Mathématiques pour l'ingénieur 2

MAT 1910

Erwan Biland

Université Laval

Hiver 2011

Objectifs de la semaine 6

Définir les notions :

- transformation inversible du plan ou de l'espace ;
- jacobien d'une transformation.

$\hookrightarrow$ Cas linéaire (changement de repère) ;
$\hookrightarrow$ Cas général.

Intégration en coordonnées curvilignes générales.

Changement de repère dans le plan

MAT 1910
Hiver 2011

Erwan Biland

Coordonnées : (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(u, v) dans le repère $(O', \vec{i}', \vec{j}')$

avec : $O' \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right. \quad \vec{i}' \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right. \quad \vec{j}' \left| \begin{matrix} c \\ d \end{matrix} \right.$

On trouve : $\begin{cases} x = x_0 + au + cv \\ y = y_0 + bu + dv \end{cases}$

On peut résoudre pour trouver (u, v) en fonction de (x, y).

Il faut aussi savoir retrouver le nouveau repère à partir des formules de changement de coordonnées.

Calcul de l'élément d'aire

On prend un "rectangle" dans le *nouveau repère* :

$$\begin{cases} u_0 \leqslant u \leqslant u_1 \\ v_0 \leqslant v \leqslant v_1 \end{cases}$$

On trouve un parallélogramme $ABCD$ dans l'ancien repère :

$$A \left| \begin{array}{l} x_0 + au_0 + cv_0 \\ y_0 + bu_0 + dv_0 \end{array} \right. \qquad B \left| \begin{array}{l} x_0 + au_1 + cv_0 \\ y_0 + bu_1 + dv_0 \end{array} \right.$$

$$C \left| \begin{array}{l} x_0 + au_1 + cv_1 \\ y_0 + bu_1 + dv_1 \end{array} \right. \qquad D \left| \begin{array}{l} x_0 + au_0 + cv_1 \\ y_0 + bu_0 + dv_1 \end{array} \right.$$

On calcule l'aire du parallélogramme :

$$\mathcal{A}(ABCD) = \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \right| = \left| \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \right| . \Delta u \, \Delta v$$

Intégration dans les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} x = x_0 + au + cv \\ y = y_0 + bu + dv \\ dx\,dy = |J_T|\,du\,dv \qquad \text{où } J_T = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$(x,y) \in D_{x,y} \quad \leftrightarrow \quad (u,v) \in D_{u,v}$$

Ici chaque point (x,y) de $D_{x,y}$ correspond évidemment à un unique point (u,v) de $D_{u,v}$.

$$\iint_{D_{x,y}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_{u,v}} f(x_0+au+cv, y_0+bu+dv)\,|J_T|\,du\,dv$$

Changement de repère dans l'espace

Coordonnées : (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
(u, v, w) dans le repère $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$

avec : $O' \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix} \right. \quad \vec{i}' \left| \begin{matrix} a \\ a' \\ a'' \end{matrix} \right. \quad \vec{j}' \left| \begin{matrix} b \\ b' \\ b'' \end{matrix} \right. \quad \vec{k}' \left| \begin{matrix} c \\ c' \\ c'' \end{matrix} \right.$

On trouve : $$\begin{cases} x = x_0 + au + bv + cw \\ y = y_0 + a'u + b'v + c'w \\ z = z_0 + a''u + b''v + c''w \end{cases}$$

On peut résoudre pour trouver (u, v, w) en fonction de (x, y, z).

Il faut aussi savoir retrouver le nouveau repère à partir des formules de changement de coordonnées.

Intégration dans les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} x = x_0 + au + bv + cw \\ y = y_0 + a'u + b'v + c'w \\ z = z_0 + a''u + b''v + c''w \\ \\ dx\,dy\,dz = |J_T|\,du\,dv\,dw \ , \quad J_T = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in D_{x,y,z} \quad \leftrightarrow \quad (u,v,w) \in D_{u,v,w}$$

Ici chaque point (x, y, z) de $D_{x,y,z}$ correspond évidemment à un unique point (u, v, w) de $D_{u,v,w}$.

$$\iiint_{D_{x,y,z}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_{u,v,w}} f(\ldots)\,|J_T|\,du\,dv\,dw$$

Coordonnées curvilignes dans le plan

On a une transformation du plan

$$T : (u, v) \mapsto \Big(T_x(u, v), T_y(u, v)\Big)$$

Jacobien de T :

$$J_T = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Théorème. $J_T(u, v) \neq 0$ signifie que la transformation T est *localement* "bijective" : il existe *localement* une transformation inverse $T^{-1} : (x, y) \mapsto (u, v)$.

