Examen-type 1

en vue de l'examen partiel du vendredi 28 février 2014 (1h50)

Consigne. Aucun document, aucune calculatrice n'est autorisée. Pour l'évaluation, la qualité de la présentation et la clarté des explications seront des critères importants.

Cet examen-type est d'abord une aide à la révision. Lors du véritable examen, j'indiquerai le nombre de points attribués à chaque exercice.

Exercice 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Soit S un supplémentaire de $\ker u$ dans E. Démontrer que u induit un isomorphisme linéaire $\tilde{u} : S \to \operatorname{im}(u)$.

Exercice 2

Soit $u : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ l'application définie par $u(x, y, z, t) = (x + iy - z, x + it, y + iz - t)$.

a) Écrire la matrice $[u]_{\mathscr{C}_3 \leftarrow \mathscr{C}_4}$ de l'application u dans les bases canoniques de $\mathbb{C}^4$ et $\mathbb{C}^3$.

b) Déterminer le rang de l'application u (en donnant toutes les explications nécessaires).

c) Trouver deux bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ de $\mathbb{C}^4$ et $\mathbb{C}^3$ telles que la matrice de u dans ces bases soit :

$$[u]_{\mathscr{F} \leftarrow \mathscr{E}} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{bmatrix}$$

(en remplaçant les étoiles par des 1 et des 0 de façon convenable).
Il n'est pas nécessaire de donner des explications pour cette question.

Exercice 3

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$, on considère les sous espace vectoriels :

$$\begin{aligned} F &= \{P \in E \mid P(-1) = P(0) = P(1) = 0\} \\ G &= \{P \in E \mid P'(-1) = P'(0) = P'(1) = 0\} \\ H &= \operatorname{vect}\{X\} \end{aligned}$$

a) Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

b) Soit $u : E \to E$ l'unique application telle que $u_{|_F} = \operatorname{Id}_F$, $u_{|_G} = 2\operatorname{Id}_G$, et $u_{|H} = 3\operatorname{Id}_H$. Calculer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 4

On note $A_1 = [2]$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$, $A_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (matrice de taille $n \times n$).

a) Pour $n \geqslant 3$, calculer le déterminant $\det A_{n+1}$ en fonction de $\det A_n$ et $\det A_{n-1}$.

b) Exprimer directement $\det A_n$ en fonction de n. *[Indication : calculer les premières valeurs, conjecturer la formule générale puis la prouver par récurrence/induction.]*

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme, et $e_0 \in E$ un vecteur. On note $e_1 = u(e_0)$ et $e_2 = u(e_1)$; on suppose que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E (*on dit alors que u est un endomorphisme cyclique de E*).

L'objectif de cet exercice est d'étudier le *commutateur* de u, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u. On note :

$$\mathrm{Comm}(u) = \{v \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}.$$

a) Soient $v, w \in \mathrm{Comm}(u)$. Montrer que $v + w \in \mathrm{Comm}(u)$ et $v \circ w \in \mathrm{Comm}(u)$.

b) Soient $v, w \in \mathrm{Comm}(u)$. On suppose que $v(e_0) = w(e_0)$. Montrer que $v = w$. *[Indication : montrer d'abord que $v(e_1) = w(e_1)$ et $v(e_2) = w(e_2)$. Puis montrer que, pour tout $x \in E$, $v(x) = w(x)$.]*

c) Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme, et soit $v = P(u)$. Montrer que $v \in \mathrm{Comm}(u)$.

d) Soit maintenant $v \in C(u)$ quelconque. Il existe des réels α, β, γ tels que $v(e_0) = \alpha e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2$. Montrer que $v = \alpha \mathrm{Id}_E + \beta u + \gamma u^2$. *[Indication : utiliser la question b).]*

Conclusion. Si $u : E \to E$ est un endomorphisme cyclique, alors $\mathrm{Comm}(u) = \{P(u)\,;\; P \in \mathbb{R}[X]\}$.