Structure du cours

MAT 1120

Erwan Biland

Département de mathématique et de statistiques
Université Laval - Hiver 2013

Table des matières

Les durées estimées pour chacun des chapitres font un total de 37 heures, sur 39 heures disponibles pour l'enseignement proprement dit. À cela s'ajoutent 9 heures de travaux pratiques, 4 heures de tests, 4 heures d'examens et 4 heures durant la semaine de lecture pour arriver aux 60 heures du cours, réparties sur 15 semaines.

Chapitre 1

Les ensembles de nombres (10h)

Poly 1.1 : Symboles mathématiques usuels
Poly 1.2 : Qu'est-ce qu'une équation ?

Objectif : poser les bases de la rigueur dans les raisonnements et de la prudence dans les calculs. Introduire quelques modes de raisonnements nouveau (analyse/synthèse, existence/unicité...).

1 Éléments de théorie des ensembles (2h)

a) Qu'est-ce qu'un ensemble ?

Ensembles, éléments, appartenance, égalité d'ensembles. Écriture en extension, en compréhension. Inclusion, caractérisation de l'égalité. Ensemble vide.

b) Connecteurs logiques et quantificateurs

Implication : contraposée, négation.

c) Opérations sur les parties d'un ensemble

Intersection, réunion : croissance, associativité, distributivité. Complémentaire, différence ensembliste : lois de Morgan. Ensemble des parties d'un ensemble. Produit cartésien de deux ensembles.

2 L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs (3h)

a) L'ordre usuel des entiers relatifs

Réflexivité, transitivité,antisymétrie. Ordre total. Notion de majorant, de minorant d'une partie (borne supérieure, borne inférieure en Amérique). Maximum (minimum) d'une partie non vide et majorée (minorée) de $\mathbb{Z}$.

b) Calcul de sommes et de produits

Changements d'indice. Sommes de termes de suites arithmétiques/géométriques. $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$. Exercice : calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Factorielle. Exercice : produit des n premiers entiers pairs/impairs. Coefficients binomiaux. Triangle de Pascal.

c) Preuves par récurrence (induction en Amérique)

Démonstration par l'absurde du théorème de la récurrence. Toute suite d'entiers qui est croissante et majorée (décroissante et minorée) est stationnaire.

Applications : somme des n premiers carrés, formule du binôme de Newton.

3 L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (4h)

Conseil de lecture : Boualem H., Brouzet R. – *La planète $\mathbb{R}$, Voyage au pays des nombres réels*, Dunod, 2002.

a) $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné

Compatibilité entre $+$, $\times$ et $\leqslant$. Règle des signes, valeur absolue, inégalités triangulaires. Décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) L'axiome d'Archimède

$\mathbb{Z}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des inverses des entiers strictement positifs n'est pas minoré dans $\mathbb{R}_{>0}$. Partie entière d'un nombre réel.

c) Le sous-ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

Définition, écriture irréductible d'un rationnel. Nombres décimaux, valeurs décimales approchées d'un nombre réel. Développement décimal illimité. Nombres irrationnels (en existe-t-il ?).

d) L'axiome de complétude

Notion de supremum, d'infimum d'une partie de $\mathbb{R}$ (borne supérieure, borne inférieure en France). Caractérisation en ε.

Supremum (infimum) d'une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (minorée). Application : racine carrée d'un réel positif $\sqrt{a} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant a\}$. Irrationnalité de $\sqrt{2}$, par l'absurde.

e) La droite réelle achevée $\bar{R}$

Voisinage d'un nombre réel, de $+\infty$, de $-\infty$. Curiosité : toute partie de $\bar{\mathbb{R}}$ admet un supremum et un infimum.

4 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes (non évalué, 1h)

a) Le nombre i, l'ensemble $\mathbb{C}$

Partie réelle, partie imaginaire, conjugué, module, argument. Application à la géométrie (en bref)

b) $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos

Tout nombre complexe a exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}$. Exemple : calcul des racines carrées de $3 + 4i$. Tout polynôme de degré n a exactement n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec multiplicités. Exemple : racines complexes du polynôme $X^5 - X^2$.

En conclusion : bref historique de l'invention de la notion de nombre.

Chapitre 2

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles (6h)

Beaucoup d'exemples et de dessins dans ce chapitre

1 Les fonctions ensemblistes (3h)

a) Qu'est-ce qu'une fonction ?

Définition formelle par le triplet (E, F, Γ). On a défini une application de E dans F si on sait associer à tout élément de E, sans ambiguïté, un unique élément de F. Vocabulaire : image, antécédents. Exemple de l'application identité (sur E), de $x \mapsto \frac{1}{x}$ (sur $\mathbb{R}$).

b) Restriction, prolongement, composition

Définition des restrictions au départ et à l'arrivée par le triplet correspondant. Exemples de prolongements, continus ou non. Composition de fonctions.

c) Image directe, image réciproque d'une partie

Interprétation en termes d'équations.

d) Fonction bijective, fonction réciproque

Définition. Interprétation en termes d'équations. Fonction réciproque définie par son graphe. Caractérisation d'une bijection par l'existence de la fonction réciproque.
Fonction injective, surjective (non évalué).

2 Les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (1h30)

L'ensemble de départ D est contenu dans $\mathbb{R}$. Il s'agit parfois d'un domaine de définition, à déterminer à partir d'une expression définissant $f(x)$.

a) Opérations sur les fonctions

Addition, *etc.*

b) Fonctions minorées, majorées, bornées

c) Fonctions croissantes, décroissantes

d) Fonctions paires, impaires, périodiques, antipériodiques

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique et bornée sur une période, alors f est bornée sur $\mathbb{R}$.

e) Suites

Cas particulier où $D = \mathbb{Z}_{\geqslant n_0}$ pour un $n_0 \in \mathbb{Z}$. Notation $(u_n)_{n \geqslant n_0}$. Suites extraites. Suites définies par récurrence : problème de la bonne définition. Ensembles dénombrables (non évalué).

