Mathématiques pour l'ingénieur 2

MAT 1910

Erwan Biland

Université Laval

Hiver 2011

Objectifs de la semaine 11

Définir les notions :

- surface paramétrée dans l'espace ;
- plan tangent, vecteur normal ;
- orientation d'une surface.

Calculer l'élément d'aire sur une surface.

Intégrer une fonction scalaire sur une surface.

Surface paramétrée

Notons $M(u,v)$ un point dépendant de deux paramètres u et v.

$$\hookrightarrow \text{ vecteur position } \vec{r}(u,v) = \overrightarrow{OM(u,v)} = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}.$$

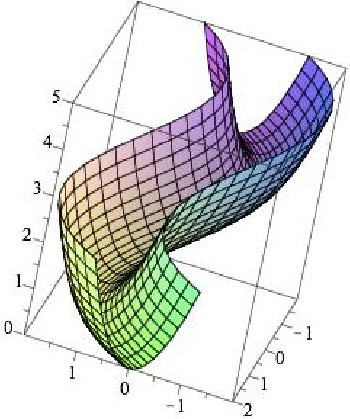
Soit $D_{u,v}$ le domaine de définition de la fonction $M(u,v)$.

Surface paramétrée

Notons $M(u,v)$ un point dépendant de deux paramètres u et v.

$\hookrightarrow$ vecteur position
$$\vec{r}(u,v) = \overrightarrow{OM(u,v)} = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}.$$

Soit $D_{u,v}$ le domaine de définition de la fonction $M(u,v)$.



$$\mathcal{S} = \left\{ M(u,v)\ ;\ (u,v) \in D_{u,v} \right\}.$$

Plan tangent

On a les vecteurs tangents :

$$\overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k} \quad ; \quad \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}} = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$$

Plan tangent

On a les vecteurs tangents :

$$\overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k} \quad ; \quad \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}} = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$$

S'ils ne sont pas colinéaires, on a le plan tangent P, qui est le plan passant par M et contenant les vecteurs tangents.

On a un vecteur normal au plan P :

$$\overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}}$$

Plan tangent

On a les vecteurs tangents :

$$\overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k} \quad ; \quad \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}} = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$$

S'ils ne sont pas colinéaires, on a le plan tangent P, qui est le plan passant par M et contenant les vecteurs tangents.

On a un vecteur normal au plan P :

$$\overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}}$$

On préfère souvent un vecteur normal *unitaire* :

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}}}{\left\| \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}} \right\|}$$

Orientation d'une surface

Orienter la surface $\mathcal{S}$, c'est choisir un "sens" pour la traverser. C'est se donner, en chaque point M de $\mathcal{S}$, un vecteur normal unitaire $\vec{n}(M)$, qui varie continûment.

Orientation d'une surface

Orienter la surface $\mathcal{S}$, c'est choisir un "sens" pour la traverser. C'est se donner, en chaque point M de $\mathcal{S}$, un vecteur normal unitaire $\vec{n}(M)$, qui varie continûment.

Si le produit vectoriel $\overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}}$ ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$, on choisit :

$$\vec{n}(M) = \frac{\overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}}}{\left\| \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}} \right\|}$$

Calcul de l'élément de surface

- Cas d'un paramétrage linéaire

$$\begin{cases} x(u,v) = x_0 + au + bv \\ y(u,v) = y_0 + cu + dv \\ z(u,v) = z_0 + eu + fv \end{cases} \quad ; \quad \begin{matrix} u_0 \leqslant u \leqslant u_1 \\ v_0 \leqslant v \leqslant v_1 \end{matrix}$$

On obtient un parallélogramme $ABCD$.

$$\mathcal{A}(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \left\|\overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}}\right\| \Delta u \, \Delta v.$$

Calcul de l'élément de surface

- Cas d'un paramétrage linéaire

$$\begin{cases} x(u,v) = x_0 + au + bv \\ y(u,v) = y_0 + cu + dv \\ z(u,v) = z_0 + eu + fv \end{cases} \quad ; \qquad \begin{array}{l} u_0 \leqslant u \leqslant u_1 \\ v_0 \leqslant v \leqslant v_1 \end{array}$$

