e : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2x^2 - 5y$

f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2x - 5y$

g) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x + y, x - y)$

h) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto 2(x + y, x - y)$

i) $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto z(x + y, x - y)$

j) $j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x + y + 3, x - y)$

k) $k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x + y - z, x - y)$

Exercice 1.3 Déterminer le noyau et l'image de chaque application linéaire de l'exercice précédent.

Exercice 1.4 ♡ Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$, $v : E \to F$ des applications linéaires. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire non nul fixé.

a) Montrer que $\operatorname{im}(\alpha u) = \operatorname{im} u$ et $\ker(\alpha u) = \ker u$.

b) Montrer que $\operatorname{im}(u + v) \subset \operatorname{im} u + \operatorname{im} v$ et $\ker u \cap \ker v \subset \ker(u + v)$. Montrer par des exemples que ces inclusions peut être strictes.

Exercice 1.5 Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$, $v : F \to G$ des applications linéaires. Montrer que $\operatorname{im}(v \circ u) \subset \operatorname{im} v$, et $\ker u \subset \ker(v \circ u)$. Montrer par des exemples que ces inclusions peut être strictes.

Exercice 1.6 Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$, $v : F \to G$ des applications linéaires. Montrer que $v \circ u = 0 \iff \operatorname{im} u \subset \ker v$.

Exercice 1.7 Soient u et v des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que u et v commutent, c'est-à-dire $v \circ u = u \circ v$. Montrer que $\operatorname{im} u$ et $\ker u$ sont stables par v.

Exercice 1.8 Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

a) Montrer que $\ker u^2 = \ker u \iff \ker u \cap \operatorname{im} u = \{0_E\}$.

b) Montrer que $\operatorname{im} u^2 = \operatorname{im} u \iff \ker u + \operatorname{im} u = E$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\operatorname{im} u$ et $\ker u$ soient supplémentaires.

Exercice 1.9 (pour les amateurs de Sudoku)
Soit $(K, +, \times)$ un corps. On suppose que l'ensemble K contient exactement 4 éléments, que l'on note $0, 1, \alpha, \beta$, étant entendu que 0 est l'élément neutre pour $+$, et 1 est l'élément neutre pour $\times$. En utilisant les propriétés d'un corps, compléter les tables d'addition et de multiplication (une seule

solution possible) :

$+$	0	1	α	β
0				
1				
α				
β				

$\times$	0	1	α	β
0				
1				
α				
β				

Indications : les éléments de K possèdent tous un opposé, donc chaque élément de K apparaît exactement une fois dans chaque ligne et chaque colonne de la table d'addition. Les éléments non nuls de K possèdent tous un inverse, donc chaque élément de K apparaît exactement une fois dans chaque ligne et chaque colonne de la table de multiplication, sauf la ligne et la colonne de l'élément 0.

Si vous êtes courageuse ou courageux, vérifiez que les tables ainsi complétées définissent bien un corps $(K, +, \times)$ à quatre éléments.