Pour obtenir le jacobien de T, on peut passer pas le jacobien de T^{-1}, s'il est plus facile à calculer :

$$J_T = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right]^{-1} = [J_{T^{-1}}]^{-1}$$

Exemple. Passage de coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes.

Calcul de l'élément d'aire

Idée. On fait comme si T était *localement* une transformation linéaire :

$$\begin{cases} x(u_0+du, v_0+dv) \approx x_0 + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ y(u_0+du, v_0+dv) \approx y_0 + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{cases}$$

On prend un "rectangle" dans les *nouvelles coordonnées* :

$$\begin{cases} u_0 \leqslant u \leqslant u_0 + du \\ v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + dv \end{cases}$$

Dans les anciennes coordonnées, on trouve (à peu près) un parallélogramme $ABCD$ d'aire :

$$\mathcal{A}(ABCD) = \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \right| = |J_T(u_0, v_0)|\, du\, dv$$

Intégration dans les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} x = T_x(u,v) \\ y = T_y(u,v) \\ dx\,dy = |J_T|\,du\,dv \qquad \text{où } J_T = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{cases}$$

$$(x,y) \in D_{x,y} \quad \leftrightarrow \quad (u,v) \in D_{u,v}$$

Attention. Sauf éventuellement sur une zone *d'aire nulle*,

- chaque point (x,y) de $D_{x,y}$ doit correspondre à un unique point (u,v) de $D_{u,v}$;
- J_T ne doit pas s'annuler.

$$\iint_{D_{x,y}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_{u,v}} f\big(T_x(u,v), T_y(u,v)\big)\,|J_T|\,du\,dv$$

Coordonnées curvilignes dans l'espace

On a une transformation de l'espace

$$T : (u, v, w) \mapsto \Big(T_x(u, v, w), T_y(u, v, w), T_z(u, v, w) \Big)$$

Jacobien de T :

$$J_T = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Théorème. $J_T(u, v, w) \neq 0$ signifie que la transformation T est *localement* "bijective" : il existe *localement* une transformation inverse $T^{-1} : (x, y, z) \mapsto (u, v, w)$.

Pour obtenir le jacobien de T, on peut passer pas le jacobien de T^{-1}, s'il est plus facile à calculer :

$$J_T = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \left[\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right]^{-1} = [J_{T^{-1}}]^{-1}$$

Exemple. Coordonnées cylindriques ou sphériques.

Intégration dans les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} x = T_x(u, v, w) \\ y = T_y(u, v, w) \\ z = T_z(u, v, w) \\ dx\,dy\,dz = |J_T|\,du\,dv\,dw \qquad \text{où } J_T = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \end{cases}$$

$$(x, y, z) \in D_{x,y,z} \quad \leftrightarrow \quad (u, v, w) \in D_{u,v,w}$$

Attention. Sauf éventuellement sur une zone *de volume nul*,

- chaque point (x, y, z) de $D_{x,y,z}$ doit correspondre à un unique point (u, v, w) de $D_{u,v,w}$;
- J_T ne doit pas s'annuler.

$$\iiint_{D_{x,y,z}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_{u,v,w}} f(\dots)\,|J_T|\,du\,dv\,dw$$

Objectifs de la semaine 7

Définir les notions :

- courbe paramétrée dans le plan ou l'espace ;
- changement de paramétrage ;
- abscisse curviligne.

Savoir représenter des courbes simples dans le plan ou l'espace.

Apprendre à intégrer une fonction le long d'une courbe :

- avec l'abscisse curviligne ;
- avec un paramétrage quelconque.

Courbe paramétrée

Notons $M(t)$ la position d'un mobile M à l'instant t.
$\hookrightarrow$ vecteur position $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM(t)} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$.