On obtient un parallélogramme $ABCD$.

$$\mathcal{A}(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \left\|\overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}}\right\| \Delta u \, \Delta v.$$

- Cas général

$$dA = \left\|\overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}}\right\| du \, dv.$$

Intégration d'un champ scalaire

On veut intégrer une fonction $f(\vec{r})$ le long de la surface $\mathcal{S}$.

$$\iint_{\mathcal{S}} f(\vec{r})\, dA = \iint_{D_{u,v}} f\Big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\Big) \left\| \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}} \right\| du\, dv$$

Applications

Surface totale : $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dA$

Applications

Surface totale : $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dA$

Pour une masse surfacique $\sigma(\vec{r})$:

- masse totale : $M = \iint_{\mathcal{S}} \sigma(\vec{r})\, dA$

Applications

Surface totale : $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dA$

Pour une masse surfacique $\sigma(\vec{r})$:

- masse totale : $M = \iint_{\mathcal{S}} \sigma(\vec{r})\, dA$
- centre de gravité : $x_G = \dfrac{1}{M} \iint_{\mathcal{S}} x(\vec{r})\, \sigma(\vec{r})\, dA$

Applications

Surface totale : $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dA$

Pour une masse surfacique $\sigma(\vec{r})$:

- masse totale : $M = \iint_{\mathcal{S}} \sigma(\vec{r})\, dA$
- centre de gravité : $x_G = \dfrac{1}{M} \iint_{\mathcal{S}} x(\vec{r})\, \sigma(\vec{r})\, dA$
- moment d'inertie, par rapport à l'axe (Oz) :

$$J_{(Oz)} = \iint_{\mathcal{S}} \left[x(\vec{r})^2 + y(\vec{r})^2 \right] \sigma(\vec{r})\, dA$$

Applications

Surface totale : $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dA$

Pour une masse surfacique $\sigma(\vec{r})$:

- masse totale : $M = \iint_{\mathcal{S}} \sigma(\vec{r})\, dA$
- centre de gravité : $x_G = \dfrac{1}{M} \iint_{\mathcal{S}} x(\vec{r})\, \sigma(\vec{r})\, dA$
- moment d'inertie, par rapport à l'axe (Oz) :

$$J_{(Oz)} = \iint_{\mathcal{S}} \left[x(\vec{r})^2 + y(\vec{r})^2 \right] \sigma(\vec{r})\, dA$$

Exercice. Ecrire les formules pour y_G, z_G, et pour les autres moments d'inertie.

Objectifs de la semaine 12

Dans le plan :

- Calculer le flux d'un champ vectoriel à travers une courbe orientée.

Dans l'espace :

- Calculer le flux d'un champ vectoriel à travers une surface orientée.

Flux traversant une courbe plane

Fluide en mouvement. On considère un fluide qui se déplace dans le plan à une vitesse constante $\vec{v}$. On veut connaître la quantité de fluide qui traverse un segment $[AB]$ entre les instants t_0 et t_1.

Flux traversant une courbe plane

Fluide en mouvement. On considère un fluide qui se déplace dans le plan à une vitesse constante $\vec{v}$. On veut connaître la quantité de fluide qui traverse un segment $[AB]$ entre les instants t_0 et t_1.
Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à $[AB]$. Le flux est compté positivement s'il va dans le sens de $\vec{n}$, négativement sinon.

$$Q = \vec{v}.\vec{n}\,\ell\big([AB]\big)\,(t_1 - t_0) = \vec{v}.\vec{n}\,\Delta s\,\Delta t$$

Flux traversant une courbe plane

Fluide en mouvement. On considère un fluide qui se déplace dans le plan à une vitesse constante $\vec{v}$. On veut connaître la quantité de fluide qui traverse un segment $[AB]$ entre les instants t_0 et t_1.

Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à $[AB]$. Le flux est compté positivement s'il va dans le sens de $\vec{n}$, négativement sinon.

$$Q = \vec{v}.\vec{n}\,\ell\big([AB]\big)\,(t_1 - t_0) = \vec{v}.\vec{n}\,\Delta s\,\Delta t$$

$\Phi = \vec{v}.\vec{n}\,\Delta s$ est le flux de $\vec{v}$ à travers $[AB]$.

