Algèbre linéaire avancée

MAT 2200

Erwan Biland

erwan.biland.1@ulaval.ca

Université Laval

Hiver 2014

Présentation du cours

Enseignant : Erwan Biland

Disponibilité : VCH-2209, horaire à préciser

Auxiliaire : Marie-Ailan Beaulieu (mardi, 8h30-9h20)

Site du cours :
http://erwanbiland.fr/index.php?page=mat2200

Manuel obligatoire, disponible chez Zone :
François Cottet-Emard, *Algèbre linéaire et bilinéaire* (2006)

Mode d'évaluation

Ma 28/01 : Test 1 (choix de réponses, 50 min)

Ma 11/02 : Test 2

Ve 28/02 : Examen partiel (1h50)

Ma 25/03 : Test 3

Ma 08/04 : Test 4

Ma 29/04 : Examen final (1h50)

Calcul de la note finale :

- moyenne des trois meilleurs tests : 20 % ;
- examen partiel : 40 %.
- examen final : 40 %.

Plan du cours

Plan du cours

Définition d'un corps

Un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$, c'est :

- un ensemble $\mathbb{K}$;
- deux lois de composition internes $+$ et $\times$ sur $\mathbb{K}$

vérifiant les propriétés :

1. les lois $+$ et $\times$ sont associatives et commutatives ;
2. la loi $+$ a un élément neutre $0_{\mathbb{K}}$;
   la loi $\times$ a un élément neutre $1_{\mathbb{K}}$;
3. la loi $\times$ est distributive sur la loi $+$;
4. tout élément de $\mathbb{K}$ a un opposé pour la loi $+$;
   tout élément non nul de $\mathbb{K}$ a un inverse pour la loi $\times$.

Définition d'un corps

Un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$, c'est :

- un ensemble $\mathbb{K}$;
- deux lois de composition internes $+$ et $\times$ sur $\mathbb{K}$

vérifiant les propriétés :

1. les lois $+$ et $\times$ sont associatives et commutatives ;
2. la loi $+$ a un élément neutre $0_{\mathbb{K}}$;
   la loi $\times$ a un élément neutre $1_{\mathbb{K}}$;
3. la loi $\times$ est distributive sur la loi $+$;
4. tout élément de $\mathbb{K}$ a un opposé pour la loi $+$;
   tout élément non nul de $\mathbb{K}$ a un inverse pour la loi $\times$.

Exemples de corps

1. le corps des rationnels $\mathbb{Q}$;
2. le corps des réels $\mathbb{R}$;
3. le corps des complexes $\mathbb{C}$;
4. le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$;
5. le corps à trois éléments $\mathbb{F}_3$;
6. le corps à p^α éléments $\mathbb{F}_{p^\alpha}$;
7. le corps $\mathbb{Q}[i]$;
8. le corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}(X)$;
9. ...

Exemples de corps

1. le corps des rationnels $\mathbb{Q}$;
2. le corps des réels $\mathbb{R}$;
3. le corps des complexes $\mathbb{C}$;
4. le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$;
5. le corps à trois éléments $\mathbb{F}_3$;
6. le corps à p^α éléments $\mathbb{F}_{p^\alpha}$;
7. le corps $\mathbb{Q}[i]$;
8. le corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}(X)$;
9. ...

Définition d'un espace vectoriel

Un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sur le corps $(\mathbb{K}, +, \times)$, c'est :

- un ensemble E ;
- une loi de composition interne $+$;
- une loi de composition externe $\cdot$ sur E, à coefficients dans $\mathbb{K}$

vérifiant les propriétés :

1. la loi $+$ est associative et commutative ;
2. la loi $+$ a un élément neutre 0_E ;
3. tout élément de E a un opposé pour la loi $+$;
4. la loi $\cdot$ est distributive à gauche sur la loi $+$ de $\mathbb{K}$,
   à droite sur la loi $+$ de E ;
5. il y a une "pseudo-associativité" entre la loi $\times$ de $\mathbb{K}$
   et la loi $\cdot$ de E ;
6. l'élément $1_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$ est neutre pour la loi $\cdot$ de E.

MAT 2200
Hiver 2014

Erwan Biland

Définition d'un espace vectoriel

Un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sur le corps $(\mathbb{K}, +, \times)$, c'est :

- un ensemble E ;
- une loi de composition interne $+$;
- une loi de composition externe $\cdot$ sur E, à coefficients dans $\mathbb{K}$

vérifiant les propriétés :

1. la loi $+$ est associative et commutative ;
2. la loi $+$ a un élément neutre 0_E ;
3. tout élément de E a un opposé pour la loi $+$;
4. la loi $\cdot$ est distributive à gauche sur la loi $+$ de $\mathbb{K}$,
   à droite sur la loi $+$ de E ;
5. il y a une "pseudo-associativité" entre la loi $\times$ de $\mathbb{K}$
   et la loi $\cdot$ de E ;
6. l'élément $1_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$ est neutre pour la loi $\cdot$ de E.

Définition d'un espace vectoriel

Un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sur le corps $(\mathbb{K}, +, \times)$, c'est :

- un ensemble E ;
- une loi de composition interne $+$;
- une loi de composition externe $\cdot$ sur E, à coefficients dans $\mathbb{K}$

vérifiant les propriétés :

1. la loi $+$ est associative et commutative ;
2. la loi $+$ a un élément neutre 0_E ;
3. tout élément de E a un opposé pour la loi $+$;
4. la loi $\cdot$ est distributive à gauche sur la loi $+$ de $\mathbb{K}$,
   à droite sur la loi $+$ de E ;
5. il y a une "pseudo-associativité" entre la loi $\times$ de $\mathbb{K}$
   et la loi $\cdot$ de E ;
6. l'élément $1_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$ est neutre pour la loi $\cdot$ de E.

Exemples d'espaces vectoriels

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

1. le $\mathbb{K}$-espace vectoriel nul $\{0\}$;
2. le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$;
3. le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$;
4. l'espace $\mathbb{K}^n$ des n-uplets à coefficients dans $\mathbb{K}$;
5. l'espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$;
6. l'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
7. l'espace $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ des fonctions définies sur un ensemble A et à valeurs dans $\mathbb{K}$;
8. ...

Définition d'un sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur le corps $(\mathbb{K}, +, \times)$.

Un sous-espace vectoriel F de $(E, +, \cdot)$, c'est :

- un sous-ensemble F de E

vérifiant les trois propriétés :

1. F contient l'élément neutre 0_E ;
2. F est stable par la loi $+$;
3. F est stable par la loi $\cdot$;

ou vérifiant les deux propriétés :

1. F n'est pas vide ;
2. F est stable par combinaison linéaire.

Définition d'un sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur le corps $(\mathbb{K}, +, \times)$.