On peut étudier :

- la trajectoire $\Gamma = \left\{ M(t)\ ;\ a \leqslant t \leqslant b \right\}$
- le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \overrightarrow{r'(t)}$
  $= x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}$
- la vitesse (scalaire) $v(t) = \left\| \vec{v}(t) \right\|$
  $= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$
- le vecteur accélération $\vec{a}(t) = \overrightarrow{v'(t)} = \dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} = \overrightarrow{r''(t)}$
  $= x''(t)\,\vec{i} + y''(t)\,\vec{j} + z''(t)\,\vec{k}$

Dérivation de fonctions à valeurs vectorielles

$$\frac{d}{dt}\left[r_1 + r_2\right] = \frac{\overrightarrow{dr_1}}{dt} + \frac{\overrightarrow{dr_2}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\lambda \vec{r}\right] = \frac{d\lambda}{dt}\,\vec{r} + \lambda\,\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2\right] = \frac{\overrightarrow{dr_1}}{dt} \cdot \vec{r}_2 + r_1 \cdot \frac{\overrightarrow{dr_2}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\right] = \frac{\overrightarrow{dr_1}}{dt} \times \vec{r}_2 + r_1 \times \frac{\overrightarrow{dr_2}}{dt}$$

$$\frac{d}{du}\left[\vec{r}(\phi(u))\right] = \frac{dt}{du}\,\frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \phi'(u)\,\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}(\phi(u))$$

Représentation d'une courbe

Pour représenter la *trajectoire* Γ du mobile :

- Etudier les variations de $x(t)$, $y(t)$, ...
- Placer quelques points.
- Le vecteur vitesse $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ dirige la tangente à la courbe $\hookrightarrow$ tracer quelques tangentes.
- Rechercher les symétries éventuelles.

Changement de paramétrage

On n'utilise pas nécessairement le temps t comme paramètre.

Définition. Supposons que t varie dans $[a, b]$.
Un "bon" changement de paramétrage (ou de coordonnée curviligne) est une fonction $\phi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ telle que :

- $\phi(a) = \alpha$; $\phi(b) = \beta$;
- ϕ est dérivable ;
- pour $a \leqslant t \leqslant b$, on a $\phi'(t) > 0$.

Remarques. On acceptera parfois des changements de paramétrages moins "bons" : ϕ décroissante, ou ϕ s'annule en quelques points.
On pourra aussi utiliser un changement de paramétrage "local", ne décrivant qu'une partie de la courbe.

Exemples. Paramétrage par x, y ou z, par un angle θ...

Abscisse curviligne

On choisit sur la trajectoire Γ une origine Ω, correspondant à un temps $t = t_0$: ainsi $\Omega = M(t_0)$.
On choisit d'orienter Γ dans le sens du vecteur vitesse.

Définition. Soit $A = M(t_A)$ un point de Γ. On appelle abscisse curviligne du point A la distance parcourue sur la courbe Γ pour aller de Ω à A (négative si A est "avant" Ω) :

$$s_A = \widehat{\Omega A} = \int_{t_0}^{t_A} v(t)\, dt$$

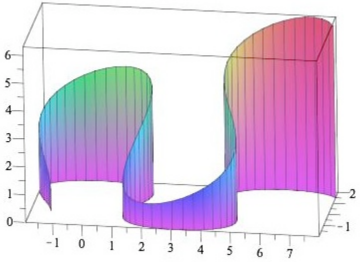
A retenir. L'abscisse curviligne s donne un nouveau paramétrage de la courbe Γ, tel que :

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

Si la vitesse ne s'annule pas (le mobile ne "s'arrête" pas), alors l'abscisse curviligne est un "bon" changement de paramètre.

Intégration d'une fonction le long d'une courbe

On veut intégrer le long de la courbe plane Γ la fonction $f(x,y)$, c'est à dire calculer l'aire :

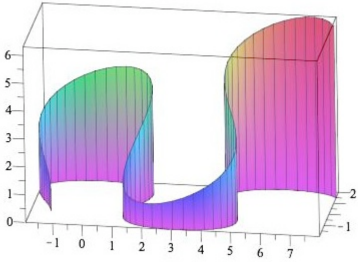


$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y) \end{cases}$$

avec $a \leqslant t \leqslant b$

Intégration d'une fonction le long d'une courbe

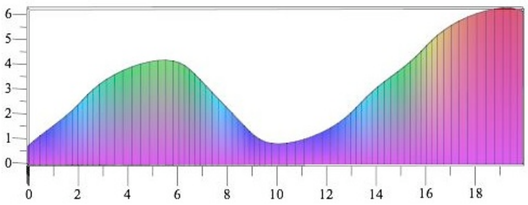
On veut intégrer le long de la courbe plane Γ la fonction $f(x,y)$, c'est à dire calculer l'aire :