Flux traversant une courbe plane

Fluide en mouvement. On considère un fluide qui se déplace dans le plan à une vitesse constante $\vec{v}$. On veut connaître la quantité de fluide qui traverse un segment $[AB]$ entre les instants t_0 et t_1.
Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à $[AB]$. Le flux est compté positivement s'il va dans le sens de $\vec{n}$, négativement sinon.

$$Q = \vec{v}.\vec{n}\,\ell\big([AB]\big)\,(t_1 - t_0) = \vec{v}.\vec{n}\,\Delta s\,\Delta t$$

$\Phi = \vec{v}.\vec{n}\,\Delta s$ est le flux de $\vec{v}$ à travers $[AB]$.

Flux à travers une courbe

$$\Phi = \int_\Gamma \vec{v}(\vec{r}).\vec{n}(\vec{r})\,ds$$

Si on calcule le flux "vers la droite", pour un paramétrage $\vec{r}(u)$:

$$\Phi = \int_\Gamma \det(\vec{v}(\vec{r}), \vec{T})ds = \int_a^b \det\left(\vec{v}(\vec{r}), \overrightarrow{\frac{dr}{du}}\right) du$$

Flux et circulation

Soit $\vec{F}(\vec{r}) = a(\vec{r})\,\vec{i} + b(\vec{r})\,\vec{j}$.

Soit Γ paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$.

Flux et circulation

Soit $\vec{F}(\vec{r}) = a(\vec{r})\,\vec{i} + b(\vec{r})\,\vec{j}$.

Soit Γ paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$.

Le flux de $\vec{F}$ à travers Γ est donné par :

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{t_0}^{t_1} \det\left(\vec{F}(\vec{r}), \overrightarrow{\frac{dr}{dt}}\right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(\vec{r}(t))y'(t) - b(\vec{r}(t))x'(t)\ dt\end{aligned}$$

Flux et circulation

Soit $\vec{F}(\vec{r}) = a(\vec{r})\,\vec{i} + b(\vec{r})\,\vec{j}$.

Soit Γ paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$.

Le flux de $\vec{F}$ à travers Γ est donné par :

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{t_0}^{t_1} \det\left(\vec{F}(\vec{r}), \overrightarrow{\frac{dr}{dt}}\right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(\vec{r}(t))y'(t) - b(\vec{r}(t))x'(t)\ dt\end{aligned}$$

Notons $\vec{G}(\vec{r}) = -b(\vec{r})\,\vec{i} + a(\vec{r})\,\vec{j}$.

Le flux de $\vec{F}$ à travers Γ est la circulation de $\vec{G}$ le long de Γ :

Flux et circulation

Soit $\vec{F}(\vec{r}) = a(\vec{r})\,\vec{i} + b(\vec{r})\,\vec{j}$.

Soit Γ paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$.

Le flux de $\vec{F}$ à travers Γ est donné par :

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{t_0}^{t_1} \det\left(\vec{F}(\vec{r}), \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(\vec{r}(t))y'(t) - b(\vec{r}(t))x'(t)\ dt\end{aligned}$$

Notons $\vec{G}(\vec{r}) = -b(\vec{r})\,\vec{i} + a(\vec{r})\,\vec{j}$.

Le flux de $\vec{F}$ à travers Γ est la circulation de $\vec{G}$ le long de Γ :

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{t_0}^{t_1} \vec{G}(\vec{r}).\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\ dt \\ &= \int_{\Gamma} \vec{G}(\vec{r}).\overrightarrow{dr}\end{aligned}$$

Flux traversant une surface

Fluide en mouvement. On considère un fluide qui se déplace dans l'espace à une vitesse constante $\vec{v}$. On veut connaître la quantité de fluide qui traverse un parallélogramme $ABCD$ entre les instants t_0 et t_1.

Flux traversant une surface

Fluide en mouvement. On considère un fluide qui se déplace dans l'espace à une vitesse constante $\vec{v}$. On veut connaître la quantité de fluide qui traverse un parallélogramme $ABCD$ entre les instants t_0 et t_1.

Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à $ABCD$. Le flux est compté positivement s'il va dans le sens de $\vec{n}$, négativement sinon.

$$Q = \Phi \, \Delta t \ , \text{ avec } \ \Phi = \vec{v}.\vec{n} \, \mathcal{A}\big(ABCD\big)$$

Flux traversant une surface

Fluide en mouvement. On considère un fluide qui se déplace dans l'espace à une vitesse constante $\vec{v}$. On veut connaître la quantité de fluide qui traverse un parallélogramme $ABCD$ entre les instants t_0 et t_1.

Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à $ABCD$. Le flux est compté positivement s'il va dans le sens de $\vec{n}$, négativement sinon.

$$Q = \Phi\,\Delta t \text{ , avec } \Phi = \vec{v}.\vec{n}\,\mathcal{A}\big(ABCD\big)$$

Flux d'un champ vectoriel $\vec{F}$ à travers une surface

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{F}.\vec{n}\,dA$$

Flux traversant une surface

Fluide en mouvement. On considère un fluide qui se déplace dans l'espace à une vitesse constante $\vec{v}$. On veut connaître la quantité de fluide qui traverse un parallélogramme $ABCD$ entre les instants t_0 et t_1.
Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à $ABCD$. Le flux est compté positivement s'il va dans le sens de $\vec{n}$, négativement sinon.

$$Q = \Phi\,\Delta t \text{ , avec } \Phi = \vec{v}.\vec{n}\,\mathcal{A}\big(ABCD\big)$$

Flux d'un champ vectoriel $\vec{F}$ à travers une surface

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{F}.\vec{n}\,dA$$

Si on choisit $\vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}}}{\left\| \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}} \right\|}$:

$$\Phi = \iint_{D_{u,v}} \vec{F}(\vec{r}).\Big(\overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial u}} \times \overrightarrow{\frac{\partial r}{\partial v}}\Big)\,du\,dv$$

Théorème de Green

Deux versions :

Théorème. Soit X un domaine du plan, délimité par une courbe $\mathcal{C}$. La courbe $\mathcal{C}$ est orienté *de manière à laisser X à sa gauche*. Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel. Alors :

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} . \overrightarrow{dr} = \iint_X \mathrm{rot} \vec{F} \, dA$$

Théorème. Soit X un domaine du plan, délimité par une courbe $\mathcal{C}$. Le flux à travers $\mathcal{C}$ est calculé *vers l'extérieur de X*. Soit $\vec{G}$ un champ vectoriel. Alors :

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{G} . \overrightarrow{n} \, ds = \iint_X \mathrm{div} \vec{G} \, dA$$

Objectifs de la semaine 13

Un peu de "gros bon sens" :

- Quelques règles et astuces de calcul.

Théorème de Green :

- Exemples d'utilisation.
- Interprétation du rotationnel et de la divergence.

Théorème de Gauss :

- Extension à l'espace de la version "divergence" du théorème de Green.

Additivité de l'intégrale

Soit un domaine D (courbe, surface, volume, dans le plan ou dans l'espace).
On suppose $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$.
On suppose aussi les $D_i \cap D_j$ vides, ou au moins de *mesures* (longueur, aire, volume selon le cas) nulles.

Grandeurs additives. Les mesures, les masses, les moments d'inertie, les charges électriques... s'additionnent.

Grandeurs moyennées. Le centre de gravité de D s'obtient par moyenne des centres de gravités de D_1, D_2, D_3 *pondérée par les masses* de ces domaines.