Un sous-espace vectoriel F de $(E, +, \cdot)$, c'est :

- un sous-ensemble F de E

vérifiant les trois propriétés :

1. F contient l'élément neutre 0_E ;
2. F est stable par la loi $+$;
3. F est stable par la loi $\cdot$;

ou vérifiant les deux propriétés :

1. F n'est pas vide ;
2. F est stable par combinaison linéaire.

Définition d'un sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur le corps $(\mathbb{K}, +, \times)$.

Un sous-espace vectoriel F de $(E, +, \cdot)$, c'est :

- un sous-ensemble F de E

vérifiant les trois propriétés :

1. F contient l'élément neutre 0_E ;
2. F est stable par la loi $+$;
3. F est stable par la loi $\cdot$;

ou vérifiant les deux propriétés :

1. F n'est pas vide ;
2. F est stable par combinaison linéaire.

Exemples de sous-espaces vectoriels

1. les sous-espaces "triviaux' $\{0_E\}$ et E ;
2. les sous-espaces $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$;
3. le sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n, dans $\mathbb{K}[X]$;

Si, de plus, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

4. le sous-espace des suites convergentes, dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;
5. le sous-espace $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ des fonctions continues sur l'intervalle A, dans $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$;
6. le sous-espace $\mathcal{D}(A, \mathbb{K})$ des fonctions dérivables ;
7. le sous-espace $\mathcal{C}^n(A, \mathbb{K})$ des fonctions n fois dérivables dont la dérivée n-ième est continue ($n = 0, 1, 2, ..., \infty$) ;
8. ...

Exemples de sous-espaces vectoriels

1. les sous-espaces "triviaux' $\{0_E\}$ et E ;
2. les sous-espaces $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$;
3. le sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n, dans $\mathbb{K}[X]$;

Si, de plus, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

4. le sous-espace des suites convergentes, dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;
5. le sous-espace $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ des fonctions continues sur l'intervalle A, dans $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$;
6. le sous-espace $\mathcal{D}(A, \mathbb{K})$ des fonctions dérivables ;
7. le sous-espace $\mathcal{C}^n(A, \mathbb{K})$ des fonctions n fois dérivables dont la dérivée n-ième est continue ($n = 0, 1, 2, ..., \infty$) ;
8. ...

À retenir. Pour prouver que $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il suffit de prouver que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel déjà connu $(E, +, \cdot)$.

Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux parties d'un espace vectoriel E.

- $F \cap G$ est l'intersection de F et G :

$$x \in F \cap G \quad \Leftrightarrow \quad x \in F \text{ et } x \in G$$

- $F + G$ est la somme de F et G :

$$x \in F + G \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, y \in F,\ \exists\, z \in G,\ x = y + z$$

À retenir. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ et $F + G$ le sont aussi.

Attention ! Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, la réunion $F \cup G$ n'en est presque jamais un.

Définition d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

Une application linéaire $u : E \to F$, c'est :

- une application $u : E \to F$

vérifiant les deux propriétés :

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$;

ou vérifiant la propriété :

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

On note $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Définition d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

Une application linéaire $u : E \to F$, c'est :

- une application $u : E \to F$

vérifiant les deux propriétés :

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$;

ou vérifiant la propriété :

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

On note $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Définition d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

Une application linéaire $u : E \to F$, c'est :

- une application $u : E \to F$

vérifiant les deux propriétés :

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$;

ou vérifiant la propriété :

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

On note $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Définition d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

Une application linéaire $u : E \to F$, c'est :

- une application $u : E \to F$

vérifiant les deux propriétés :

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$;

ou vérifiant la propriété :

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

On note $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Applications linéaires - opérations

- Une somme d'applications linéaires est linéaire.
- Un multiple d'une application linéaire est linéaire.
- **Une composée d'applications linéaires est linéaire.**

Applications linéaires - cas particuliers

- Une application linéaire $u : E \to E$ est un endomorphisme linéaire de E.

  On note $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E, E)$.

- Une application linéaire *bijective* $u : E \to F$ est un isomorphisme linéaire de E dans F.

- Une application linéaire *bijective* $u : E \to E$ est un automorphisme linéaire de E.

Applications linéaires - cas particuliers

- Une application linéaire $u : E \to E$ est un endomorphisme linéaire de E.

  On note $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E, E)$.

- Une application linéaire *bijective* $u : E \to F$ est un isomorphisme linéaire de E dans F.

- Une application linéaire *bijective* $u : E \to E$ est un automorphisme linéaire de E.

Exemples d'applications linéaires

1. l'application nulle $\tilde{0}_F : E \to F$;
2. l'application identité $\mathrm{Id}_E : E \to E$;
3. la conjugaison $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}$;
4. la dérivation $d : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$;

Si, de plus, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

5. la dérivation $d : \mathcal{D}(A, \mathbb{K}) \to \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$;
6. ...

Exemples d'applications linéaires

1. l'application nulle $\tilde{0}_F : E \to F$;
2. l'application identité $\mathrm{Id}_E : E \to E$;
3. la conjugaison $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}$;
4. la dérivation $d : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$;

Si, de plus, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

5. la dérivation $d : \mathcal{D}(A, \mathbb{K}) \to \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$;
6. ...

Applications linéaires - cas particuliers

- Une application linéaire $u : E \to \mathbb{K}$ est une **forme linéaire** sur E.

  On note $E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$, l'espace **dual** de E.

Exemples de formes linéaires

1. la forme nulle $\tilde{0} : E \to \mathbb{K}$;
2. la partie réelle $\Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$;
   la partie imaginaire $\Im : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$;
3. la i-ème fonction coordonnée $\pi_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$;
4. l'évaluation au point a, $\mathrm{ev}_a : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$;
5. l'évaluation au point a, $\mathrm{ev}_a : \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$;

Si, de plus, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

6. la limite, forme linéaire sur l'espace des suites convergentes à valeurs dans $\mathbb{K}$;
7. ...

Exemples de formes linéaires

1. la forme nulle $\tilde{0} : E \to \mathbb{K}$;
2. la partie réelle $\Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$;
   la partie imaginaire $\Im : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$;
3. la i-ème fonction coordonnée $\pi_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$;
4. l'évaluation au point a, $\mathrm{ev}_a : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$;
5. l'évaluation au point a, $\mathrm{ev}_a : \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$;

Si, de plus, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

6. la limite, forme linéaire sur l'espace des suites convergentes à valeurs dans $\mathbb{K}$;
7. …

Noyau et image d'une application linéaire

Soit $u : E \to F$ une application $\mathbb{K}$-linéaire.