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y) \end{cases}$$

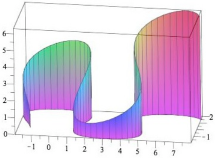
avec $a \leqslant t \leqslant b$

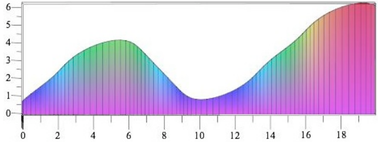
On "redresse" la courbe :



$$\begin{cases} s(a) \leqslant s \leqslant s(b) \\ 0 \leqslant z \leqslant f(x_s, y_s) \end{cases}$$

Intégration d'une fonction le long d'une courbe

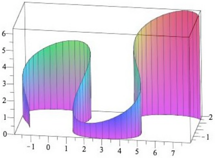


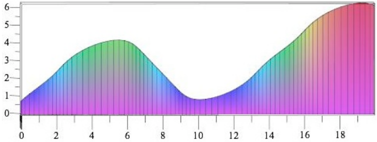


Définition. On appelle intégrale de la fonction $f(x, y)$ le long de la courbe Γ le nombre :

$$\int_\Gamma f = \int_{s(a)}^{s(b)} f(x_s, y_s)\, ds$$

Intégration d'une fonction le long d'une courbe





Définition. On appelle intégrale de la fonction $f(x, y)$ le long de la courbe Γ le nombre :

$$\int_\Gamma f = \int_{s(a)}^{s(b)} f(x_s, y_s)\, ds$$

Calcul pratique. En utilisant le paramètre t :

$$\begin{cases} s = s(t) \\ ds = v(t)\, dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \end{cases}$$

$$\int_\Gamma f(x, y)\, ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Intégration d'une fonction le long d'une courbe

On procède de même pour une courbe dans l'espace.

Définition. On appelle intégrale de la fonction $f(x, y, z)$ le long de la courbe paramétrée Γ le nombre :

$$\int_\Gamma f = \int_{s(a)}^{s(b)} f(x_s, y_s, z_s)\, ds$$

Intégration d'une fonction le long d'une courbe

On procède de même pour une courbe dans l'espace.

Définition. On appelle intégrale de la fonction $f(x, y, z)$ le long de la courbe paramétrée Γ le nombre :

$$\int_\Gamma f = \int_{s(a)}^{s(b)} f(x_s, y_s, z_s)\, ds$$

Calcul pratique. En utilisant le paramètre t :

$$\begin{cases} s = s(t) \\ ds = v(t)\, dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt \end{cases}$$

$$\int_\Gamma f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Intégration d'une fonction le long d'une courbe

On procède de même pour une courbe dans l'espace.

Définition. On appelle intégrale de la fonction $f(x, y, z)$ le long de la courbe paramétrée Γ le nombre :

$$\int_\Gamma f = \int_{s(a)}^{s(b)} f(x_s, y_s, z_s)\, ds$$

Calcul pratique. En utilisant le paramètre t :

$$\begin{cases} s = s(t) \\ ds = v(t)\, dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt \end{cases}$$

$$\int_\Gamma f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Remarque. La formule reste valable pour un autre "bon" paramètre u à la place de t.

