Mathématiques pour l'ingénieur 2

MAT 1910

Erwan Biland

Université Laval

Hiver 2011

Présentation du cours

Enseignant : Erwan Biland

Disponibilité : mercredi 13h30-15h30, VCH-2211

Plan de cours disponible sur le site :
http://cours.mat.ulaval.ca/mat-1910

Journée passerelle en mathématiques :
samedi 15 et dimanche 16 janvier, VCH-2840

Objectifs de la semaine 1

Rappeler et relier deux notions de base :

- intégrale définie
- primitive (ou intégrale indéfinie)
  $\hookrightarrow$ théorème fondamental du calcul intégral

Revoir les méthodes de calcul des intégrales :

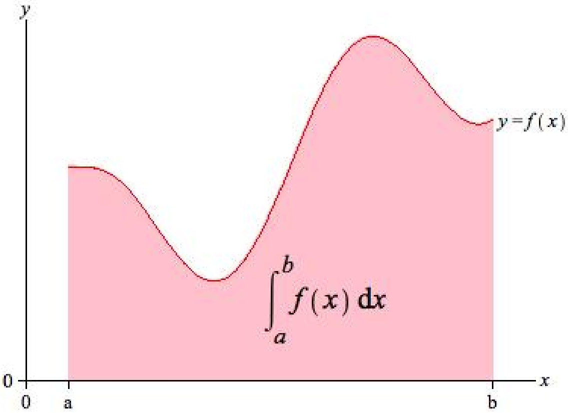
- primitives usuelles, formules de dérivation/intégration
- intégration par parties, substitution
- fractions partielles

Utilisation de Maple :

- graphiques avec *plot()*
- calculs d'intégrales avec *int()*

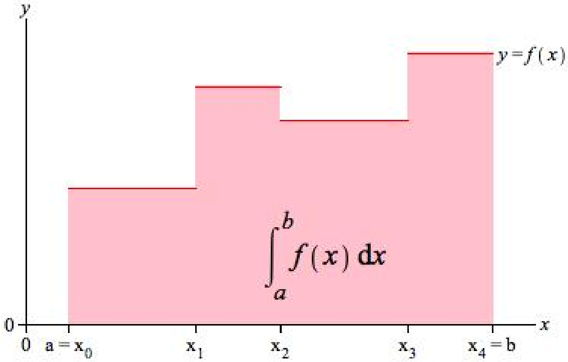
Intégrale définie

Idée : mesurer l'aire du domaine délimité par une fonction



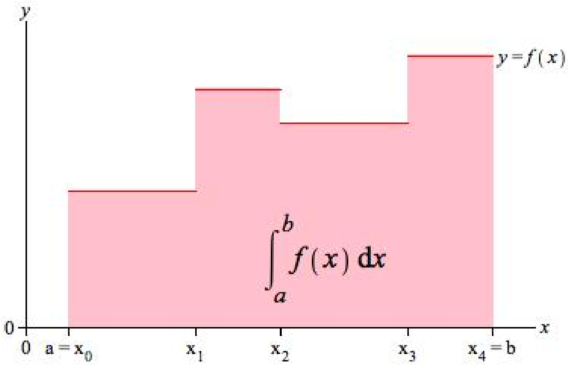
Intégrale définie : fonction en escaliers

Facile à faire pour une fonction "en escalier".



Intégrale définie : fonction en escaliers

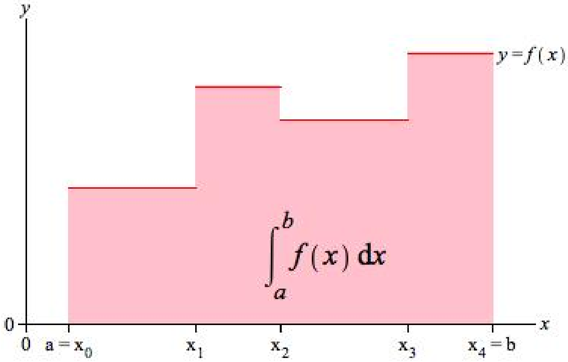
Facile à faire pour une fonction "en escalier".



$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0).(x_1 - x_0) + f(x_1).(x_2 - x_1)$$
$$+ f(x_2).(x_3 - x_2) + f(x_3).(x_4 - x_3)$$

Intégrale définie : fonction en escaliers

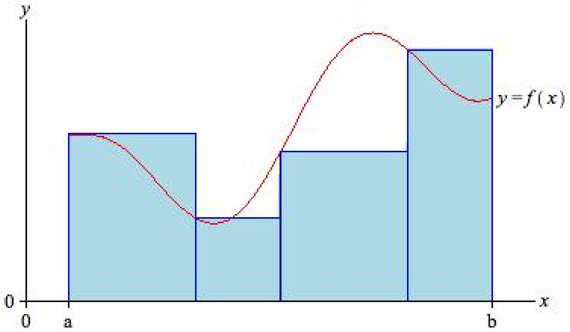
Facile à faire pour une fonction "en escalier".