- Noyau de u : $\ker u = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.
  C'est un sous-espace vectoriel de E.

$$u \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad \ker u = \{0_E\}.$$

- Image de u : $\operatorname{im} u = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$.
  C'est un sous-espace vectoriel de F.

$$u \text{ est surjective} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{im} u = F.$$

Exemples d'images et de noyaux

1. l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ;
2. l'ensemble des fonctions constantes ;
3. l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène ;
4. l'ensemble des multiples d'un vecteur donné ;
5. l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs donnés ;
6. ...

Image réciproque, image directe

Soit $u : E \to F$ une application $\mathbb{K}$-linéaire.

- $u^{-1}(F') = \{x \in E \mid f(x) \in F'\}$.
  L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

- $u(E') = \{y \in F \mid \exists x \in E',\ y = f(x)\}$.
  L'image directe d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.

Famille libre, famille génératrice

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, ou linéairement indépendante, si, pour toute famille de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$,

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

i.e. $$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \neq 0$$

- La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice, ou engendre l'espace vectoriel E, si

$$\forall x \in E, \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}, \quad x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

- La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

Famille libre, famille génératrice

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, ou linéairement indépendante, si, pour toute famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

$$\textit{i.e.} \qquad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \neq 0$$

- La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice, ou engendre l'espace vectoriel E, si

$$\forall x \in E, \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}, \quad x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

- La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

Famille libre, famille génératrice

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, ou linéairement indépendante, si, pour toute famille de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$,

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

$$\text{i.e.} \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \neq 0$$

- La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice, ou engendre l'espace vectoriel E, si

$$\forall x \in E, \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}, \quad x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

- La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

Famille libre, famille génératrice

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

- La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, ou linéairement indépendante, si, pour toute famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

$$i.e. \qquad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \neq 0$$

- La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice, ou engendre l'espace vectoriel E, si

$$\forall x \in E, \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}, \quad x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

- La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

Famille libre, famille génératrice (bis)

Étant donnée une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E, on définit une application linéaire

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n. \end{array}$$

- $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre $\Leftrightarrow$ u est injective.
- $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice $\Leftrightarrow$ u est surjective.
- $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base $\Leftrightarrow$ u est un isomorphisme.

Base, coordonnées

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Pour tout $x \in E$, il existe un unique n-uplet $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tel que

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n.$$

Le nombre λ_i est appelé la i-ème coordonnée de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Notons $e_i^*(x) = \lambda_i$.
La fonction $e_i^* : E \to \mathbb{K}$ est appelée la i-ème fonction coordonnée dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.
C'est une forme linéaire sur E.

La famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de l'espace dual E^*, appelée la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$.

Base, coordonnées

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Pour tout $x \in E$, il existe un unique n-uplet $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tel que

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n.$$

Le nombre λ_i est appelé la i-ème coordonnée de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Notons $e_i^*(x) = \lambda_i$.
La fonction $e_i^* : E \to \mathbb{K}$ est appelée la i-ème fonction coordonnée dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.
C'est une forme linéaire sur E.

La famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de l'espace dual E^*, appelée la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$.

Base, coordonnées

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Pour tout $x \in E$, il existe un unique n-uplet $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tel que

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n.$$

Le nombre λ_i est appelé la i-ème coordonnée de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Notons $e_i^*(x) = \lambda_i$.
La fonction $e_i^* : E \to \mathbb{K}$ est appelée la i-ème fonction coordonnée dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.
C'est une forme linéaire sur E.

La famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de l'espace dual E^*, appelée la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$.

Dimension finie

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie s'il a une famille génératrice $(e_1, \ldots, e_N)$.

Théorème. Supposons E de dimension finie.

1. De toute famille génératrice $(e_1, \ldots, e_N)$ de E, on peut extraire une base $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$.
2. Toute famille libre $(e_1, \ldots, e_k)$ peut être complétée en une base $(e_1, \ldots, e_k, e'_{k+1}, \ldots, e'_n)$.
3. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments, qu'on appelle la dimension de E.
4. Tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie.

Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

- Soit x un vecteur de coordonnées $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathcal{E}$.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(x) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

- Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_p) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),$$

où le vecteur x_j a pour coordonnées $a_{1,j}, \ldots, a_{i,j}, \ldots, a_{n,j}$ dans la base $\mathcal{E}$.

Matrice d'une application linéaire

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E,
et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

- Soit $u : E \to F$ une application linéaire.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),$$

où $a_{1,j}, \dots, a_{i,j}, \dots, a_{n,j}$ sont les coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{F}$.

- Si $E = F$ et $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, on note $\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(u)$ pour $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(u)$.

Opérations sur les matrices

Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ des bases des espaces E, F, G.

Soient $u, u' : E \to F$ et $v : F \to G$ des applications linéaires.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.

- $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u + u') = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) + \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u')$;
- $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\lambda u) = \lambda\,\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$;
- $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(v \circ u) = \mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v) \cdot \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$;
- si u est un isomorphisme, alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ est inversible, et
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(u^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)^{-1}$$

Opérations sur les matrices

Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ des bases des espaces E, F, G.

Soient $u, u' : E \to F$ et $v : F \to G$ des applications linéaires.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.

- $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u + u') = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) + \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u')$;
- $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\lambda u) = \lambda \, \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$;
- $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(v \circ u) = \mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v) \cdot \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$;
- si u est un isomorphisme, alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ est inversible, et
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(u^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)^{-1}$$

Changement de base

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de l'espace vectoriel E.

Matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$:

$$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}') = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E) \quad ; \quad P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} = (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$$

- Formule pour un vecteur $x \in E$ (idem pour une famille) :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(x) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \cdot \mathrm{mat}_{\mathcal{E}'}(x)$$

- Formule pour une application linéaire $u : E \to F$:

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} \cdot \mathrm{mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) \cdot (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$$

- Formule pour un **endomorphisme** linéaire $u : E \to E$:

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(u) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \cdot \mathrm{mat}_{\mathcal{E}'}(u) \cdot (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$$

Changement de base

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de l'espace vectoriel E.

Matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$:

$$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}') = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E) \qquad ; \qquad P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}} = (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$$

- Formule pour un vecteur $x \in E$ (idem pour une famille) :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(x) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \cdot \mathrm{mat}_{\mathcal{E}'}(x)$$

- Formule pour une application linéaire $u : E \to F$:

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} \cdot \mathrm{mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) \cdot (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$$

- Formule pour un **endomorphisme** linéaire $u : E \to E$:

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(u) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} \cdot \mathrm{mat}_{\mathcal{E}'}(u) \cdot (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'})^{-1}$$

Rang d'une application linéaire, d'une matrice

Le rang d'une application linéaire est la dimension de son image :

$$\mathrm{rang}(u) = \dim(\mathrm{im}\, u).$$

Si $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice, on considère l'application linéaire associée :

$$u_A : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n, \quad X \mapsto AX,$$

où les éléments de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ sont notés comme des vecteurs colonnes.

