MAT 2200 - Examen partiel - corrigé

Exercice 1

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, donc $End_{\mathbb{K}}(E)$ est de dimension finie : $\dim(End_{\mathbb{K}}(E)) = n^2$.

Soit $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme. La famille $(Id_E, u, u^2, \dots, u^{n^2})$ possède n^2+1 éléments ; elle est donc liée, c'est-à-dire qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_{n^2}$ tels que

$$a_0 Id_E + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_{n^2} u^{n^2} = 0.$$

Alors $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n^2} X^{n^2}$ est un polynôme annulateur de u.

Exercice 2

a) $\det A_2 = \det A_3 = \det A_4 = 1$.

b) Soit $n \geq 2$ fixé. En développant par rapport à la première colonne on trouve :

$$\det A_{n+1} = (n+1)^2 . \det A_n - n \begin{vmatrix} n+2 & 0 \; \cdots \; 0 \\ n-1 & \\ 0 & A_{n-1} \\ \vdots & \\ 0 & \end{vmatrix}$$

$$= (n+1)^2 . \det A_n - n(n+2) \det A_{n-1}$$

c) On raisonne par récurrence double.

(I) $\det A_1 = \det A_2 = 1$

(H) Soit $n \geq 2$ fixé. Si $\det A_n = \det A_{n-1} = 1$, alors :

$$\det A_{n+1} = (n+1)^2 - n(n+2) = 1$$

Donc, pour tout entier $n \geq 1$, $\det A_n = 1$.

Exercice 3

a) $A = CL$ donc $A^2 = C(LC)L = (\alpha a + \beta b + \gamma c) . CL = A$ car $\alpha a + \beta b + \gamma c = 1$.

La matrice A est non nulle car $Tr(A) = \alpha a + \beta b + \gamma c \neq 0$. De plus les colonnes de C sont toutes des multiples de C, donc $\operatorname{rang} A = 1$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors $AX = (\alpha x + \beta y + \gamma z) . C$.

Donc $\mathrm{Im}\, A \subseteq \mathrm{Vect}\{C\}$. Comme $\mathrm{rang}\, A = 1$, $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\{C\}$.

De plus $\mathrm{Ker}\, A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \right\}$.

b) F est engendré par un vecteur non nul, donc $\dim F = 1$.

G est défini par une seule équation non nulle, donc $\dim G = 3 - 1 = 2$.

De plus $(1,2,3)$ ne vérifie pas l'équation $x - 3y + 2z = 0$, donc $F \not\subseteq G$. Par dimension, $F \cap G = \{0\}$.

Comme $\dim F + \dim G = 3 = \dim E$, il s'ensuit que F et G sont supplémentaires dans E.

c) Soit $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $L = [1 \ -3 \ 2]$ et $A = CL = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$.

D'après le a), A est la matrice du projecteur sur F parallèlement à G.

d) Soit $q = \mathrm{Id}_E - p$ le projecteur sur G parallèlement à F.

Comme $f_{|F} = 7\,\mathrm{Id}_F$ et $f_{|G} = -2\,\mathrm{Id}_G$, on a $f = 7p - 2q$,

d'où $f = 9p - 2\,\mathrm{Id}_E$.

Alors $B = 9A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 7 & -27 & 18 \\ 18 & -56 & 36 \\ 27 & -81 & 52 \end{bmatrix}$.

Exercice 4

1- On a $v \circ u \circ v = v$ et $u \circ v \circ u = u$.

a) • Soit $x \in \mathrm{Ker}(v \circ u)$. Alors $u(x) = u(v \circ u(x)) = u(0) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}\, u$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u$. Alors $v \circ u(x) = v(0) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(v \circ u)$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}\, u$.

• Soit $y \in \mathrm{Im}(v \circ u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = v \circ u(x)$.

Alors $y = v(u(x)) \in \mathrm{Im}(v)$. Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}(v)$.

Il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$. Alors $y = v \circ u \circ v(x) = [v \circ u](v(x))$, donc $y \in \mathrm{Im}(v \circ u)$. Ainsi $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}(v)$.

b) On a $(v \circ u) \circ (v \circ u) = v \circ (u \circ v \circ u) = v \circ u$, donc $v \circ u$ est un projecte

c) Comme $v \circ u$ est un projecteur de E, on sait que :

$$E = \mathrm{Im}(v \circ u) \oplus \mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Im}(v) \oplus \mathrm{Ker}(u).$$

De plus, u et v ont des rôles parfaitement symétriques dans cet exercice. Donc, par le même raisonnement,

$$F = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v).$$

2 - a) On trouve $ABA = A$ et $BAB = B$.

b) On sait qu'il existe des bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F telles que

$$[u]_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}} = J_r = \begin{bmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & (0) & & 0 \ddots \end{bmatrix}$$

où $r = \mathrm{rang}(u)$ est le nombre de 1 dans la diagonale.

Soit alors $v : F \longrightarrow E$ l'unique application linéaire telle que :

$$[v]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{F}} = J_r^T.$$

Comme à la question a), on trouve $J_r J_r^T J_r = J_r$ et $J_r^T J_r J_r^T = J_r^T$

donc $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

Ainsi v est un pseudo-inverse de u.

c) On trouve des matrices inversibles $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

telles que $UQ = PA$, c'est-à-dire $U = PAQ^{-1}$.

On pose alors $V = QBP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, et on trouve :

$$UVU = PAQ^{-1}QBP^{-1}PAQ^{-1} = P(ABA)Q^{-1} = PAQ^{-1} = U$$

et $VUV = QBP^{-1} \cdot PAQ^{-1} \cdot QBP^{-1} = Q(BAB)P^{-1} = QBP^{-1} = V$.