$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{3} f(x_i).\Delta x_i \qquad \text{où } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

Intégrale définie : fonction continue

Pour une fonction continue, on obtient une approximation appelée somme de Riemann.
(avec ici la "méthode des rectangles à gauche")



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{3} f(x_i).\Delta x_i$$

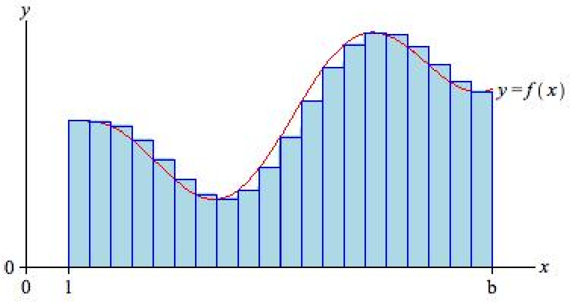
Intégrale définie : fonction continue

L'approximation est meilleure si on diminue le pas maximal $\Delta x_{\max}$ de la subdivision.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).\Delta x_i$$

Intégrale définie : fonction continue

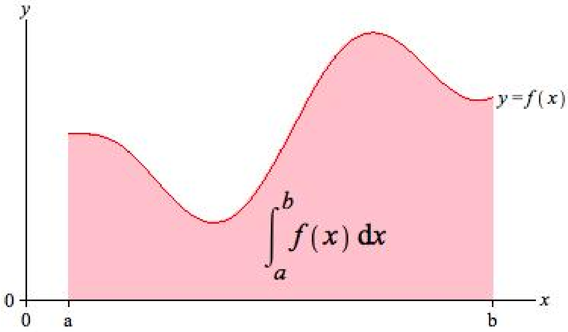
L'approximation est meilleure si on diminue le pas maximal Δx_{max} de la subdivision.



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).\Delta x_i$$

Intégrale définie : fonction continue

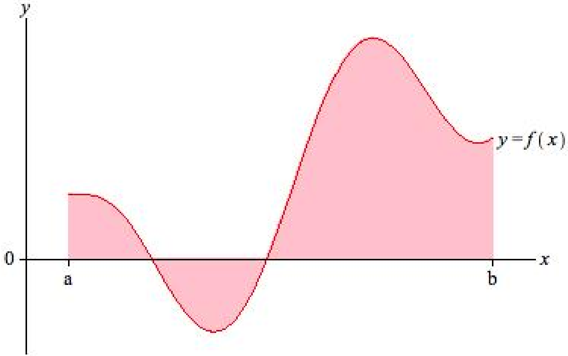
A la limite, on obtient la quantité voulue.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_{\max}\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i$$

Intégrale définie

Remarque : si la fonction f n'est pas positive, on obtient une aire *algébrique*, qui peut être négative.



Propriétés de l'intégrale définie

Linéarité :

$$\int_a^b \left[\lambda f(x) + \mu g(x)\right] dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

Croissance, dont on déduit l'inégalité de la moyenne :

$$m \leqslant f \leqslant M \quad \Rightarrow \quad m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M(b-a)$$

Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

Primitives

Une primitive de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $F' = f$.

Si f admet une primitive F, alors elle en admet une infinité : les fonctions de la forme $F + cste$.

Primitives

Une primitive de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $F' = f$.

Si f admet une primitive F, alors elle en admet une infinité : les fonctions de la forme $F + cste$.

Théorème fondamental du calcul :
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors elle admet pour primitive la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Primitives

Erwan Biland

Une primitive de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $F' = f$.

Si f admet une primitive F, alors elle en admet une infinité : les fonctions de la forme $F + cste$.

Théorème fondamental du calcul :
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors elle admet pour primitive la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Conséquence :
Si F est une primitive quelconque de f, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

Primitives usuelles

$$e^x \quad \rightsquigarrow \quad e^x$$

$$x^n \quad \rightsquigarrow \quad \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\frac{1}{x} \quad \rightsquigarrow \quad \ln|x|$$

$$\cos x \quad \rightsquigarrow \quad \sin x$$

$$\sin x \quad \rightsquigarrow \quad -\cos x$$

$$\frac{1}{x^2+1} \quad \rightsquigarrow \quad \arctan x$$

...

Formules de dérivation

$$u' f(u) \quad \rightsquigarrow \quad F(u)$$

$$u' e^u \quad \rightsquigarrow \quad e^u$$

$$u' u^n \quad \rightsquigarrow \quad \frac{u^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\frac{u'}{u} \quad \rightsquigarrow \quad \ln|u|$$

...

Intégration par parties

De la formule de dérivation

$$[uv]' = u'v + uv'$$

c'est-à-dire

$$u'v = [uv]' - uv'$$

on déduit

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

En pratique, écrire bien clairement :

$$\begin{cases} u(x) = \dots & u'(x) = \dots \\ v(x) = \dots & v'(x) = \dots \end{cases}$$

Substitution

De la formule de dérivation (déjà utilisée)

$$[F(u)]' = u' f(u) \qquad \text{où } f = F'$$

on déduit

$$\int_a^b f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\, dy$$

$$\ldots = F(u(b)) - F(u(a))$$

En pratique, écrire bien clairement :

"On fait le changement de variable $\begin{cases} y = u(x) \\ dy = u'(x)dx \end{cases}$.

Pour $x = a$, $y = u(a)$; pour $x = b$, $y = u(b)$."

Intégration d'une fraction rationnelle

On sort la partie polynomiale et on décompose le reste en fractions partielles.

En pratique, annoncer clairement la forme attendue pour la décomposition en fractions partielles.

On intègre ensuite séparément chacune des fractions partielles obtenues.

Maple

$$f := x \to x^3 - 5\,x + \ln(x)$$
$$plot(f, 0\,..3)$$
$$plot\left(1 - 2\,x^2, x = 0\,..3\right)$$
$$int(f, 1\,..3)$$
$$int(f(x), x = 1\,..3)$$
$$int(f(x), x)$$
$$int\left(e^{x^2}, x\right)$$
$$int\left(x^x, x\right)$$
$$int\left(x^2, x = 1\,..2\right)$$
$$evalf\left(int\left(x^x, x = 1\,..2\right)\right)$$
$$int\left(x^x, x = 1\,..2\right)$$
$$evalf\left(int\left(x^x, x = 1\,..2\right)\right)$$

Exercices

Une fiche d'exercices relatifs aux intégrales simples est disponible sur le site du cours :

`https://cours.mat.ulaval.ca/11081`

Si nous en avons le temps, nous corrigerons la semaine prochaine, en classe, les exercices **1-a)**, **2-j)** et **3-c)**.

