Théorèmes élémentaires sur les limites et la continuité des fonctions

Voici une liste de théorèmes qui se démontrent de la même manière pour les fonctions que pour les suites.

1 - Limites et opérations

Théorème (addition). Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et a un point de $\bar{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

(i) Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \in \mathbb{R}$, alors $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell+\ell'$.

(ii) Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

(iii) Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, alors $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.

Théorème (passage à l'opposé). Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et a un point de $\bar{\mathbb{R}}$. Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}}$, alors $-f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\ell$,

avec la convention $-(+\infty) = -\infty$ et $-(-\infty) = +\infty$.

Théorème (multiplication). Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et a un point de $\bar{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

(i) Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \in \mathbb{R}$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ell'$.

(ii) Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}_{>0}\cup\{+\infty\}$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

Les résultats pour $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}_{<0}\cup\{-\infty\}$ et/ou $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ s'en déduisent par règle des signes, à l'aide du théorème sur le passage à l'opposé.

Théorème (passage à l'inverse). Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et a un point de $\bar{\mathbb{R}}$. Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

(i) Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}}_{\neq 0}$, alors il existe un voisinage du point a sur lequel la fonction f ne s'annule pas. De plus $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{\ell}$,

avec la convention $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$.

(ii) Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ **et si** la fonction f ne s'annule pas au voisinage du point a, alors

$$\frac{1}{|f(x)|} \xrightarrow[x\to a]{} +\infty.$$

Si on connaît de plus le signe de la fonction f au voisinage du point a, une règle des signes permet de savoir si son inverse tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

On en déduit facilement un théorème sur le quotient de deux fonctions admettant des limites au point a.

Je vous conseille de résumer les théorèmes précédents dans des tableaux semblables à ceux que nous avons tracés pour les limites de suites. Il reste bien sûr les cas classiques d'indétermination :

$$\infty - \infty \quad ; \quad 0\times\infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

2 - Continuité et opérations

On déduit facilement du paragraphe 1 les deux résultats suivants.

Théorème (continuité locale et opérations). Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et a un point de $\bar{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$. Si les fonctions f et g sont continues au point a, alors

(i) La somme $f+g$, l'opposé $-f$ et le produit fg sont des fonctions continues au point a.

(ii) Si de plus la fonction g ne s'annule pas au voisinage du point a, alors l'inverse $1/g$ et le quotient f/g sont des fonctions définies au voisinage du point a et continues au point a.

Théorème (continuité globale et opérations). Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et a un point de $\bar{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$. Si les fonctions f et g sont continues sur le domaine D, alors

(i) La somme $f+g$, l'opposé $-f$ et le produit fg sont des fonctions continues sur le domaine D.

(ii) Si de plus la fonction g ne s'annule pas sur le domaine D, alors l'inverse $1/g$ et le quotient f/g sont des fonctions définies et continues sur le domaine D.

3 - Limites et ordre

Théorème (passage à la limite dans les relations d'ordre). Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et a un point de $\bar{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$. On suppose que les fonctions f et g admettent des limites au point a.

$$\text{Si } \forall x \in D,\ f(x) \leqslant g(x), \text{ alors } \lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

Attention, le théorème qu'on vient d'énoncé ne permet pas de prouver l'existence d'une limite, contrairement au théorème suivant.

Théorème (des gendarmes pour une limite finie). Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et a un point de $\bar{\mathbb{R}}$. Soient f, g h trois fonctions de D dans $\mathbb{R}$, et ℓ un réel.

$$\text{Si } \begin{cases} \forall x \in D,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \text{ et } h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \end{cases}, \text{ alors } g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell.$$

Théorème (des gendarmes pour une limite infinie). Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et a un point de $\bar{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

(i) $$\text{Si } \begin{cases} \forall x \in D,\ f(x) \leqslant g(x) \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{cases}, \text{ alors } g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty.$$

(ii) $$\text{Si } \begin{cases} \forall x \in D,\ f(x) \leqslant g(x) \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty \end{cases}, \text{ alors } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty.$$

En fait, dans les trois théorèmes précédents, l'inégalité ou l'encadrement n'a pas besoin d'être vrai pour tout $x \in D$; il suffit qu'il soit vrai sur un voisinage du point a.

4 - Limites des fonctions monotones

Théorème (limite d'une fonction croissante à gauche d'un point). Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et a un point de $\mathbb{R} \cap +\infty$. Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est croissante sur le domaine $D \cap]-\infty, a[$.

(i) Si la fonction f est majorée sur le domaine $D \cap]-\infty, a[$, alors elle admet une limite à gauche au point a, et

$$\lim_{x \to a,\, x<a} f(x) \;=\; \sup\big\{f(x);\; x \in D \cap]-\infty, a[\,\big\}.$$

(ii) Si la fonction f n'est pas majorée sur le domaine $D \cap]-\infty, a[$, alors

$$f(x) \xrightarrow[x \to a,\, x<a]{} +\infty.$$

Théorème (limite d'une fonction croissante à droite d'un point). Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et a un point de $\mathbb{R} \cap -\infty$. Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est croissante sur le domaine $D \cap]a, +\infty[$.

(i) Si la fonction f est minorée sur le domaine $D \cap]a, +\infty[$, alors elle admet une limite à droite au point a, et

$$\lim_{x \to a,\, x>a} f(x) \;=\; \inf\big\{f(x);\; x \in D \cap]a, +\infty[\,\big\}.$$

(ii) Si la fonction f n'est pas majorée sur le domaine $D \cap]a, +\infty[$, alors

$$f(x) \xrightarrow[x \to a,\, x>a]{} -\infty.$$

Avec un dessin, ces résultats devraient vous sembler évidents. Je vous laisse écrire les théorèmes similaires pour une fonction décroissante à gauche ou à droite d'un point.