Examen-type 2

en vue de l'examen partiel du mardi 29 avril 2014 (1h50)

Consigne. Aucun document, aucune calculatrice n'est autorisée. Pour l'évaluation, la qualité de la présentation et la clarté des explications seront des critères importants.

Cet examen-type est d'abord une aide à la révision. Lors du véritable examen, j'indiquerai le nombre de points attribués à chaque exercice.

Question de cours [? ? points]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz, ainsi que son cas d'égalité.

Exercice 1 [? ? points]

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A, et déterminer ses racines. On doit trouver une valeur propre double α et une valeur propre simple β.

b) On va maintenant chercher une matrice de passage P telle que la matrice $J = P^{-1}AP$ soit sous la forme de Jordan. Donner les deux formes possibles pour la matrice J (en convenant de placer les α avant les β).

c) Calculer les sous-espaces propres $E_\alpha(A)$ et $E_\beta(A)$. Peut-on maintenant choisir entre les deux formes de la question b) ?

d) Résoudre l'équation : $\quad (A - \alpha I) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$.

e) Sans explication, donner une matrice de passage P telle que la matrice $J = P^{-1}AP$ soit sous la forme de Jordan.

Exercice 2 [? ? points]

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, et la fonction $q : E \to R$ définie par $q(X) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, pour $X = [x_1 \ x_2 \ x_3]^t$.

a) Montrer que q est une forme quadratique, et calculer sa forme polaire φ.

b) Calculer la matrice de q dans la base canonique.

c) On note $e_1 = [1 \ -1 \ 0]^t$ et $e_2 = [1 \ 1 \ -2]^t$. Sans explication, donner un vecteur e_3 tel que la matrice de q dans la base $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ soit diagonale.

Exercice 3 [? ? points]

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

a) Montrer que u est un automorphisme de E. *[Indication : montrer d'abord l'injectivité.]*

Pour les trois dernières question, on fixe un sous-espace vectoriel F de E qui est stable par u, c'est-à-dire tel que $u(F) \subseteq F$.

b) À l'aide du théorème du rang, montrer que $u(F) = F$.

c) En déduire que F est stable par u^{-1}.

d) Montrer que $F^{\perp}$ est stable par u. *[Indication : on peut écrire $\langle u(x), y\rangle = \left\langle u(x), u(u^{-1}(y))\right\rangle$.]*

Exercice 4 [? ? points]

Dans l'espace hermitien $E = \mathbb{C}^3$ muni du produit scalaire habituel, on considère le sous-espace vectoriel $F = \text{vect}\{[1 \ i \ -1]^t, [i \ 1 \ i]^t\}$.

a) Donner une base orthonormale de F.

b) Calculer la matrice, dans la base canonique, du projecteur orthogonal sur F.