Objectifs de la semaine 2

Applications de l'intégrale simple

Rappeler ce qu'est une fonction de deux variables.

Définir l'intégrale double et apprendre à calculer

- sur un rectangle ;
- sur un domaine plus général.

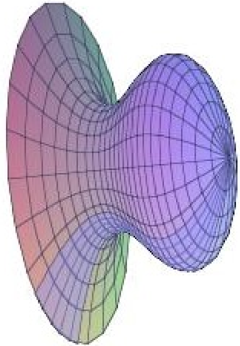
  $\hookrightarrow$ Théorème de Fubini

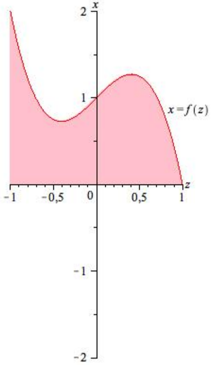
Utilisation de Maple :

- graphiques en 3D avec *plot3d()*
- tracés de domaines d'intégration avec *implicitplot()*
- calculs d'intégrales doubles avec *int()*

Calcul de volume

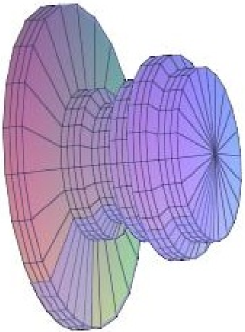
On veut calculer le volume enfermé par une surface de révolution.

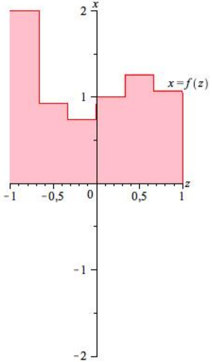




Calcul de volume

Facile à faire pour un profil "en escaliers".



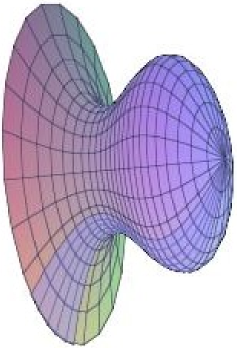


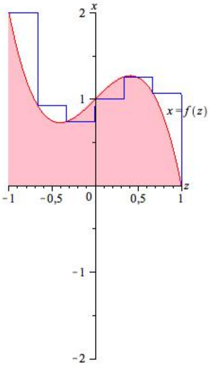
$$V = \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(z_i)^2 (z_{i+1} - z_i) = \sum_{i=1}^{n} A(z_i) \Delta z_i$$

On reconnaît une somme de Riemann.

Calcul de volume

Et pour un profil continu...



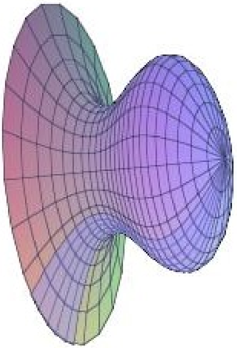


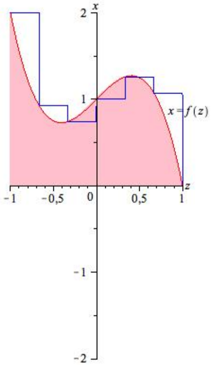
$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} A(z_i)\Delta z_i$$

On approxime par un profil en escaliers...

Calcul de volume

Et pour un profil continu...



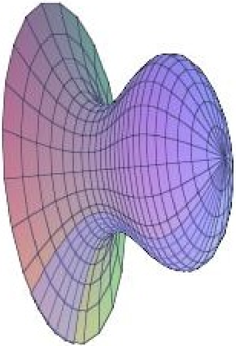


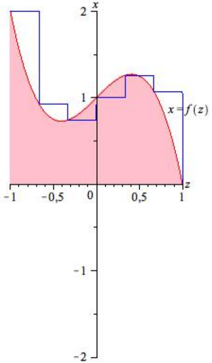
$$V = \lim_{\Delta z_{\max} \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} A(z_i)\Delta z_i$$

On passe à la limite...

Calcul de volume

Et pour un profil continu...





$$V = \lim_{\Delta z_{\max} \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} A(z_i) \Delta z_i = \int_{-1}^{1} A(z)\, dz$$

On obtient une intégrale simple.

Calcul de masse

Sur le même principe, on veut calculer la masse totale d'une tige de bronze de longueur ℓ (en m), dans laquelle les proportions de cuivre et d'étain ne sont pas constantes. On note $\mu(x)$ la masse linéaire (en kg/m) au point situé à distance x de l'origine.

Calcul de masse

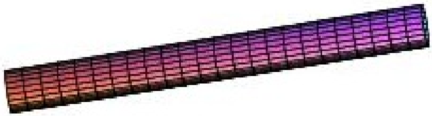
Sur le même principe, on veut calculer la masse totale d'une tige de bronze de longueur ℓ (en m), dans laquelle les proportions de cuivre et d'étain ne sont pas constantes. On note $\mu(x)$ la masse linéaire (en kg/m) au point situé à distance x de l'origine.

$$M = \lim_{\Delta x_{\max} \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(x_i) \Delta x_i = \int_0^\ell \mu(x)\, dx$$

Le résultat est donné par une intégrale simple.

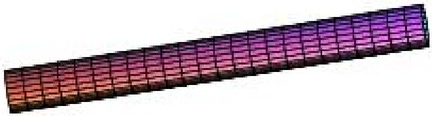
Calcul de centre de masse

On cherche la distance x_G entre l'origine et le centre de gravité de la tige de bronze.



Calcul de centre de masse

On cherche la distance x_G entre l'origine et le centre de gravité de la tige de bronze.