Calculs d'intégrales

Soit un domaine D (courbe, surface, volume, dans le plan ou dans l'espace).
On note μ la mesure pertinente (longueur, aire, volume).

$$\int_D K \, d\mu = K.\mu(D)$$

On note $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ les coordonnées du centre de gravité de D pour une répartition homogène de masse.

$$\int_D K.x \, d\mu = K.\bar{x}.\mu(D)$$

$$\int_D K.y \, d\mu = K.\bar{y}.\mu(D)$$

$$\int_D K.z \, d\mu = K.\bar{z}.\mu(D)$$

Théorème de Green et calculs d'aires

Soit un domaine D du plan, délimité par une courbe $\mathcal{C}$ que l'on oriente positivement.
Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel tel que $\operatorname{rot} \vec{F} = 1$, alors :

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D 1 \, dA = \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} . \overrightarrow{dr}$$

Par exemple, $\vec{F} = x\vec{j}$ ou $\vec{F} = -y\vec{i}$, d'où :

$$\mathcal{A}(D) = \int_{\mathcal{C}} x \, dy = -\int_{\mathcal{C}} y \, dx$$

Calcul explicite, pour un paramétrage $\vec{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$:

$$\mathcal{A}(D) = \int_a^b x(t) y'(t) \, dt = -\int_a^b y(t) x'(t) \, dt$$

Interprétations du rotationnel et de la divergence

Le rotationnel d'un champ de forces mesure sa propension à faire tourner sur lui-même un objet qui y est soumis (exemple : "effet" d'une balle de ping-pong).

La divergence d'un champ de forces mesure sa propension à faire s'éloigner les uns des autres plusieurs objets qui y sont soumis (exemple : dilatation ou compression d'un gaz).

Théorème de Gauss

Version spatiale du théorème de Green, vu sous l'angle de la divergence.

Théorème de Gauss. Soit X un domaine de l'espace, délimité par une suface $\mathcal{S}$. Le flux à travers $\mathcal{S}$ est calculé *vers l'extérieur de X*. Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel. Alors :

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \, . \overrightarrow{n} \, dA = \iiint_X \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

Objectifs de la semaine 14

Théorème de Stokes :

- Orientation du bord d'une surface.
- Enoncé et applications du théorème.

Retour sur un piège.

- Domaine de définition et utilisation de Green, Gauss, Stokes.
- Caractérisation des champs conservatifs.

Orientation du bord d'une surface

Soit $\mathcal{S}$ une surface dans l'espace, dont le bord est une courbe $\mathcal{C}$. On suppose qu'une orientation de la surface $\mathcal{S}$ a été choisie : on a donc un vecteur normal unitaire $\vec{n}$ en tout point.

Pour observer la surface $\mathcal{S}$, plaçons nous du côté indiqué par le vecteur $\vec{n}$. On oriente alors la courbe $\mathcal{C}$ de manière à laisse la surface $\mathcal{S}$ à sa gauche.
Pour le dire autrement, un personnage marchant le long de la courbe $\mathcal{C}$, avec la tête du côté de la flèche de $\vec{n}$ et les pieds du côté de l'origine de $\vec{n}$, doit voir la surface $\mathcal{S}$ à sa gauche.

On dit alors que la courbe $\mathcal{C}$ est orientée positivement par rapport à la surface $\mathcal{S}$.

Théorème de Stokes

Version spatiale du théorème de Green, vu sous l'angle du rotationnel.

Théorème de Stokes. Soit $\mathcal{S}$ une surface à bord dans l'espace, dont le bord est une courbe $\mathcal{C}$. On choisit une orientation de $\mathcal{S}$, et on orient $\mathcal{C}$ positivement par rapport à l'orientation de $\mathcal{S}$. Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel. Alors :

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F}.\vec{n}\,dA$$

Utilisation des théorèmes de calcul différentiel

ATTENTION !

Pour appliquer le théorème de Green, Gauss ou Stokes à un champ vectoriel $\vec{F}$, il est essentiel de vérifier que $\vec{F}$ est défini sur un domaine D qui contient les deux ensembles sur lesquels on veut intégrer $\vec{F}$ et $\mathrm{div}\vec{F}/\mathrm{rot}\vec{F}/\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F}$.

Application

Définition. Soit D un domaine du plan ou de l'espace. On dit que D est simplement connexe si toute courbe $\mathcal{C}$ contenue dans D est le bord d'une suface $\mathcal{S}$ contenue dans D.

Théorème. Soit $\vec{F}$ un champ de vecteur, dans le plan ou dans l'espace. On suppose que le domaine de définition D de $\vec{F}$ est simplement connexe.
Alors le champ $\vec{F}$ est conservatif si, et seulement si, son rotationnel est uniformément nul sur le domaine D.