Examen partiel

Vendredi 28 février 2014, 8h30-10h20

Consigne. Aucun document, aucune calculatrice n'est autorisée. Pour l'évaluation, la qualité de la présentation et la clarté des explications seront des critères importants. Il est conseillé de lire les questions très précisément, car chaque mot est important.
Le total des points attribués aux questions est 110. Il est donc possible d'obtenir 100 % sans traiter, par exemple, la question **4-2c)**.

Exercice 1 [20 points]

Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u : E \to E$ un endomorphisme. Montrer que u possède au moins un polynôme annulateur.

Exercice 2 [20 points]

Pour tout $n \geqslant 2$, on considère la matrice $A_n = \begin{bmatrix} n^2 & n+1 & & & & \\ n-1 & (n-1)^2 & n & & (0) & \\ & n-2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 4 & \\ & (0) & & 2 & 2^2 & 3 \\ & & & & 1 & 1^2 \end{bmatrix}$, de taille $n \times n$.

Pour $n = 1$, on pose $A_1 = [\,1^2\,]$.

a) Calculer $\det A_2$, $\det A_3$ et $\det A_4$.

b) Pour $n \geqslant 3$, exprimer le déterminant $\det A_n$ en fonction de $\det A_{n-1}$ et $\det A_{n-2}$.

c) Exprimer directement $\det A_n$ en fonction de n. *[Indication : conjecturer la formule générale à partir de la question a) puis la prouver par récurrence/induction.]*

Exercice 3 [30 points]

a) Soient α, β, γ et a, b, c des réels tels que $\alpha a + \beta b + \gamma c = 1$.

On considère les matrices $L = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. On note $A = CL$, une matrice 3×3.

Montrer que $A^2 = A$, et que A est de rang 1. Donner une base de l'image de A, et une équation du noyau de A (à l'aide des réels α, β, γ et a, b, c).

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère maintenant les sous-espaces vectoriels $F = \operatorname{vect}\{(1, 2, 3)\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = 0\}$.

b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

c) Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Calculer la matrice $A = [p]_{\mathscr{C} \leftarrow \mathscr{C}}$ de l'endomorphisme p dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$.
[Indication : vous pourriez vous inspirer de la question a).]

d) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que $f_{|F} = 7\,\mathrm{Id}_F$ et $f_{|G} = -2\,\mathrm{Id}_G$. Trouver des réels λ et μ tels que $f = \lambda \mathrm{Id}_E + \mu p$. En déduire la matrice $B = [f]_{\mathscr{C} \leftarrow \mathscr{C}}$.
[Indication : vous pourriez introduire le projecteur $q = \mathrm{Id}_E - p$, et écrire d'abord f à l'aide de p et q.]

Exercice 4 [40 points]

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies. On note $p = \dim E$ et $n = \dim F$.

Soient $u : E \to F$ et $v : F \to E$ deux applications linéaires. On dit que v est un *pseudo-inverse* de u si $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

1 - On suppose, pour cette question, que v est un pseudo-inverse de u.

a) Montrer que $\ker(v \circ u) = \ker u$ et que $\operatorname{im}(v \circ u) = \operatorname{im} v$.

b) Montrer que $v \circ u$ est un projecteur.

c) En déduire que $E = \operatorname{im} v \oplus \ker u$ et $F = \operatorname{im} u \oplus \ker v$.

2 - Soit maintenant $u : E \to F$ une application linéaire quelconque. On veut montrer que u possède un pseudo-inverse $v : F \to E$.

a) On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. On note $B = A^T$ sa transposée.

Calculer les produits ABA et BAB.

b) Montrer qu'il existe une application linéaire $v : F \to E$ telle que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.
[Indication : vous pouvez choisir des bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ de E et F telles que la matrice $[u]_{\mathscr{F} \leftarrow \mathscr{E}}$ soit particulièrement simple, et vous inspirer de la question a).]

c) On considère la matrice $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Trouver une matrice V, de taille 4×3, telle que $UVU = U$ et $VUV = V$. Il n'est pas nécessaire d'expliquer votre réponse.