Pour cela, on s'inspire du calcul des coordonnées du centre de gravité ("barycentre") d'un ensemble de points. On calcule la moyenne des valeurs de "x", pondérée par la masse linéaire :

$$x_G = \frac{1}{M} \int_0^{\ell} x \cdot \mu(x)\, dx$$

Calcul de moment d'inertie

On cherche le moment d'inertie J_{x_0} de la tige par rapport à un axe Δ perpendiculaire à la tige et passant par le point à distance x_0 de l'origine.

Si la tige tourne à une vitesse angulaire α (en rad/s) autour de l'axe Δ, son énergie cinétique (en kg.m^2.s^{-2}) sera :

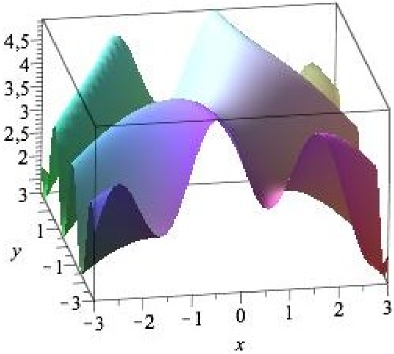
$$E_c = \frac{1}{2} J_{x_0} \alpha^2 = \int_0^{\ell} \frac{1}{2} [\alpha(x - x_0)]^2 \mu(x)\, dx$$

Ainsi le moment d'inertie (en kg.m^2) vaut :

$$J_{x_0} = \int_0^{\ell} (x - x_0)^2 \mu(x)\, dx$$

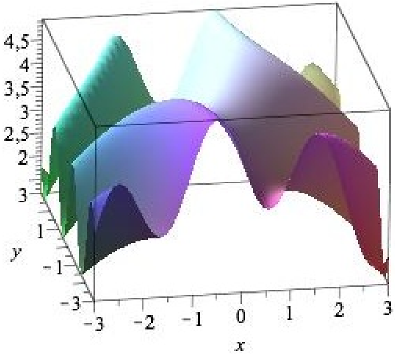
Rappels sur les fonctions de deux variables

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 4 - \frac{1}{5}x^2 + \sin(xy) \end{array}$$



Rappels sur les fonctions de deux variables

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 4 - \frac{1}{5}x^2 + \sin(xy) \end{array}$$

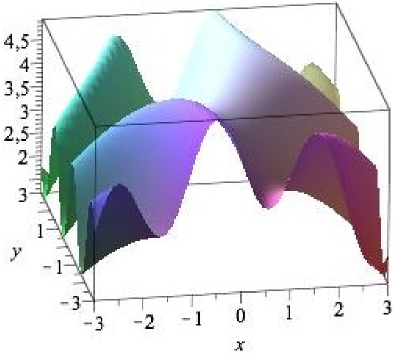


$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{2}{5}x + y\cos(xy) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\cos(xy).$$

On pourrait aussi primitiver ou intégrer par rapport à l'une des variable, x ou y...

Rappels sur les fonctions de deux variables

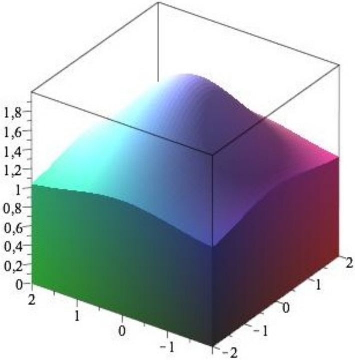
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 4 - \frac{1}{5}x^2 + \sin(xy) \end{array}$$



$$\int_0^1 f(x, y)\, dx = \left[4x - \frac{1}{15}x^3 - \frac{1}{y}\cos(xy)\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{59}{15} + \frac{1 - \cos y}{y}$$

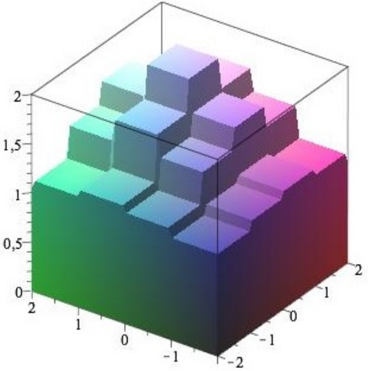
Intégrale double

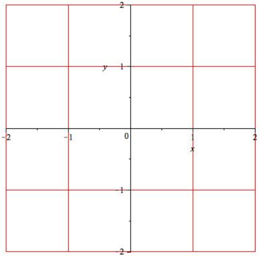
Idée : mesurer le volume de la zone délimitée par le graphe d'une fonction de deux variables, au dessus d'un domaine D du plan (ici D est rectangulaire).



Intégrale double : fonction en escalier

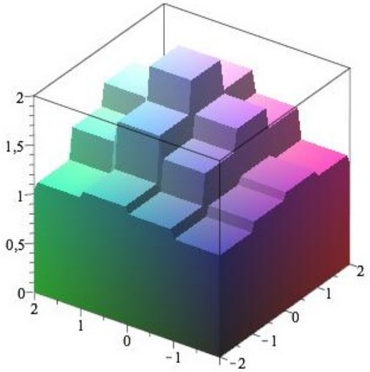
Là encore, facile à faire pour une fonction "en escalier".

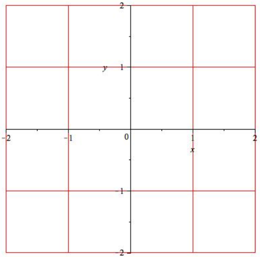




Intégrale double : fonction en escalier

Là encore, facile à faire pour une fonction "en escalier".