On pose : $$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(u_A).$$

Calcul du rang, de l'inverse

Manipulations élémentaires sur les lignes et colonnes.

Méthode du pivôt de Gauss.

Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

Trace de A : $\quad \mathrm{tr}(A) = a_{1,1} + \ldots + a_{n,n}$

(somme des coefficients diagonaux).

Théorème. Pour $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices,

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Conséquence. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme. On note :

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(u)),$$

où $\mathcal{E}$ est n'importe quelle base de E. Le nombre $\mathrm{tr}(u)$ ne dépend pas de la base choisie.

Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

Trace de A : $\quad \mathrm{tr}(A) = a_{1,1} + \ldots + a_{n,n}$

(somme des coefficients diagonaux).

Théorème. Pour $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices,

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Conséquence. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme. On note :

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(u)),$$

où $\mathcal{E}$ est n'importe quelle base de E. Le nombre $\mathrm{tr}(u)$ ne dépend pas de la base choisie.

Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

Trace de A : $\quad \mathrm{tr}(A) = a_{1,1} + \ldots + a_{n,n}$

(somme des coefficients diagonaux).

Théorème. Pour $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices,

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Conséquence. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme. On note :

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(u)),$$

où $\mathcal{E}$ est n'importe quelle base de E. Le nombre $\mathrm{tr}(u)$ ne dépend pas de la base choisie.

Déterminant

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

Déterminant de A : $\qquad \det(A) = \dots$

(développement par rapport à une ligne ou une colonne, manipulations élémentaires, ...)

Théorème. Pour $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Conséquence. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme. On note :

$$\det(u) = \det(\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(u)),$$

où $\mathcal{E}$ est n'importe quelle base de E. Le nombre $\det(u)$ ne dépend pas de la base choisie.

Déterminant

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

Déterminant de A : $\quad \det(A) = \dots$

(développement par rapport à une ligne ou une colonne, manipulations élémentaires, ...)

Théorème. Pour $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Conséquence. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme. On note :

$$\det(u) = \det(\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(u)),$$

où $\mathcal{E}$ est n'importe quelle base de E. Le nombre $\det(u)$ ne dépend pas de la base choisie.

Déterminant

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

Déterminant de A : $\quad \det(A) = \dots$

(développement par rapport à une ligne ou une colonne, manipulations élémentaires, ...)

Théorème. Pour $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Conséquence. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme. On note :

$$\det(u) = \det(\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(u)),$$

où $\mathcal{E}$ est n'importe quelle base de E. Le nombre $\det(u)$ ne dépend pas de la base choisie.

Plan du cours

Sous-espaces supplémentaires

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E.

On dit que F et G sont supplémentaires dans E si

- $F \cap G = \{0_E\}$;
- $F + G = E$.

c'est-à-dire si

- pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.

On note $E = F \oplus G$.
On dit que y est le projeté de x sur le sous-espace F parallèlement au supplémentaire G.
Le projecteur $p : E \to E,\ x \mapsto y$, est un endomorphisme linéaire de E.

Caractérisation des projecteurs

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E.
Soit p le projecteur sur F parallèlement à G,
et q le projecteur sur G parallèlement à F.

Propriétés des projecteurs

1. $\ker p = G$; $\ker q = F$.
2. $\operatorname{im} p = \operatorname{inv} p = F$; $\operatorname{im} q = \operatorname{inv} q = G$.
3. $p + q = \mathrm{Id}_E$;
4. $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$;
5. $p^2 = p$; $q^2 = q$.

Théorème de caractérisation des projecteurs

Soit $p : E \to E$ un endomorphisme linéaire.

$$p \text{ est un projecteur} \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = p.$$

Symétries

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E.
Soit p le projecteur sur F parallèlement à G,
et q le projecteur sur G parallèlement à F.

L'endomorphisme $s = p - q$ est appelé la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Propriétés des symétries

1. s est un automorphisme de E.
2. $\mathrm{inv}(s) = F$; $\mathrm{opp}(s) = G$.
3. $s^2 = \mathrm{Id}_E$.

Théorème de caractérisation des symétries

Soit $s : E \to E$ un endomorphisme linéaire.

$$s \text{ est une symétrie} \quad \Leftrightarrow \quad s^2 = \mathrm{Id}_E.$$

Supplémentaires et bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème. Supposons $E = F \oplus G$.
Si $(f_1, \ldots, f_k)$ est une base de F et $(g_1, \ldots, g_l)$ une base de G, alors $(f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l)$ est une base de E.

Théorème. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, et si $2 \leqslant k \leqslant n-1$, alors

$$E = \mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_k\} \oplus \mathrm{vect}\{e_{k+1}, \ldots, e_n\}.$$

Corollaire. Si E est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire.

Supplémentaires et dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème. Soient F et G deux sous-espaces de E.

1. Si $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.
2. Si $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$, alors $E = F \oplus G$.
3. Si $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$, alors $E = F \oplus G$.

Théorème du rang

Soit $u : E \to F$ une application linéaire.

Théorème. Si S est un supplémentaire de $\ker u$ dans E, alors u induit un isomorphisme $\tilde{u} : S \to \operatorname{im} u$.

Corollaire (théorème du rang). Si E est de dimension finie, alors

$$\dim E = \dim(\ker u) + \operatorname{rang} u.$$

Corollaire. Si E et F sont de dimensions finies, alors la matrice de u dans des bases *bien choisies* $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est de la forme :

$$J_r = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & 1 & \\ & (0) & & (0) \end{bmatrix}.$$

Rappels : familles et applications linéaires

Soit $u : E \to F$ une application linéaire,
et $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On note $u(\mathcal{X}) = (u(x_1), \ldots, u(x_n))$, famille de vecteurs de F.

1. Si $\mathcal{X}$ est liée, alors $u(\mathcal{X})$ est liée ;
   si $u(\mathcal{X})$ est libre, alors $\mathcal{X}$ est libre.
2. Si $\mathcal{X}$ est libre ET u est injective, alors $u(\mathcal{X})$ est libre.
3. Si $\mathcal{X}$ engendre E, alors $u(\mathcal{X})$ engendre $\mathrm{im}(u)$.
4. Si $\mathcal{X}$ est une base de E, alors :

$$\begin{aligned} u(\mathcal{X}) \text{ est libre} &\quad\Leftrightarrow\quad u \text{ est injective ;} \\ u(\mathcal{X}) \text{ engendre } F &\quad\Leftrightarrow\quad u \text{ est surjective ;} \\ u(\mathcal{X}) \text{ est une base de } F &\quad\Leftrightarrow\quad u \text{ est un isomorphisme.} \end{aligned}$$

Sommes directes

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On définit une application linéaire

$$u : \begin{array}{ccc} F \times G & \to & E \\ (y, z) & \mapsto & y + z. \end{array}$$

- $F \cap G = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad u$ est injective.

