Examen final

Mardi 29 avril 2014, 8h30-10h20

Consigne. Aucun document, aucune calculatrice n'est autorisée. Pour l'évaluation, la qualité de la présentation et la clarté des explications seront des critères importants.

Question de cours [20 points]

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $u : E \to F$ et $v : F \to G$. Montrer que

$$\dim(\ker v \circ u) - \dim(\ker u) = \dim(\ker v \cap \operatorname{im} u).$$

Exercice 1 [40 points]

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A, et déterminer ses racines. On doit trouver une valeur propre triple α.

b) Démontrer que la matrices $B = A - \alpha I_3$ est nilpotente. Dessiner tous les diagrammes de Young possibles pour la matrice B ; pour chacun d'entre eux, donner les valeur de $\operatorname{rang}(B^k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

c) Calculer le rang de la matrice B. En déduire quel est le diagramme de Young de la matrice B.

d) Déterminer les sous-espaces vectoriel $\operatorname{im} B$ et $\ker B$.

d) Sans explication, donner une matrice de passage P telle que la matrice $J = P^{-1}AP$ soit sous la forme de Jordan.

Exercice 2 [10 points]

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, et la fonction $q : E \to R$ définie par

$$q(X) = (x_1)^2 + 4x_2x_3 - 5(x_3)^2, \text{ pour } X = [x_1\ x_2\ x_3]^t.$$

Montrer que q est une forme quadratique, et calculer sa forme polaire φ.

Exercice 3 [15 points]

Dans l'espace hermitien $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire habituel, on considère le sous-espace vectoriel F d'équation $x - 2y + 4z = 0$.

a) Donner une base orthonormale de $F^\perp$.

b) Calculer la matrice, dans la base canonique, du projecteur orthogonal sur F.

Exercice 4 [15 points]

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme symétrique, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Démontrer que le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est stable par u.