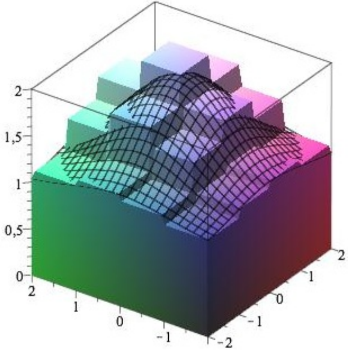




$$\iint_D f = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant j \leqslant p-1}} f(x_i, y_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$

Intégrale double : fonction continue

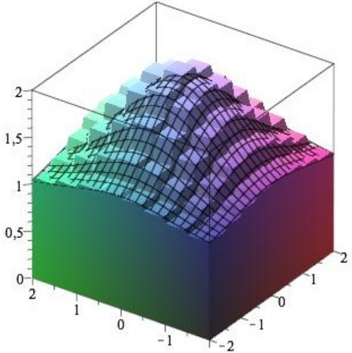
Pour une fonction continue, on procède encore par approximations successives : on calcule des sommes de Riemann pour des subdivisions de plus en plus fines du domaine D.



$$\iint_D f \approx \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant j \leqslant p-1}} f(x_i, y_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$

Intégrale double : fonction continue

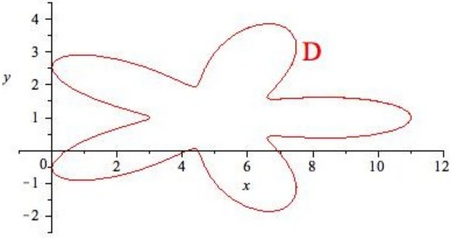
Pour une fonction continue, on procède encore par approximations successives : on calcule des sommes de Riemann pour des subdivisions de plus en plus fines du domaine D.



$$\iint_D f = \lim_{\substack{\Delta x_{\max} \to 0 \\ \Delta y_{\max} \to 0}} \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant j \leqslant p-1}} f(x_i, y_j)\, \Delta x_i \, \Delta y_j$$

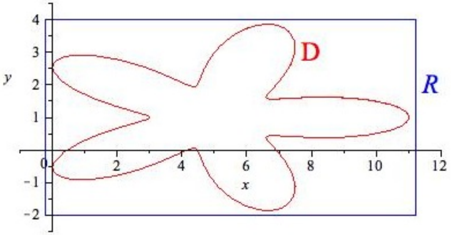
Intégrale double sur un domaine plus général

On veut intégrer une fonction f continue sur un domaine D qui n'est pas rectangulaire.



Intégrale double sur un domaine plus général

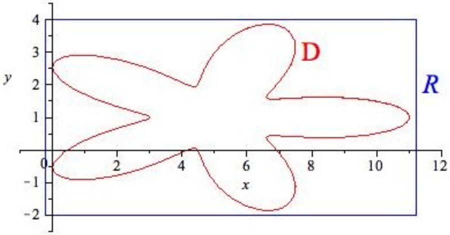
On veut intégrer une fonction f continue sur un domaine D qui n'est pas rectangulaire.



On choisit un rectangle R qui contient D.

Intégrale double sur un domaine plus général

On veut intégrer une fonction f continue sur un domaine D qui n'est pas rectangulaire.

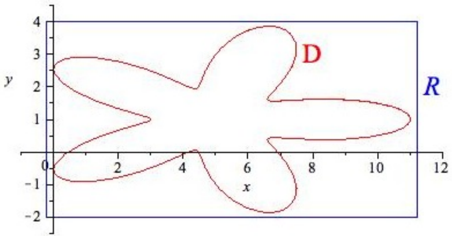


On choisit un rectangle R qui contient D.

On pose, pour $(x, y) \in R$:

$$\widetilde{f}(x,y) = \left| \begin{array}{ll} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Intégrale double sur un domaine plus général



$$\tilde{f} = \left| \begin{array}{ll} f & \text{sur } D \\ 0 & \text{ailleurs} \end{array} \right.$$

On définit alors l'intégrale de f sur D en posant :

$$\iint_D f = \iint_R \tilde{f}$$

Remarque : l'intégrale qui est à droite, définie par une limite de sommes de Riemann, n'a de sens que si cette limite existe. C'est le théorème de Fubini qui tranche ce point : l'intégrale existe si le domaine D est "sympathique"...

Domaine de type 1

Un domaine D du plan est de type 1 si on peut le décrire par un système d'inéquations de la forme :

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c(x) \leqslant y \leqslant d(x) \end{cases}.$$

Théorème de Fubini

Si f est une fonction continue sur un domaine D de type 1, décrit par les inéquations ci-dessus, alors l'intégrale de f sur D est bien définie et :

$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Ceci justifie d'écrire :

$$\iint_D f = \iint_D f(x,y)\,dy\,dx.$$

Domaine de type 2

Un domaine D du plan est de type 2 si on peut le décrire par un système d'inéquations de la forme :

$$\left\{\begin{array}{c} c \leqslant y \leqslant d \\ a(y) \leqslant x \leqslant b(y) \end{array}\right. .$$

Théorème de Fubini

Si f est une fonction continue sur un domaine D de type 2, décrit par les inéquations ci-dessus, alors l'intégrale de f sur D est bien définie et :

$$\iint_D f = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Ceci justifie d'écrire :

$$\iint_D f = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Domaine de type 2

Un domaine D du plan est de type 2 si on peut le décrire par un système d'inéquations de la forme :

$$\begin{cases} c \leqslant y \leqslant d \\ a(y) \leqslant x \leqslant b(y) \end{cases} .$$

Théorème de Fubini

Si f est une fonction continue sur un domaine D de type 2, décrit par les inéquations ci-dessus, alors l'intégrale de f sur D est bien définie et :

$$\iint_D f = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Ceci justifie d'écrire :

$$\iint_D f = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Domaine de type 2

Un domaine D du plan est de type 2 si on peut le décrire par un système d'inéquations de la forme :

$$\begin{cases} c \leqslant y \leqslant d \\ a(y) \leqslant x \leqslant b(y) \end{cases}.$$

