Exercices corrigés - MAT 1120

Série 9

Exercice 9.1

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
La fonction $y \longmapsto \sin y$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, par composition, la fonction $x \longmapsto \sin\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. De plus, la fonction $x \longmapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, donc, par produit, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Par ailleurs, pour tout $x \neq 0$, on a $-|x| \leq f(x) \leq |x|$, car $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$. Or $-|x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $|x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0)$. Donc la fonction f est aussi continue en 0.

En résumé, la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 9.2

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Trois cas se présentent :

* si $f(a) = f(b)$, alors $\dfrac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta} = f(a) = f(b)$.
* si $f(a) < f(b)$, alors $\alpha f(a) + \beta f(a) < \alpha f(a) + \beta f(b) < \alpha f(b) + \beta f(b)$,
  d'où $$f(a) < \frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta} < f(b).$$
* si $f(a) > f(b)$, alors $\alpha f(a) + \beta f(a) > \alpha f(a) + \beta f(b) > \alpha f(b) + \beta f(b)$,
  d'où $$f(a) > \frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta} > f(b).$$

Dans le premier cas, on peut prendre $c = a$. Dans les autres cas, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta}$ (car f est continue et $[a,b]$ est un intervalle).

Donc $(\alpha+\beta) f(c) = \alpha f(a) + \beta f(b)$.

<u>Exercice 9.3</u>

a) Entre 8h et 9h, le marcheur parcourt 12 km. Pour $t \in [0,1]$, notons $f(t)$ la distance parcourue après t heure. Alors f est une fonction continue et croissante telle que $f(0)=0$ et $f(1)=12$. Notons $g : \begin{array}{l} [0, 1/2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(t+\frac{1}{2}) - f(t) \end{array}$

Trois cas se présentent :

* si $f(\frac{1}{2}) = 6$, alors le marcheur a parcouru 6 km pendant les premières 30 min, et l'exercice est résolu.
* si $f(\frac{1}{2}) < 6$, alors $g(0) = f(\frac{1}{2}) - f(0) < 6 - 0 = 6$,
  et $g(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) > 12 - 6 = 6$.
* si $f(\frac{1}{2}) > 6$, alors $g(0) > 6$ et $g(\frac{1}{2}) < 6$.

Dans les deux derniers cas, comme g est continue sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$, il existe $t_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(t_0) = 6$, c'est-à-dire que le marcheur parcourt 6 km durant la demi-heure suivant l'instant t_0.

b) OUI (même démonstration)

c) NON : supposons par exemple que le marcheur (très rapide !) parcourt 5 km dans les 5 premières minutes, 2 km dans les 50 minutes suivantes, et 5 km dans les 5 dernières minutes. Alors il ne parcourt 8 km sur aucune période de 40 minutes consécutives.

Exercice 9.4

La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$.
De plus, $f([a,b]) \subseteq [a,b]$ donc $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$.
Alors la fonction $g : \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - x \end{array}$ est continue sur l'intervalle $[a,b]$, et on a $g(a) \geq 0 \geq g(b)$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a,b]$ tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$.

Exercice 9.5

$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues et $\forall x \in [a,b]$, $0 < f(x) < g(x)$.
La fonction $h : \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)/g(x) \end{array}$ est donc bien définie et continue sur le segment $[a,b]$. D'après le théorème des bornes, elle admet donc un maximum : il existe $c \in [a,b]$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $h(x) \leq h(c)$.
Notons $k = h(c)$. Alors $k < 1$ car $f(c) < g(c)$. De plus, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq k, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) \leq k\, g(x).$$