  On dit alors que F et G sont en somme directe, et on note $F \oplus G$ pour la somme $F + G$.

- $F + G = E \quad \Leftrightarrow \quad u$ est surjective.

- F et G sont supplémentaires $\Leftrightarrow$ u est un isomorphisme.

Sommes directes généralisées

Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On définit une application linéaire

$$u : \begin{array}{ccc} F_1 \times \cdots \times F_n & \to & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_1 + \ldots + x_n. \end{array}$$

- On dit que les sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe si l'application u est injective.
  On note alors $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ pour la somme $F_1 + \cdots + F_n$.
- Si $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$, on dit qu'on a une décomposition de E en somme directe de sous-espaces vectoriels.

Attention ! Il ne suffit pas d'avoir $F_i \cap F_j = \{0\},\ i \neq j$, pour que les $F_1, \ldots F_n$ soient en somme directe.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels.
Soit $\mathcal{F}_i$ une base de F_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Théorème. On a $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ si, et seulement si, $\mathcal{F}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{F}_n$ est une base de E.

Corollaire. Si $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$, alors

$$\dim E = \dim F_1 + \cdots + \dim F_n$$

Sommes directes et applications linéaires

Supposons $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.

Soient $v_1 : E_1 \to F, \ \ldots, \ v_n : E_n \to F$ des applications linéaires.

Théorème. Il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ telle que :

$$u_{|E_1} = v_1, \quad \ldots, \quad u_{|E_n} = v_n.$$

Exemple. L'endomorphisme $u : E \to E$ telle que :

$$u_{|E_1} = \lambda_1 \operatorname{Id}_{E_1}, \quad \ldots, \quad u_{|E_n} = \lambda_n \operatorname{Id}_{E_n}.$$

Sous-espace stable par un endomorphisme

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme linéaire.

- Un vecteur x de E est fixe ou invariant par u si $u(x) = x$.
- Un sous-espace F de E est stable ou globalement invariant par u si $u(F) \subseteq F$, c'est-à-dire si :
$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F.$$

Remarque. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots e_n)$ une base de E, et $1 \leqslant k \leqslant n$. Si le sous-espace $F = \mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_k\}$ est stable par u, alors la matrice de u dans la base $\mathcal{E}$ est triangulaire supérieure par blocs :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{bmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}.$$

Plan du cours

Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

- Soit x un vecteur de coordonnées $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathcal{E}$.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(x) = [x]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

- Soit $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) = [\mathcal{X}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),$$

où le vecteur x_j a pour coordonnées $a_{1,j}, \ldots, a_{i,j}, \ldots, a_{n,j}$ dans la base $\mathcal{E}$.

Matrice d'une application linéaire

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E,
et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

- Soit $u : E \to F$ une application linéaire.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = [u]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} = [u(\mathcal{E})]_{\mathcal{F}} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

- Si $E = F$ et $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, on note $\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(u)$ pour $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(u)$.
- $[u(x)]_{\mathcal{F}} = [u]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} \cdot [x]_{\mathcal{E}}$
- $[v \circ u]_{\mathcal{G}\leftarrow\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{G}\leftarrow\mathcal{F}} \cdot [u]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}$

Changement de base

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de l'espace vectoriel E.

Matrice de passage.

$$P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}') = [\mathcal{E}']_{\mathcal{E}} = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E) = [\mathrm{Id}_E]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'}$$

- Formule pour un vecteur $x \in E$ (idem pour une famille) :

$$[x]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'} \cdot [x]_{\mathcal{E}'}$$

- Formule pour une application linéaire $u : E \to F$:

$$[u]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} = P_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{F}'} \cdot [u]_{\mathcal{F}'\leftarrow\mathcal{E}'} \cdot (P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'})^{-1}$$

- Formule pour un **endomorphisme** linéaire $u : E \to E$:

$$[u]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'} \cdot [u]_{\mathcal{E}'\leftarrow\mathcal{E}'} \cdot (P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'})^{-1}$$

Polynômes d'endomorphismes et de matrices

Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_d X^d \in \mathbb{K}[X]$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme. On note :

$$P(u) = a_0 \,\mathrm{Id}_E + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_d u^d \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E).$$

Soit $n \geqslant 1$ un entier et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On note :

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_d A^d \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

À retenir.

$$[P+Q](u) = P(u) + Q(u) \quad ; \quad [PQ](u) = P(u) \circ Q(u).$$
$$[P+Q](A) = P(A) + Q(A) \quad ; \quad [PQ](A) = P(A) \cdot Q(A).$$

Polynôme annulateur

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.
Définition. Soit P un polynôme. On dit que P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$.

Théorème 1. Si E est de dimension finie, alors u possède au moins un polynôme annulateur non nul.

Théorème 2. Si u possède au moins un polynôme annulateur, alors il existe un unique polynôme Π_u tel que :

1. Π_u est un polynôme annulateur de u ;
2. tout polynôme annulateur de u est un multiple de Π_u ;
3. Π_u est un polynôme unitaire (coefficient dominant $= 1$).

Endomorphismes particulier

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$, ou une matrice carrée $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, est :

- idempotent-e si il/elle est annulé-e par le polynôme $X^2 - X$;
- nilpotent-e si il/elle est annulé-e par le polynôme X^d, pour un entier $d \geqslant 1$;
- une involution (ou une matrice involutive) si il/elle est annulé-e par le polynôme $X^2 - 1$.

Un exemple

Exercice.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.
Soient $\alpha \neq \beta$ deux scalaires distincts, et $P = (X - \alpha)(X - \beta)$.
On suppose que $P(u) = 0$.

Montrer que la matrice de u, dans une base $\mathcal{E}$ bien choisie, est :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & \alpha & & & \\ & & & \beta & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \beta \end{bmatrix}$$

Racines d'un polynôme, multiplicité

Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_d X^d \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.

Définition. λ est une racine de P si $P(\lambda) = 0$, c'est-à-dire s'il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \lambda)Q$.
On note $(X - \lambda) \mid P$, qui se lit "$(X - \lambda)$ divise P".

λ est une racine simple si $(X - \lambda) \mid P$ mais $(X - \lambda)^2 \nmid P$.

λ est une racine double si $(X - \lambda)^2 \mid P$ mais $(X - \lambda)^3 \nmid P$.

λ est une racine triple si $(X - \lambda)^3 \mid P$ mais $(X - \lambda)^4 \nmid P$.

λ est une racine de P de multiplicité m si

$$(X - \lambda)^m \mid P \quad \text{mais} \quad (X - \lambda)^{m+1} \nmid P.$$

Factorisation d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.