Théorème de Fubini

Si f est une fonction continue sur un domaine D de type 2, décrit par les inéquations ci-dessus, alors l'intégrale de f sur D est bien définie et :

$$\iint_D f = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Ceci justifie d'écrire :

$$\iint_D f = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dy\,dx.$$

Propriétés de l'intégrale double

Linéarité :

$$\iint_D \left[\lambda f + \mu g\right] = \lambda \iint_D f + \mu \iint_D g$$

Croissance, dont on déduit l'inégalité de la moyenne :

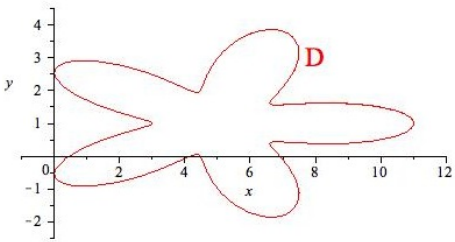
$$m \leqslant f \leqslant M \quad \Rightarrow \quad m\mathcal{A}(D) \leqslant \int_D f \leqslant M\mathcal{A}(D)$$

Additivité sur les domaines :

Si les intérieurs de D_1 et D_2 sont disjoints, alors

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f.$$

Calcul d'aire



$$\mathcal{A}(D) = \iint_D 1\, dx\, dy.$$

Masse, centre de gravité

Le domaine D représente une plaque pesante, d'épaisseur négligeable et de densité variable. La masse surfacique (en kg.m^{-2}) au point (x, y) est notée $\sigma(x, y)$.

Masse totale :

$$M = \iint_D \sigma(x, y)\, dx\, dy.$$

Coordonnées du centre de masse :

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_D x\sigma(x, y)\, dx\, dy.$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_D y\sigma(x, y)\, dx\, dy.$$

Moment d'inertie

On cherche le moment d'inertie J_Δ de la plaque pesante par rapport à un axe Δ, de sorte que l'énergie cinétique acquise, pour une rotation à la vitesse angulaire α autour de l'axe Δ, soit :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \alpha^2.$$

Formule générale :

$$J_\Delta = \iint_D \left[d\Big((x,y),\Delta\Big)\right]^2 \sigma(x,y)\,dx\,dy.$$

Moment d'inertie

Formules particulières :

$\hookrightarrow$ pour l'axe $\Delta = (Ox)$

$$J_{(Ox)} = \iint_D y^2\, \sigma(x,y)\, dx\, dy.$$

$\hookrightarrow$ pour l'axe $\Delta = (Oy)$

$$J_{(Oy)} = \iint_D x^2\, \sigma(x,y)\, dx\, dy.$$

$\hookrightarrow$ pour l'axe Δ passant perpendiculairement par l'origine

$$J_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\, \sigma(x,y)\, dx\, dy = J_{(Ox)} + J_{(Oy)}.$$

Exercices

Une fiche d'exercices relatifs aux intégrales doubles est disponible sur le site du cours :

`https://cours.mat.ulaval.ca/11081`

Si nous en avons le temps, nous corrigerons la semaine prochaine, en classe, les exercices **1-c)**, **2-a)** et **4**.

Pour l'exercice **1-c)**, vous devrez couper le domaine en trois morceaux pour calculer l'intégrale... Nous verrons en cours une technique plus efficace passant par un changement de variables !

Objectifs de la semaine 3

Réviser l'intégrale double, utiliser Maple

Calculer des intégrales doubles en coordonnées polaires

Définir l'intégrale triple et apprendre à calculer

- sur un pavé ;
- sur un domaine plus général.

  $\hookrightarrow$ Théorème de Fubini

Rappels sur les coordonnées polaires

On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour un point M, on note $r = OM$ et $\theta \equiv (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) \pmod{2\pi}$.

On dit que (r, θ) sont des coodonnées polaires pour M.
Attention, θ n'est pas unique !

On a : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

L'application permettant le changement de coordonnées sera notée :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} .$$

Application au calcul d'intégrale

Soit D un domaine du plan, et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

On suppose qu'il existe un domaine D_{pol} du plan tel que $\phi(D_{pol}) = D$

Alors on peut calculer l'intégrale de f en coordonnées polaires :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_{pol}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Application au calcul d'intégrale

Soit D un domaine du plan, et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

On suppose qu'il existe un domaine D_{pol} du plan tel que $\phi(D_{pol}) = D$, et que ϕ soit injective sur l'intérieur de D_{pol}.

Alors on peut calculer l'intégrale de f en coordonnées polaires :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_{pol}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

A retenir pour l'intégration en polaires

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ dx\,dy = r\,dr\,d\theta \end{cases}$$

$$(x, y) \in D \quad \leftrightarrow \quad (r, \theta) \in D_{pol}$$

Attention : chaque point (x, y) de D doit correspondre à un unique point (r, θ) de D_{pol}, sauf éventuellement pour les points d'une zone *d'aire nulle*.

Intégrale triple sur un pavé

Soit $P = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$ un pavé de l'espace, et $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ une fonction continue sur P.

Pour intégrer f, on procède par approximations successives : on calcule des sommes de Riemann pour des subdivisions de plus en plus fines du pavé P.

$$\iiint_P f \approx \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant j \leqslant p-1 \\ 0 \leqslant k \leqslant q-1}} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k$$

Intégrale triple sur un pavé

Soit $P = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$ un pavé de l'espace, et $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ une fonction continue sur P.

Pour intégrer f, on procède par approximations successives : on calcule des sommes de Riemann pour des subdivisions de plus en plus fines du pavé P.

$$\iiint_P f = \lim_{\substack{\Delta x_{\max} \to 0 \\ \Delta y_{\max} \to 0 \\ \Delta z_{\max} \to 0}} \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant j \leqslant p-1 \\ 0 \leqslant k \leqslant q-1}} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k$$

Intégrale triple sur un domaine plus général

On veut intégrer une fonction f continue sur un domaine D qui n'est pas un pavé.

