MAT-2200 : EXAMEN DE PRATIQUE

EXERCICE 1

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) $P(\lambda) = (-3-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda) - 8 + 4(-1-\lambda)$

$$= 9 + 9\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - 8 - 4 - 4\lambda$$

$$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 5\lambda - 3 = -(\lambda-1)^2(\lambda+3).$$

Donc $\alpha = 1$ et $\beta = -3$

b) $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\underline{E_\alpha(A) : ?}$

$(A - I)\vec{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} = 0$

$A - I \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(A - I)\vec{x} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = -2y - z \\ y = -z \end{matrix} \Rightarrow x = z \Rightarrow \vec{x} = z\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Donc $E_\alpha(A) = \text{vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\underline{E_\beta(A) = ?}$

$$A+3I = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc $(A+3I)\vec{x} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x = -6y - z \\ y = 0 \end{array} \Rightarrow x = -z$

$$\Rightarrow \vec{x} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donc $E_\beta(A) = \text{vect}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Rép : Oui, il s'agit de la forme $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $(A-I)\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & -12 \\ 0 & -4 & -4 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donc $\begin{array}{l} x + 2y + z = -4 \\ y + z = -3 \end{array}$ Donc $\begin{array}{l} y = -z - 3 \\ x = z + 2 \end{array}$

$$\Rightarrow \vec{x} = z \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) On cherche u_2 t.q. $Au_2 = u_1 + u_2$ où $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Or si $\vec{v_c} := c \cdot u_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{u}}$, $A\vec{v_c} - I\vec{v_c} = 4u_1$

$\Rightarrow Acu_1 + A\vec{u} - cu_1 - \vec{u} = 4u_1$

$\Rightarrow cu_1 + A\vec{u} - cu_1 - \vec{u} = 4u_1$ car $cu_1 \in E_\alpha(u)$.

$\Rightarrow A\vec{u} = 4u_1 + \vec{u}$.

Si on prend $u_2 := \frac{1}{4}\vec{u}$, alors $Au_2 = u_1 + u_2$.

Donc $P = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ -1 & -3/4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2a) Il faut montrer que $q(X) = \varphi(X,X)$, où $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique.

Posons $\varphi(X,Y) := \dfrac{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)}{2}$

Vérifier que $\varphi(Y,X) = \varphi(X,Y)$ (symétrie)

$$\begin{cases} \varphi(X+Z, Y) = \varphi(X,Y) + \varphi(Z+Y) \\ \varphi(\lambda X, Y) = \lambda\varphi(X,Y) \end{cases} \text{(bilinéarité)}$$

b) $[q]_\mathcal{E} = A$ où $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$

$\varphi(e_1,e_1) = 0$, $\varphi(e_1,e_2) = 1$, $\varphi(e_1,e_3) = 1$

$\varphi(e_2,e_2) = 0$, $\varphi(e_2,e_3) = 1$

$\varphi(e_3,e_3) = 0$

$$\Rightarrow [q]_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Il suffit de trouver e_3 t.q. $\varphi(e_1,e_3) = \varphi(e_2,e_3) = 0$

$$e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(e_1,e_3) = 0 \Rightarrow y + z = 0 \\ \varphi(e_2,e_3) = 0 \Rightarrow z + x = 0 \end{cases}$$

On peut prendre $e_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

QUESTION 3.

a) Injectivité: Soit $x, y \in E$.

Supposons que $u(x)=0$.

Alors $\langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, x\rangle$ par hypothèse

$= \|x\|^2$.

Or, $u(x)=0 \Rightarrow \langle u(x), u(x)\rangle = \langle 0,0\rangle = 0$

Donc $\|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

Comme u est linéaire, u est injective.

Surjectivité: Thm du rang:

$\dim E = \dim(\underbrace{\ker u}_{=0}) + \text{rang } u$

$\Rightarrow \dim E = \text{rang } u = \dim(\text{im } u)$.

$\Rightarrow \text{im } u = E$ car $\text{im } E$ est un s.e.v. de E.

$\Rightarrow u$ est surjective.

b) Comme F est un s.e.v. de E, ~~u~~

$\dim F = \dim(\underbrace{\ker F}_{=0}) + \text{rang } u$

$\Rightarrow \dim F = \dim(\text{im } F)$.

Comme $u(F) \subseteq F$, $u(F) = F$.

c) Soit $x \in F$, posons $y := u^{-1}(x)$.

$y = u^{-1}(x) \Rightarrow u(y) = u(u^{-1}(x)) \Rightarrow u(y) = x$.

Donc $u(y) \in F \Rightarrow u(y) \in u(F)$.

Donc il existe $z \in F$ t.q. $u(y) = u(z)$.

Comme u est injective, $y = z$ et donc $y \in F$.

d) Soit $x \in F^{\perp}$. Posons $y := u(x)$.

Il faut montrer que $y \perp v$ $\forall v \in F$.

On a $\langle y, v \rangle = \langle u(x), v \rangle = \langle u(x), u(u^{-1}(v)) \rangle$ (indice)

$= \langle x, u^{-1}(v) \rangle$ par hypothèse

$= 0$ car $u^{-1}(v) \in F$ (par c)).

QUESTION 4

a) $F = \text{vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$, $\langle X, Y \rangle = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3$

Posons $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad u_1 := \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix}$

$$v_2 := \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix} - \frac{\left\langle u_1, \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1$$

$$= \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix} - \frac{(-i)}{\sqrt{3}} u_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4i \\ 2 \\ 2i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{bmatrix} 4i \\ 2 \\ 2i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$$

b) $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\text{proj}_F(e_1) = \langle u_1, e_1 \rangle u_1 + \langle u_2, e_1 \rangle u_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} u_1 - \frac{2i}{\sqrt{6}} u_2 = \frac{2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{2i}{6} \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6} \begin{bmatrix} -2 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{proj}_F(e_2) = \langle u_1, e_2\rangle u_1 + \langle u_2, e_2\rangle u_2$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{3}} u_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} u_2 = \frac{-2i}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{proj}_F(e_3) = \langle u_1, e_3\rangle u_1 + \langle u_2, e_3\rangle u_2$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{3}} u_1 - \frac{i}{\sqrt{6}} u_2 = \frac{-2}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{i}{6}\begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donc $[P_F]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & i/2 & 1/2 \end{bmatrix}$