Définition. On dit que P est scindé sur K si on peut écrire :

$$P = \alpha(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_d),$$

avec $\alpha \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ les racines de P.
Une même racine peut apparaître plusieurs fois, selon sa multiplicité.
À l'ordre près des racines, cette factorisation de P est unique.

Attention ! Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ n'est pas toujours scindé sur $\mathbb{K}$.

Théorème fondamental de l'algèbre.
Tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ sont scindés.
Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est de degré d, il admet donc exactement d racines, comptées avec leurs multiplicités.

Théorème de Bézout

On suppose $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$.

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes.

Définition. On dit que P et Q sont premiers entre eux s'ils n'ont aucune racine *complexe* en commun.

Théorème de Bézout. Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux, alors il existe des polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$AP + BQ = 1.$$

Remarque. Le théorème reste vrai pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque, mais il faut alors généraliser la définition.

Théorème de décomposition des noyaux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes.

Théorème. Si P et Q sont premiers entre eux, alors

$$\ker\big[P(u) \circ Q(u)\big] = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

Plan du cours

Éléments propres

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.

1. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur *non nul* $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$, c'est-à-dire si :
$$\ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\}.$$
2. $x \in E$ est un vecteur propre de u si $x \neq 0_E$ et s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$, c'est-à-dire si :
$$\text{la droite } \mathbb{K}x \text{ est stable par } u.$$
3. Le sous-espace propre associé à une valeur propre λ est le sous-espace vectoriel :
$$E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}.$$

Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, on applique ces définitions à l'endomorphisme $u_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \; X \mapsto AX$.

Endomorphismes diagonalisables

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.
Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les valeurs propres (distinctes) de u.

Définition. L'endomorphisme u est diagonalisable si :

$$E = E_{\alpha_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\alpha_n}(u).$$

Dans une base adaptée à cette somme directe, la matrice de u est alors diagonale.

Remarque. Puisque les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des scalaires distincts, la somme $E_{\alpha_1}(u) + \cdots + E_{\alpha_n}(u)$ est toujours directe.

Théorème 1. L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, $\dim E = \dim E_{\alpha_1}(u) + \cdots + \dim E_{\alpha_n}(u)$.

Théorème 2. L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé et à racines simples.

Endomorphismes nilpotents

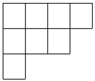
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.
On suppose que $u^{\alpha-1} \neq \tilde{0}$ et $u^{\alpha} = \tilde{0}$, avec $\alpha \geqslant 1$.

On a $\{0\} = \ker u^0 \subseteq \ker u^1 \subseteq \cdots \subseteq \ker u^{\alpha} = E$.
Pour $1 \leqslant i \leqslant \alpha$, notons $c_i = \dim(\ker u^i) - \dim(\ker u^{i-1})$
$= \dim(\ker u \cap \operatorname{im} u^{i-1})$.

Proposition. Avec ces notations,

- $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \cdots \geqslant c_{\alpha}$;
- $c_1 + c_2 + \cdots + c_{\alpha} = n$;

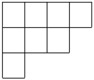
On dessine un tableau de Young à α colonnes et n cases :



(avec ici $n = 8$, $\alpha = 4$,
$c_1 = 3$, $c_2 = c_3 = 2$, $c_4 = 1$)

Endomorphismes nilpotents

Soit $u : E \to E$ tel que $u^{\alpha-1} \neq \tilde{0}$ et $u^{\alpha} = \tilde{0}$.



hauteur de la i-ème colonne :
$c_i = \dim(\ker u^i) - \dim(\ker u^{i-1})$

Notons β le nombre de lignes, et $\ell_1 \geqslant \ldots \geqslant \ell_\beta$ leurs longueurs. Ainsi $\ell_1 + \cdots + \ell_\beta = n$.

(avec ici $n = 8$, $\beta = 3$, $\ell_1 = 4$, $\ell_2 = 3$, $\ell_3 = 1$)

Théorème. Dans une base $\mathcal{E}$ adaptée, la matrice de u est de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(avec β blocs,
de tailles $\ell_1, \ldots, \ell_\beta$)

Exemple : réduction d'une matrice nilpotente

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & -6 \\ -2 & -6 & 2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Polynôme caractéristique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.

Définition. Le polynôme caractéristique χ_u de u est défini par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda \, \mathrm{Id}_E).$$

Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u.

Exemple. On considère la “matrice compagnon”

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ & & & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A = (-1)^n \left[X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0 \right].$$

Théorème de Cayley-Hamilton

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.

Théorème de Cayley-Hamilton. Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur de u :

$$\chi_u(u) = \tilde{0}.$$

Corollaire. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n possède toujours un polynôme annulateur de degré $\leqslant n$.

Sous-espaces caractéristiques

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.
Supposons que le polynôme caractéristique de u est scindé :

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_k)^{m_k},$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de u.
On dit que λ_i est une valeur propre de multiplicité m_i.

Le sous-espace caractéristique associé à une valeur propre λ_i est le sous-espace vectoriel :

$$E^{car}_{\lambda_i}(u) = \ker(u - \lambda_i)^{m_i}.$$

Théorème. $E = E^{car}_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E^{car}_{\lambda_k}(u).$

Attention ! Les résultats ci-dessus sont toujours vrais si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mais pas toujours si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$.

Endomorphisme trigonalisable

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.

Théorème de Jordan. Si le polynôme caractéristique χ_u est scindé, alors, dans une base $\mathcal{E}$ adaptée, la matrice de u est de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & & & & & & & \\ & \alpha & & & & & & & & & \\ & & \alpha & 1 & & & & & & & \\ & & & \alpha & & & & & & & \\ & & & & \beta & 1 & & & & & \\ & & & & & \beta & 1 & & & & \\ & & & & & & \beta & & & & \\ & & & & & & & \beta & & & \\ & & & & & & & & \gamma & 1 & \\ & & & & & & & & & \gamma & \\ & & & & & & & & & & \delta \end{bmatrix}$$

(avec ici les valeurs propres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de multiplicités $4, 4, 2, 1$)

Corollaire. Si λ_i est une valeur propre de u de multiplicité m_i, alors $\dim E^{car}_{\lambda_i}(u) = m_i$.