On choisit un pavé P qui contient D.

On pose, pour $(x, y, z) \in P$:

$$\widetilde{f}(x,y,z) = \left| \begin{array}{ll} f(x,y,z) & \text{si } (x,y,z) \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Si le domaine D est "sympathique", on définit l'intégrale de f sur D en posant :

$$\iiint_D f = \iiint_P \tilde{f}.$$

Théorèmes de Fubini

Il y a trois coordonnées, donc six ordres possibles :

$$\begin{array}{ccc} dx\,dy\,dz & dy\,dz\,dx & dz\,dx\,dy \\ dx\,dz\,dy & dy\,dx\,dz & dz\,dy\,dx \end{array}$$

Il y a aura donc six "types" de domaines, et six théorèmes de Fubini...

Domaine de type 1

Un domaine D de l'espace est de type 1 si on peut le décrire par un système d'inéquations de la forme :

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c(x) \leqslant y \leqslant d(x) \\ e(x,y) \leqslant z \leqslant f(x,y) \end{cases},$$

avec c, d, e, f des fonctions continues.

Théorème de Fubini

Si g est une fonction continue sur un domaine D de type 1, décrit par les inéquations ci-dessus, alors l'intégrale de g sur D est bien définie et :

$$\iiint_D g = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} \left(\int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z)\, dz \right) dy \right] dx.$$

Domaines de type 2, 3, 4, 5, 6

En exercice...

Propriétés de l'intégrale triple

Linéarité :

$$\iiint_D \left[\lambda f + \mu g\right] = \lambda \iiint_D f + \mu \iiint_D g$$

Croissance, dont on déduit l'inégalité de la moyenne :

$$m \leqslant f \leqslant M \quad \Rightarrow \quad m\mathcal{V}(D) \leqslant \iiint_D f \leqslant M\mathcal{V}(D)$$

Additivité sur les domaines :

Si les intérieurs de D_1 et D_2 sont disjoints, alors

$$\iiint_{D_1 \cup D_2} f = \iiint_{D_1} f + \iiint_{D_2} f.$$

Exercices

Une fiche d'exercices relatifs à l'intégration en polaires et aux intégrales triples est disponible sur le site du cours (série 3) :

`https://cours.mat.ulaval.ca/11081`

Si nous en avons le temps, nous corrigerons la semaine prochaine, en classe, les exercices **2-b)**, **4** et **8**.

Objectifs de la semaine 4

Réviser l'intégrale triple.

Calculer des masses, centres de gravité, moments d'inertie en dimension 3.

Calculer des intégrales triples :

- en coordonnées cylindriques ;
- en coordonnées sphériques.

Calcul de volume

$$\mathcal{V}(D) = \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Masse, centre de gravité

Le domaine D représente un solide pesant de densité variable. La masse volumique (en kg.m^{-3}) au point (x, y, z) est notée $\rho(x, y, z)$.

Masse totale :

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Coordonnées du centre de masse :

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_D x\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iiint_D y\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_D z\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Moment d'inertie

On cherche le moment d'inertie J_Δ de la plaque pesante par rapport à un axe Δ, de sorte que l'énergie cinétique acquise, pour une rotation à la vitesse angulaire α autour de l'axe Δ, soit :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \alpha^2.$$

Formule générale :

$$J_\Delta = \iiint_D \Big[d\Big((x,y,z), \Delta\Big)\Big]^2 \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

Moment d'inertie

Erwan BILAND

Formules particulières :

$\hookrightarrow$ pour l'axe $\Delta = (Ox)$

$$J_{(Ox)} = \iiint_D (y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

$\hookrightarrow$ pour l'axe $\Delta = (Oy)$

$$J_{(Oy)} = \iiint_D (x^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

$\hookrightarrow$ pour l'axe $\Delta = (Oz)$

$$J_{(Oz)} = \iiint_D (x^2 + y^2)\, \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Coordonnées cylindriques

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour un point M, on note H son projeté orthogonal sur le plan (Oxy), et (r, θ) des coordonnées polaires du point H.
On note z la troisième coordonnée cartésienne de M.

On dit que (r, θ, z) sont des coodonnées cylindriques pour M.
Attention, θ n'est pas unique !

On a :
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Intégration en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \\ dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$(x, y, z) \in D \quad \leftrightarrow \quad (r, \theta, z) \in D_{cyl}$$

Attention : chaque point (x, y, z) de D doit correspondre à un unique point (r, θ, z) de D_{cyl}, sauf éventuellement pour les points d'une zone *de volume nul*.

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_{cyl}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

Coordonnées sphériques

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour un point M, on note $\rho = OM$.
Puis on repère M sur la sphère de centre O et de rayon ρ par :

- sa longitude θ, mesurée vers l'est à partir de $[Ox)$;
- sa co-lattitude ϕ ou φ, mesurée à partir du pôle nord.

On dit que (ρ, θ, ϕ) sont des coodonnées sphériques pour M.
Attention, θ n'est pas unique !

On a : $\left\{\begin{array}{l} r = \rho \sin\phi \\ \theta = \theta \\ z = \rho\cos\phi \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{array}\right.$

Intégration en coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \\ dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$(x,y,z) \in D \quad \leftrightarrow \quad (\rho,\theta,\phi) \in D_{sph}$$

Attention : chaque point (x,y,z) de D doit correspondre à un unique point (ρ,θ,ϕ) de D_{sph}, sauf éventuellement pour les points d'une zone *de volume nul*.

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_{sph}} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

Exercices

Une fiche d'exercices relatifs aux intégrales triples en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques est disponible sur le site du cours (série 4) :

`https://cours.mat.ulaval.ca/11081`

Si nous en avons le temps, nous corrigerons la semaine prochaine, en classe, les exercices **3** et **7**.