Applications

Longueur d'un arc : $\ell(\Gamma) = \int_\Gamma ds$

Applications

Longueur d'un arc : $\ell(\Gamma) = \displaystyle\int_\Gamma ds$

Pour une masse linéaire $\lambda(\vec{r})$:

- masse totale : $M = \displaystyle\int_\Gamma \lambda(\vec{r})\, ds$

Applications

Longueur d'un arc : $\ell(\Gamma) = \int_\Gamma ds$

Pour une masse linéaire $\lambda(\vec{r})$:

- masse totale : $M = \int_\Gamma \lambda(\vec{r})\, ds$
- centre de gravité : $x_G = \dfrac{1}{M} \int_\Gamma x(\vec{r})\, \lambda(\vec{r})\, ds$

Applications

Longueur d'un arc : $\ell(\Gamma) = \int_\Gamma ds$

Pour une masse linéaire $\lambda(\vec{r})$:

- masse totale : $M = \int_\Gamma \lambda(\vec{r})\, ds$
- centre de gravité : $x_G = \dfrac{1}{M} \int_\Gamma x(\vec{r})\, \lambda(\vec{r})\, ds$
- moment d'inertie, par rapport à l'axe (Oz) :

$$J_{(Oz)} = \int_\Gamma \left[x(\vec{r})^2 + y(\vec{r})^2 \right] \lambda(\vec{r})\, ds$$

Applications

Longueur d'un arc : $\ell(\Gamma) = \int_\Gamma ds$

Pour une masse linéaire $\lambda(\vec{r})$:

- masse totale : $M = \int_\Gamma \lambda(\vec{r})\, ds$
- centre de gravité : $x_G = \dfrac{1}{M} \int_\Gamma x(\vec{r})\, \lambda(\vec{r})\, ds$
- moment d'inertie, par rapport à l'axe (Oz) :

$$J_{(Oz)} = \int_\Gamma \left[x(\vec{r})^2 + y(\vec{r})^2 \right] \lambda(\vec{r})\, ds$$

Exercice. Ecrire les formules pour y_G, z_G, et pour les autres moments d'inertie.

Objectifs de la semaine 8

Définir la notion de champ de vecteurs, dans le plan ou dans l'espace.

Opérateurs différentiels sur les champs scalaires ou vectoriels :

- gradient
- divergence
- rotationnel

Circulation d'un champ vectoriel le long d'une courbe.

Notion de champ de vecteurs conservatif.

Exercices

Questions sur les exercices de la série 6 ?

Champs de vecteur

Définition. Soit D un domaine du plan ou de l'espace. Un champ de vecteur sur D est une fonction $\vec{F}$ qui, à un point M de D associe un vecteur $\vec{F}(M)$. On note

$$\vec{F}(M) = F_x(M)\,\vec{i} + F_y(M)\,\vec{j} + F_z(M)\,\vec{k}$$

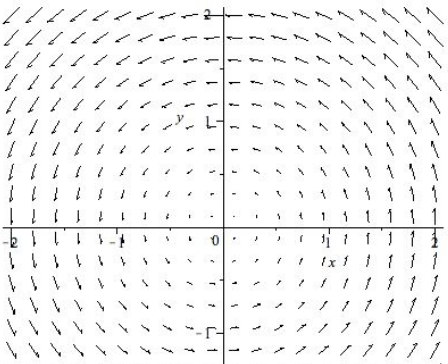
Champs de vecteur

Définition. Soit D un domaine du plan ou de l'espace. Un champ de vecteur sur D est une fonction $\vec{F}$ qui, à un point M de D associe un vecteur $\vec{F}(M)$. On note

$$\vec{F}(M) = F_x(M)\,\vec{i} + F_y(M)\,\vec{j} + F_z(M)\,\vec{k}$$

Exemple. Dans le plan, soit $\vec{F}$ le champ de vecteur tel que :

$$\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$



Opérateurs différentiels dans le plan

Vecteur symbolique "nabla" : $\overrightarrow{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j}.$

Opérateurs différentiels dans le plan

Vecteur symbolique "nabla" : $\vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j}$.

Gradient. Pour une fonction $f(x, y)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

Opérateurs différentiels dans le plan

Vecteur symbolique "nabla" : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$.

Gradient. Pour une fonction $f(x, y)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

Divergence. Pour un champ de vecteurs $\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j}$:

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$$

Opérateurs différentiels dans le plan

Vecteur symbolique "nabla" : $\vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j}$.

Gradient. Pour une fonction $f(x, y)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

Divergence. Pour un champ de vecteurs $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$:

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$$

Rotationnel. Pour un champ de vecteurs $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$:

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \det(\vec{\nabla}, \vec{F}) = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Opérateurs différentiels dans l'espace

Vecteur symbolique "nabla" : $\overrightarrow{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}.$

Opérateurs différentiels dans l'espace

Vecteur symbolique "nabla" : $\vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}$.