La trigonalisation en pratique

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ -7 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Plan du cours

Corps de base

Pour tout ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ est *nécessairement* $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition d'un produit scalaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Un produit scalaire sur l'espace vectoriel E, c'est :

- une application $\phi : E \times E \to \mathbb{K}, \ (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$

vérifiant les propriétés :

1. ϕ est linéaire à droite :
$$\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$$
2. ϕ est linéaire à gauche (semilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :
$$\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$$
$$(= \bar{\lambda} \langle x, z \rangle + \bar{\mu} \langle y, z \rangle \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C})$$
3. ϕ est symétrique (hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :
$$\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle \qquad (\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C})$$
4. ϕ est définie positive :
$$x \neq 0_E \quad \Rightarrow \quad \langle x, x \rangle > 0.$$

Définition d'un produit scalaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Un produit scalaire sur l'espace vectoriel E, c'est :

- une application $\phi : E \times E \to \mathbb{K}, \; (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$

vérifiant les propriétés :

1. ϕ est linéaire à droite :
$$\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$$
2. ϕ est linéaire à gauche (semilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :
$$\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$$
$$(= \bar{\lambda} \langle x, z \rangle + \bar{\mu} \langle y, z \rangle \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C})$$
3. ϕ est symétrique (hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :
$$\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle \qquad (\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C})$$
4. ϕ est définie positive :
$$x \neq 0_E \quad \Rightarrow \quad \langle x, x \rangle > 0.$$

Norme euclidienne, inégalité de Cauchy-Schwartz

Soit ϕ un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.

La norme euclidienne associée à ϕ est l'application :

$$N : E \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Théorème (inégalité de Cauchy-Schwartz).
Si x et y sont deux vecteurs de E, alors $\big|\langle x, y\rangle\big| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Propriétés de la norme euclidienne.

1. Positivité : $\|x\| \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.
2. Séparation : $x \neq 0_E \;\Rightarrow\; \|x\| > 0$.
3. Homogénéité : $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
4. Inégalité triangulaire : $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Cas d'égalité

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur l'espace vectoriel E, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

Soient $x, y \in E$.

Égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

$$\big| \langle x, y \rangle \big| = \|x\| \cdot \|y\| \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}$$

Égalité dans l'inégalité triangulaire.

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x \text{ et } y \text{ sont positivement liés :} \\ x = 0 \ \text{ ou } \ \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, \ y = \lambda x. \end{array}$$

Exemples de produits scalaires

1. Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$:
$$E = \mathbb{R}^n, \quad \langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$
2. Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$:
$$E = \mathbb{C}^n, \quad \langle X, Y \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \cdots + \bar{x}_n y_n.$$
3. Un produit scalaire défini par une intégrale :
$$E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt.$$
4. Un autre produit scalaire défini par une intégrale :
$$E = \mathbb{C}[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 \overline{P(t)} Q(t)\, dt.$$
5. Bien d'autres choix possibles sur $\mathbb{K}[X]$, sur $\mathbb{K}_n[X]$...

Vecteurs ortogonaux, unitaires

Soit E un espace euclidien (hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), c'est-à-dire un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire ϕ.

1. Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$.
2. Un vecteur $x \in E$ est unitaire si $\|x\| = 1$.

   Attention : ne pas confondre avec un polynôme unitaire.
3. Une famille/base orthogonale de E est une famille/base dont les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.
4. Une famille/base orthonormale de E est une famille/base dont les vecteurs sont unitaires et deux à deux orthogonaux.

Familles et bases orthogonales

Proposition. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est une famille libre.

Application. Soit E un espace euclidien ou hermitien, et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. Pour prouver que $\mathcal{E}$ est une base orthogonale de E, il faut prouver que :
   - les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont non nuls ;
   - pour tout $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$;
   - $n = \dim E$.
2. Pour prouver que $\mathcal{E}$ est une base orthonormale de E, il faut prouver que :
   - pour tout i, $\langle e_i, e_i \rangle = 1$;
   - pour tout $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$;
   - $n = \dim E$.

Supplémentaire orthogonal

Soit E un espace euclidien ou hermitien.

1. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux si :

$$x \in F,\ y \in G \quad \Rightarrow \quad x \perp y.$$

2. Si F est un sous-espace vectoriel de F, l'orthogonal de F est :

$$F^{\perp} \ = \ \{x \in E \mid \forall y \in F,\ x \perp y\}$$

Proposition.

- Si $F \perp G$, alors $F \cap G = \{0_E\}$ et $G \subseteq F^{\perp}$.
- $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel et un supplémentaire de F dans E. On note :

$$E \ = \ F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} \qquad \text{(somme directe orthogonale).}$$

Projecteur orthogonal

Soit E un espace euclidien ou hermitien.
Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Soit p le projecteur orthogonal sur F, c'est-à-dire le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

Théorème. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\|x - p(x)\| = \min\Big\{ \|x - y\| \ \Big| y \in F \Big\}$$

Le projeté $p(x)$ est le point de F le plus proche de x.

Le projeté $p(x)$ réalise la meilleure approximation de x par un élément de F, au sens de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ (*i.e.*, au sens des moindres carrés).

Projecteur orthogonal : formules

Soit E un espace euclidien ou hermitien.
Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Soit p le projecteur orthogonal sur F.

Proposition. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base orthogonale de F.
Pour tout $x \in E$, on a :

$$p(x) = \frac{\langle e_1, x \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 + \cdots + \frac{\langle e_k, x \rangle}{\|e_k\|^2} e_k.$$

Corollaire. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale de E.
Les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans la base $\mathcal{E}$ sont :

$$\lambda_1 = \frac{\langle e_1, x \rangle}{\|e_1\|^2}, \ \ldots, \ \lambda_n = \frac{\langle e_n, x \rangle}{\|e_n\|^2}.$$

Procédé de Gram-Schmidt

Soit E un espace vectoriel euclidien ou hermitien.
Soit $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ une base quelconque de E.

Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on note

- $e_k = x_k - p_{k-1}(x_k)$, où p_{k-1} est le projecteur orthogonal sur $F_{k-1} = \mathrm{vect}\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$.
- $e'_k = e_k / \|e_k\|$.

Formule. $$e_k = x_k - \frac{\langle e_1, x_k\rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \cdots - \frac{\langle e_{k-1}, x_k\rangle}{\|e_{k-1}\|^2} e_k$$

Théorème.

- La famille $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthogonale de E, et la matrice de passage $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{X}}$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.
- La famille $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une base orthonormale de E, et la matrice de passage $P_{\mathcal{E}'\leftarrow\mathcal{X}}$ est triangulaire supérieure avec des réels positifs sur la diagonale.

Application à l'approximation

Exercice. Trouver la fonction quadratique f qui est la meilleure approximation de la fonction $t \mapsto \sin \pi t$ sur $[0, 1]$ au sens des moindres carrés, c'est-à-dire celle qui minimise la quantité :

$$\int_0^1 \left(f(t) - \sin \pi t\right)^2 dt.$$

Évaluation du cours

TRÈS IMPORTANT :

N'oubliez pas de participer à l'évaluation du cours MAT-2200.

- Rendez-vous à `https://pixel.fsg.ulaval.ca/` et ouvrez une session à l'aide de votre IDUL et de votre NIP.
- Vous pourrez sélectionner *Évaluation de l'enseignement* dans les onglets du cours MAT-2200, colonne de gauche.
- N'hésitez pas à laisser des commentaires détaillés, pour que je puisse savoir ce qui fonctionne bien et ce qui devrait être amélioré.