Objectifs de la semaine 5

Définir les notions :

- transformation inversible du plan ou de l'espace ;
- jacobien d'une transformation.

$\hookrightarrow$ Cas d'une transformation linéaire (changement de repère).

Calculer des intégrales dans les nouvelles coordonnées.

Changement de repère dans le plan

Coordonnées : (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(u, v) dans le repère $(O', \vec{i}', \vec{j}')$

avec : $O' \left| \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \end{array} \right. \qquad \vec{i}' \left| \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right. \qquad \vec{j}' \left| \begin{array}{l} c \\ d \end{array} \right.$

Changement de repère dans le plan

Coordonnées : (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(u, v) dans le repère $(O', \vec{i}', \vec{j}')$

avec : $O' \left| \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \end{array} \right. \qquad \vec{i}' \left| \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right. \qquad \vec{j}' \left| \begin{array}{l} c \\ d \end{array} \right.$

On trouve : $\begin{cases} x = x_0 + au + cv \\ y = y_0 + bu + dv \end{cases}$

Changement de repère dans le plan

Coordonnées : (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(u, v) dans le repère $(O', \vec{i}', \vec{j}')$

avec : $O' \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right. \quad \vec{i}' \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right. \quad \vec{j}' \left| \begin{matrix} c \\ d \end{matrix} \right.$

On trouve : $\begin{cases} x = x_0 + au + cv \\ y = y_0 + bu + dv \end{cases}$

On peut résoudre pour trouver (u, v) en fonction de (x, y).

Il faut aussi savoir retrouver le nouveau repère à partir des formules de changement de coordonnées.

Calcul de l'élément d'aire

On prend un "rectangle" dans le *nouveau repère* :

$$\begin{cases} u_0 \leqslant u \leqslant u_1 \\ v_0 \leqslant v \leqslant v_1 \end{cases}$$

On trouve un parallélogramme $ABCD$ dans l'ancien repère :

$$A \left| \begin{array}{l} x_0 + au_0 + cv_0 \\ y_0 + bu_0 + dv_0 \end{array} \right. \qquad B \left| \begin{array}{l} x_0 + au_1 + cv_0 \\ y_0 + bu_1 + dv_0 \end{array} \right.$$

$$C \left| \begin{array}{l} x_0 + au_1 + cv_1 \\ y_0 + bu_1 + dv_1 \end{array} \right. \qquad D \left| \begin{array}{l} x_0 + au_0 + cv_1 \\ y_0 + bu_0 + dv_1 \end{array} \right.$$

On calcule l'aire du parallélogramme :

$$\mathcal{A}(ABCD) = \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \right| = \left| \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \right| .\Delta u\, \Delta v$$

Intégration dans les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} x = x_0 + au + cv \\ y = y_0 + bu + dv \\ dx\,dy = |J_T|\,du\,dv \qquad \text{où } J_T = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$(x, y) \in D_{x,y} \quad \leftrightarrow \quad (u, v) \in D_{u,v}$$

Ici chaque point (x, y) de $D_{x,y}$ correspond évidemment à un unique point (u, v) de $D_{u,v}$.

$$\iint_{D_{x,y}} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D_{u,v}} f(x_0+au+cv, y_0+bu+dv)\,|J_T|\,du\,dv$$

Changement de repère dans l'espace

Coordonnées : (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(u, v, w) dans le repère $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$

avec : $O' \left| \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \right. \quad \vec{i}' \left| \begin{array}{l} a \\ a' \\ a'' \end{array} \right. \quad \vec{j}' \left| \begin{array}{l} b \\ b' \\ b'' \end{array} \right. \quad \vec{k}' \left| \begin{array}{l} c \\ c' \\ c'' \end{array} \right.$

Changement de repère dans l'espace

Coordonnées : (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(u, v, w) dans le repère $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$

avec : $O' \left| \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \right. \quad \vec{i}' \left| \begin{array}{l} a \\ a' \\ a'' \end{array} \right. \quad \vec{j}' \left| \begin{array}{l} b \\ b' \\ b'' \end{array} \right. \quad \vec{k}' \left| \begin{array}{l} c \\ c' \\ c'' \end{array} \right.$

On trouve : $\begin{cases} x = x_0 + au + bv + cw \\ y = y_0 + a'u + b'v + c'w \\ z = z_0 + a''u + b''v + c''w \end{cases}$

Changement de repère dans l'espace

Coordonnées : (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(u, v, w) dans le repère $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$

avec : $O' \left| \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \right. \quad \vec{i}' \left| \begin{array}{l} a \\ a' \\ a'' \end{array} \right. \quad \vec{j}' \left| \begin{array}{l} b \\ b' \\ b'' \end{array} \right. \quad \vec{k}' \left| \begin{array}{l} c \\ c' \\ c'' \end{array} \right.$

On trouve : $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + au + bv + cw \\ y = y_0 + a'u + b'v + c'w \\ z = z_0 + a''u + b''v + c''w \end{array} \right.$

On peut résoudre pour trouver (u, v, w) en fonction de (x, y, z).

Il faut aussi savoir retrouver le nouveau repère à partir des formules de changement de coordonnées.

Intégration dans les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} x = x_0 + au + bv + cw \\ y = y_0 + a'u + b'v + c'w \\ z = z_0 + a''u + b''v + c''w \\ \\ dx\,dy\,dz = |J_T|\,du\,dv\,dv \ , \quad J_T = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in D_{x,y,z} \quad \leftrightarrow \quad (u,v,w) \in D_{u,v,w}$$

Ici chaque point (x,y,z) de $D_{x,y,z}$ correspond évidemment à un unique point (u,v,w) de $D_{u,v,w}$.

$$\iiint_{D_{x,y,z}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_{u,v,w}} f(\dots)\,|J_T|\,du\,dv\,dw$$