Série 9
Fonctions continues sur un intervalle

Exercice 9.1 On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.2 Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient α et β deux réels strictement positifs. Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\alpha f(a)+\beta f(b) = (\alpha+\beta)f(c)$.
Indication : montrer que le réel $\frac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta}$ *est compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$.

Exercice 9.3 Entre 8 h et 9 h, un marcheur parcourt 12 km.
a) Démontrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 6 km.
Indication : définir une fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, *et appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction* $g : t \mapsto g(t + \frac{1}{2}) - g(t)$.
b) Existe-t-il un intervalle de 20 min pendant lequel il parcourt exactement 4 km ?
c) Existe-t-il un intervalle de 40 min pendant lequel il parcourt exactement 8 km ?

Exercice 9.4 Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer que f admet au moins un point fixe sur le segment $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.
Indication : appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

Exercice 9.5 Soient $a < b$ deux réels, et f, g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $\forall x \in [a, b],\ 0 < f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe un réel $k < 1$ tel que $\forall x \in [a, b],\ f(x) \leqslant kg(x)$.
Indication : appliquer le théorème des bornes au quotient f/g.

Exercice 9.6 (plus difficile) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs strictement positives. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n}f(x_n)$. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Indication : on raisonnera par l'absurde en supposant la suite bornée et en montrant qu'il existe alors $\alpha > 0$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) \geqslant \alpha$. *On utilisera le fait que* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 9.7 (plus difficile) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.
b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = xf(1)$.
c) Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$.
La fonction f est donc du type $x \mapsto ax$, pour un réel a fixé.