Gradient. Pour une fonction $f(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k}$$

Opérateurs différentiels dans l'espace

Vecteur symbolique "nabla" : $\vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}.$

Gradient. Pour une fonction $f(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k}$$

Divergence. Pour un champ $\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$:

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Opérateurs différentiels dans l'espace

Vecteur symbolique "nabla" : $\vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}.$

Gradient. Pour une fonction $f(x,y,z)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k}$$

Divergence. Pour un champ $\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$:

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Rotationnel. Pour un champ $\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\times f = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & F_x & \vec{i} \\ \frac{\partial}{\partial y} & F_y & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial z} & F_z & \vec{k} \end{vmatrix}$$

Composition des opérateurs différentiels

Dans le plan : $\mathrm{rot}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = 0$

Composition des opérateurs différentiels

Dans le plan : $\mathrm{rot}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = 0$

Dans l'espace :

- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{0}$
- $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = 0$

Composition des opérateurs différentiels

Dans le plan : $\operatorname{rot} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f = 0$

Dans l'espace :

- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \vec{0}$
- $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{F} = 0$

Laplacien. Dans les deux cas, pour une fonction f, on note :

$$\Delta f = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Puissance et travail d'une force

Travail. On appelle travail L d'une force $\vec{F}$ l'énergie qu'elle transmet à un mobile M lors de son déplacement entre des points A et B. Si la force est constante, on a :

$$L = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Puissance et travail d'une force

Travail. On appelle travail L d'une force $\vec{F}$ l'énergie qu'elle transmet à un mobile M lors de son déplacement entre des points A et B. Si la force est constante, on a :

$$L = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Puissance. On appelle puissance P l'énergie transmise par unité de temps. Ainsi :

$$P(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{L(t + \delta t) - L(t)}{\delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}(t)$$

Puissance et travail d'une force

Travail. On appelle travail L d'une force $\vec{F}$ l'énergie qu'elle transmet à un mobile M lors de son déplacement entre des points A et B. Si la force est constante, on a :

$$L = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Puissance. On appelle puissance P l'énergie transmise par unité de temps. Ainsi :

$$P(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{L(t+\delta t) - L(t)}{\delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}(t)$$

Intégration. Pour une force non constante, on retrouve le travail par :

$$L = \int_{t_0}^{t_1} P(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)\, dt$$

Circulation d'un champ de vecteurs

Travail. On suppose que le mobile M se déplace dans un champ de force indépendant du temps. Ainsi la force $\vec{F}$ ne dépend que du vecteur position $\vec{r}$.

$$L = \int_\Gamma \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{v}(t)\, dt = \int_\Gamma \overrightarrow{F} . \overrightarrow{dr}$$

Circulation d'un champ de vecteurs

Travail. On suppose que le mobile M se déplace dans un champ de force indépendant du temps. Ainsi la force $\vec{F}$ ne dépend que du vecteur position $\vec{r}$.

$$L = \int_\Gamma \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{v}(t)\, dt = \int_\Gamma \overrightarrow{F}\, .\overrightarrow{dr}$$

On remarque que le travail ne dépend alors que du chemin parcouru, et non de la vitesse à laquelle il est parcouru (invariance par changement de paramétrage).

Circulation d'un champ de vecteurs

Travail. On suppose que le mobile M se déplace dans un champ de force indépendant du temps. Ainsi la force $\vec{F}$ ne dépend que du vecteur position $\vec{r}$.

$$L = \int_\Gamma \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{v}(t)\, dt = \int_\Gamma \overrightarrow{F}\,.\overrightarrow{dr}$$

On remarque que le travail ne dépend alors que du chemin parcouru, et non de la vitesse à laquelle il est parcouru (invariance par changement de paramétrage).

Circulation. Pour $\vec{F}(\vec{r})$ un champ de vecteurs quelconque, et Γ une courbe orientée, on appelle circulation de $\vec{F}$ le long de Γ l'intégrale :

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}\,.\overrightarrow{dr} = \int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{v}(t)\, dt$$

Circulation d'un champ de vecteurs

Travail. On suppose que le mobile M se déplace dans un champ de force indépendant du temps. Ainsi la force $\vec{F}$ ne dépend que du vecteur position $\vec{r}$.

$$L = \int_\Gamma \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{v}(t)\,dt = \int_\Gamma \overrightarrow{F}\,.\overrightarrow{dr}$$

On remarque que le travail ne dépend alors que du chemin parcouru, et non de la vitesse à laquelle il est parcouru (invariance par changement de paramétrage).