3 Quelques fonctions usuelles (1h30)

Savoir dessiner les graphes et en extraire les informations pertinentes. Exponentielle, logarithmes, fonctions circulaires, puissances, fonctions polynomiales.

Chapitre 3

Convergence des suites réelles (8h)

1 Limite d'une suite (3h)

a) Limites finies

Définition d'une limite finie, notation $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Unicité de la limite, notation $\ell = \lim(u) = \lim\limits_{n\to\infty}(u_n)$. Théorème des gendarmes. Exemples.

b) Limites infinies

Définition à l'aide des voisinages. Unicité de la limite dans $\bar{\mathbb{R}}$.

c) Limites et ordre

Tout se déduit de la proposition : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $x < \ell$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n > x$. Caractère minoré, majoré d'une suite admettant une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$.

d) Limites et opérations

Somme, produit, passage à l'inverse. Faire un tableau récapitulatif pour les limites finies et infinies.

2 Limites de quelques suites de référence (2h)

Suite des n^α ; suites polynomiales ; suites et séries géométriques, suite des $\sqrt[n]{\alpha}$, des $\sqrt[n]{n}$, des $n!$, des n^n. Technique de la quantité conjuguée. Savoir reconnaître une dérivée. Exercice : suites définies par une relation de récurrence linéaire.

3 Théorèmes d'existence de limites (3h)

a) Convergence et divergence des suites monotones

Enoncé sous forme de distinction de cas. Application : définition d'un nombre réel à partir d'un développement décimal illimité. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (non évalué).

b) Suites adjacentes

Application : irrationnalité de e (en admettant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$).

c) Suite de Cauchy

Inutile avec un point de vue adapté sur l'absolue convergence des séries. À supprimer ?

d) Théorème de Bolzano-Weierstrass

Démonstration par dichotomie, ou par la méthode des sous-suites monotones.

Chapitre 4
Limites et continuité des fonctions à valeurs réelles (8h)

Poly 4.1 : Applications de la dichotomie

Les théorèmes de composition de limites doivent être traités soigneusement. Souligner l'intérêt de la rédaction en termes de voisinages pour éviter des distinctions de cas fastidieuses (27 cas possibles !). Montrer aussi que la plupart des notions intéressantes possèdent une caractérisation par les suites. Prévoir du temps pour les démonstrations des grands théorème du paragraphe 5. Il sera intéressant de présenter plusieurs démonstrations possibles, plusieurs variantes des énoncés.

1 Etude locale des fonctions (4h)

a) Limites

Limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ en un point $a \in \bar{\mathbb{R}}$ adhérent à X : définition par les voisinages, explicitation dans les neuf cas possibles. Notation $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. Continuité en un point, continuité globale. Limite à gauche, à droite. Continuité à gauche, à droite.

b) Propriétés élémentaires

Unicité de la limite dans $\bar{\mathbb{R}}$: importance de supposer a adhérent à X. Notation $\ell = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_a f$. Théorème des gendarmes. Caractère borné, minoré, majoré au voisinage du point a. Compatibilité de l'ordre large avec le passage à la limite.

c) Limites, continuité et opérations

Somme, produit (le quotient sera obtenu grâce à la composition). Cas des limites infinies. Exercice : limites des fonctions monotones ; règle des signes entre limite à gauche/à droite, croissance/décroissance, et majoration/minoration de la fonction.

d) Limite d'une fonction composée

Démonstration par les voisinages, éventuellement explicitée dans un cas particulier.

e) Caractérisations séquentielles

Points adhérents, parties denses, limites, existence d'une limite, continuité locale.

2 Etude globale des fonctions continues (4h)

a) Restriction et prolongement

Prolongement par continuité. Fonctions continues qui coïncident sur $\mathbb{Q}$. Exercice : endomorphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$.

b) Théorème des valeurs intermédiaires

Valable pour les fonctions *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. Démonstration par dichotomie ou par Bolzano-Weierstrass (ou les deux...). Diverses variantes de l'énoncé.

c) Théorème de la bijection continue

Si $X \subset \mathbb{R}$ et si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone telle que $f(X)$ est un intervalle, alors f est continue. On en déduit qu'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle induit une bijection bicontinue. Limites de la fonction réciproque.

d) Théorème des bornes

Démonstration par Bolzano-Weierstrass. Application au module d'une fonction à valeurs complexes.

Chapitre 5

Séries numériques et séries entières (5h)

1 Convergence des séries numériques (4h)

a) Séries convergentes

Convergence, divergence d'une série ; somme. Grossière divergence. Exemple des séries télescopiques. Définition des restes partiels d'une série convergente. Convergence d'une combinaison linéaire de séries ; linéarité de la somme.

b) Séries à termes positifs et séries absolument convergentes

Séries à termes positifs : croissance de la suite des sommes partielles. La série converge ssi la suite des sommes partielles est majorée. Théorème de comparaison. Une série absolument convergente est vue comme la différence de deux séries à termes positifs convergentes.

c) Opérations sur les séries absolument convergentes

Réarrangements, produit de Cauchy. Sans démonstration.

d) Séries alternées

Critère de Leibniz ou CSSA.

e) Séries usuelles

Séries géométriques, séries de Riemann. Critères de D'Alembert, de la racine n-ième, de Riemann.

2 Séries entières (1h)

Rayon de convergence. Critère de D'Alembert, de la racine n-ième.