À venir

Minitest du mardi 8 avril.

Matière : tout jusqu'au mardi 1er avril.

Questions ?

Hors sujet

Cet après-midi.

Séminaire informel sur le langage des catégories.

Pour qui ? $\rightarrow$ des étudiants au baccalauréat.

Où ? $\rightarrow$ local VCH-1613.

Quand $\rightarrow$ 14h30 - 15h30.

Matrices orthogonales, unitaires

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A, et $L_1, \ldots, L_n$ ses lignes.

On dit que la matrice A est orthogonale (unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes :

1. $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{K}^n$.
2. $(L_1^t, \ldots, L_n^t)$ est une base orthonormale de $\mathbb{K}^n$.
3. $A^t \cdot A = I_n \quad (\bar{A}^t \cdot A = I_n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C})$.
4. $A \cdot A^t = I_n \quad (A \cdot \bar{A}^t = I_n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C})$.
5. A est inversible et $A^{-1} = A^t \quad (A^{-1} = \bar{A}^t$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C})$.

Produit scalaire et coordonnées

Soit E un espace vectoriel euclidien ou hermitien.
Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Formule. Soient x, y deux vecteurs de E.
Soit $X = [x]_{\mathcal{E}}$ et $Y = [y]_{\mathcal{E}}$ leurs vecteurs de coordonnées.

$$\langle x, y \rangle = X^t \cdot Y \qquad (\langle x, y \rangle = \bar{X}^t \cdot Y \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}).$$

Conséquence. Une famille $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ de n vecteurs de E est une base orthonormale si, et seulement si, la matrice carrée $A = [\mathcal{X}]_{\mathcal{E}}$ est orthogonale (unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Factorisation QR

Théorème.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Il existe un unique couple (Q, R) de matrices telles que

- $A = QR$;
- Q est une matrice orthogonale (unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ;
- R est triangulaire supérieure avec des réels positifs sur la diagonale.

Remarque. On peut adapter le théorème si la matrice A est rectangulaire, de taille $n \times p$ et de rang p (avec $p \leqslant n$).

Exemple.

Automorphismes orthogonaux

Soit E un espace euclidien ou hermitien.
Soit $\mathcal{E}$ une base orthonormale de E.
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.

Définition. On dit que u est un automorphisme orthogonal (unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) s'il vérifie l'une des conditions équivalentes :

1. u préserve le produit scalaire :
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \, .$$
2. u préserve la norme euclidienne :
$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$
3. $u(\mathcal{E})$ est une base orthonormale de E.
4. $[u]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}}$ est une matrice orthogonale.

Dual d'un espace vectoriel euclidien ou hermitien

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Rappel. Le dual de E est l'espace $E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E. On sait que $\dim E^* = \dim E$.

Théorème. On suppose que E est euclidien ou hermitien. Si $f : E \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur E, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle a, x \rangle .$$

En d'autres termes, l'application

$$\Phi \ : \ E \to E^*, \quad a \mapsto \langle a, - \rangle$$

est un isomorphisme linéaire (semi-linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Adjoint d'une application linéaire

Soient E, F deux espaces euclidiens ou hermitiens.
Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des bases orthonormales de E, F.

Soit $u : E \to F$ une application linéaire, et $A = [u]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}$.

Théorème. Il existe une unique application $\mathbb{K}$-linéaire $v : F \to E$ telle que

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F, \quad \langle u(x), y\rangle_F = \langle x, v(y)\rangle_E .$$

L'application v est appelé l'adjoint de u, et souvent notée u^*.
De plus,

$$[v]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}} = A^t \qquad ([v]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}} = \bar{A}^t \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}).$$

Endomorphisme particuliers

Soit E un espace euclidien ou hermitien.
Soit $\mathcal{E}$ une base orthonormale de E.

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme linéaire, et $A = [u]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}}$.

Définitions. On dit que :

1. u est auto-adjoint si $u^* = u$, c'est-à-dire si :
   - $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $A^t = A$ (u est symétrique) ;
   - $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\bar{A}^t = A$ (u est hermitien).
2. u est orthogonal (unitaire) si $u^* = u^{-1}$, c'est-à-dire si :
   - $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $A^t = A^{-1}$ (u est orthogonal) ;
   - $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\bar{A}^t = A^{-1}$ (u est unitaire).
3. u est normal si u^* commute avec u, c'est-à-dire si :
   - $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $A^t \cdot A = A \cdot A^t$;
   - $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\bar{A}^t \cdot A = A \cdot \bar{A}^t$.

   (Ce cas englobe les deux précédents, et bien d'autres.)

Endomorphisme auto-adjoints

Soit E un espace euclidien ou hermitien.

Définition. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme linéaire. On dit que u est auto-adjoint si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle \, .$$

On dit aussi que l'endomorphisme u est symétrique ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou hermitien ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Proposition.
Soit $\mathcal{E}$ une base orthonormale de E, et $A = [u]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}}$.
L'endomorphisme u est auto-adjoint si, et seulement si, la matrice A est symétrique ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou hermitienne ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Le théorème spectral

Soit E un espace euclidien ou hermitien.

Théorème. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme auto-adjoint.

1. Toutes les valeurs propres de u sont réelles.
2. L'endomorphisme u est diagonalisable.
3. Il existe une base de diagonalisation de u qui est orthonormale.

Théorème. Soit A une matrice carrée symétrique ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou hermitienne ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1. Toutes les valeurs propres de A sont réelles.
2. La matrice A est diagonalisable.
3. Il existe une matrice D diagonale réelle et une matrice P orthogonale ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou unitaire ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) telles que
$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = P^t \cdot A \cdot P$$

Formes quadratiques réelles

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Une forme quadratique sur l'espace vectoriel E, c'est une application $q : E \to \mathbb{R}$ qui peut s'écrire :

$$q(x) = \phi(x, x)$$

avec $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique, appelée la forme polaire de q.

Formules de polarisation. Pour $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}
\phi(x, y) &= \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(q(x) + q(y) - q(x-y)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(q(x+y) - q(x-y)\Big)
\end{aligned}$$

Matrice d'une forme quadratique réelle

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit $q : E \to R$ une forme quadratique, et ϕ sa forme polaire.
On note $[q]_{\mathcal{E}} = A$, matrice $n \times n$, où $a_{i,j} = \phi(e_i, e_j)$.
A est une matrice symétrique.

Formule de changement de base.
Soit $\mathcal{E}'$ une autre base de E, $P = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}$, et $B = [q]_{\mathcal{E}'}$.
Alors :

$$B = P^t \cdot A \cdot P.$$

Théorème de diagonalisation.
Il existe une base $\mathcal{E}$ de E telle que la matrice $[q]_{\mathcal{E}}$ soit diagonale.