Examen de reprise

Mardi 18 mars 2014, 8h30-10h20

Consigne. Aucun document, aucune calculatrice n'est autorisée. Pour l'évaluation, la qualité de la présentation et la clarté des explications seront des critères importants. Il est conseillé de lire les questions très précisément, car chaque mot est important.

Exercice 1 [20 points]

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E ; on note $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_k)$ une base de F et $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_\ell)$ une base de G. Montrer que la famille $\mathscr{E} = (f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_\ell)$ est une base de E.

Exercice 2 [16 points]

On considère l'application $\mathbb{R}$-linéaire $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$ définie par $u(P) = \begin{bmatrix} P(1) \\ P(2) \end{bmatrix}$.

a) Sans explications, écrire la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^2$.

b) Sans explications, donner une base $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et une base $\mathscr{F}$ de $\mathbb{R}^2$ telles que la matrice de u dans ces bases soit

$$[u]_{\mathscr{F} \leftarrow \mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3 [40 points]

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 4z = 3x - y + 2z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = 0 \right\}.$$

a) Déterminer des bases $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ de F et G.

b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

c) Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. On note $\mathscr{C}$ la base canonique de l'espace $E = \mathbb{R}^3$. Calculer la matrice $A = [p]_{\mathscr{C} \leftarrow \mathscr{C}}$ de l'endomorphisme p dans la base $\mathscr{C}$.

d) Soit $u : E \to E$ l'application linéaire telle que $u_{|F} = 3\,\mathrm{Id}_F$ et $u_{|G} = 4\,\mathrm{Id}_G$. Calculer la matrice $B = [u]_{\mathscr{C} \leftarrow \mathscr{C}}$ de l'endomorphisme u dans la base canonique $\mathscr{C}$.

e) On note $\mathscr{E} = \mathscr{F} \sqcup \mathscr{G}$ la base de E obtenue en réunissant $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. Sans explications, donner les matrices $A' = [p]_{\mathscr{E} \leftarrow \mathscr{E}}$ et $B' = [u]_{\mathscr{E} \leftarrow \mathscr{E}}$ des endomorphismes p et u dans la base $\mathscr{E}$.

Exercice 4 [24 points]

Soient E, F et G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soient $u : E \to F$ et $v : F \to G$ deux applications $\mathbb{R}$-linéaires.

a) Montrer que $\ker(u) \subseteq \ker(v \circ u)$ et $\mathrm{im}(v \circ u) \subseteq \mathrm{im}(v)$.

b) On suppose que $\mathrm{im}(u) \cap \ker(v) = \{0_F\}$. Montrer que $\ker(v \circ u) = \ker(u)$.

c) On suppose que $\mathrm{im}(u) + \ker v = F$. Montrer que $\mathrm{im}(v \circ u) = \mathrm{im}(v)$.