Circulation. Pour $\vec{F}(\vec{r})$ un champ de vecteurs quelconque, et Γ une courbe orientée, on appelle circulation de $\vec{F}$ le long de Γ l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \overrightarrow{F}\,.\overrightarrow{dr} &= \int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{v}(t)\,dt \\ &= \int_a^b \Big[F_x(..)\,x'(t) + F_y(..)\,y'(t) + F_z(..)\,z'(t)\Big]\,dt\end{aligned}$$

UNIVERSITÉ LAVAL

Circulation d'un gradient

MAT 1910
Hiver 2011

Erwan Biland

Champ conservatif. Si $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, on dit que $\vec{F}$ dérive du potentiel f, ou que $\vec{F}$ est un champ conservatif.

Circulation d'un gradient

Champ conservatif. Si $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, on dit que $\vec{F}$ dérive du potentiel f, ou que $\vec{F}$ est un champ conservatif.

Circulation. $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, alors :

$$\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr} = f(B) - f(A)$$

Circulation d'un gradient

Champ conservatif. Si $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, on dit que $\vec{F}$ dérive du potentiel f, ou que $\vec{F}$ est un champ conservatif.

Circulation. $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, alors :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr} = f(B) - f(A)$$

En particulier,

- La circulation de $\vec{F}$ le long de $\overset{\frown}{AB}$ ne dépend que des points de départ et d'arrivée, et non du chemin suivi : *indépendance du chemin* ;

Circulation d'un gradient

Champ conservatif. Si $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, on dit que $\vec{F}$ dérive du potentiel f, ou que $\vec{F}$ est un champ conservatif.

Circulation. $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, alors :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr} = f(B) - f(A)$$

En particulier,

- La circulation de $\vec{F}$ le long de $\overset{\frown}{AB}$ ne dépend que des points de départ et d'arrivée, et non du chemin suivi : *indépendance du chemin* ;
- La circulation de $\vec{F}$ le long d'un lacet (retour au point de départ) est nulle.

Caractérisation des champs conservatifs

Théorème. Si la circulation de $\vec{F}$ le long de toute courbe $\overset{\frown}{AB}$ est indépendante du chemin suivi (ne dépendant donc que des points de départ et d'arrivée), alors le champ $\vec{F}$ est conservatif.

Caractérisation des champs conservatifs

Théorème. Si la circulation de $\vec{F}$ le long de toute courbe $\overset{\frown}{AB}$ est indépendante du chemin suivi (ne dépendant donc que des points de départ et d'arrivée), alors le champ $\vec{F}$ est conservatif.

Remarque. Si $\vec{F}$ est un champ conservatif, dérivant du potentiel f, alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \vec{0}$$

On verra bientôt que la réciproque est "presque" vraie...

Exercices

Voir les exercices de la série 7.

Objectifs de la semaine 10

Revenir sur les champs conservatifs :

- savoir les reconnaître ;
- savoir calculer un potentiel.

Réviser l'examen 2.

Caractérisation des champs conservatifs

Théorème. Si $\vec{F}$ est un champ conservatif, alors $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$, et si $\vec{F}$ est défini sur un domaine *simplement connexe*, alors $\vec{F}$ est un champ conservatif.

Théorème. Idem dans le plan avec $\mathrm{rot}\,\vec{F}$.

Caractérisation des champs conservatifs

Théorème. Si $\vec{F}$ est un champ conservatif, alors $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$, et si $\vec{F}$ est défini sur un domaine *simplement connexe*, alors $\vec{F}$ est un champ conservatif.

Théorème. Idem dans le plan avec $\mathrm{rot}\,\vec{F}$.

Exemples. Domaines simplement connexes... ou non.

- $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ tout entier : OUI.
- L'intérieur d'un disque ou d'une boule : OUI.
- Tout domaine convexe : OUI.
- Le plan privé d'un point : NON.
- L'espace privé d'une droite : NON.