Série 8
Limites et continuité locale des fonctions

Exercice 8.1 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 7)$; **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - 2}{x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 2x - 5}$.

Exercice 8.2 Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

a) Démontrer que la fonction E est continue à droite en tout point.

b) Quels sont les points où la fonction E n'est pas continue ? *(On demande une réponse justifiée.)*

Exercice 8.3 Soit $T > 0$ un réel, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. On suppose que la fonction f admet une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Indication : pour $x \in \mathbb{R}$, étudier la suite $\big(f(x + nT)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8.4 Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. On suppose f croissante et g décroissante. Montrer que f est continue. *Indication : utiliser les théorèmes sur les limites de fonctions monotones.*

Exercice 8.5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On considère l'ensemble :

$$X_f = \Big\{ y \in \mathbb{R} \mid \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \geqslant A,\ f(x) = y \Big\}.$$

En d'autres termes, les éléments de l'ensemble X_f sont les valeurs prises par la fonction f dans tout voisinage de $+\infty$.

a) On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. Déterminer l'ensemble X_f.

a) On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Montrer que l'ensemble X_f est vide.

c) On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin x$. Montrer que $X_f = [-1, 1]$.

Indication : il est conseillé de faire un dessin. il faut montrer que, pour tout $t \in [0, T[$ et pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $t + 2\pi n \geqslant A$.

Exercice 8.6 (plus difficile, ne sera pas corrigé)

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

a) Rappeler pourquoi la fonction f admet une limite à droite en tout $x \in [a, b[$, que l'on notera $f_d(x)$, et une limite à gauche en tout $x \in]a, b]$, que l'on notera $f_g(x)$. Pour tout $x \in]a, b[$, on notera $v_f(x) = f_d(x) - f_g(x)$.

b) Soit $x \in]a, b[$. Montrer que $v_f(x) \geqslant 0$, et que $v_f(x) = 0$ si, et seulement si, f est continue en x.

c) Soit $(x, y) \in [a, b]^2$ tel que $x < y$. Montrer que $f_g(y) - f_d(x) \geqslant 0$, et que $f_g(y) - f_d(x) = 0$ si, et seulement si, f est constante sur $]x, y[$.

d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1 < \ldots < x_p$ des éléments de $]a, b[$. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{p} v_f(x_k) \leqslant f(b) - f(a)$.

Indication : on pourra montrer que

$$\textstyle\sum_{k=1}^{p} v_f(x_k) + \sum_{k=1}^{p-1} (f_g(x_{k+1} - f_d(x_k)) = f_g(b) - f_d(a) \leqslant f(b) - f(a).$$

e) En déduire que, pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble des $x \in]a, b[$ tels que $v_f(x) > \alpha$ est fini.

Ceci implique que l'ensemble des points où la fonction f n'est pas continue est un ensemble dénombrable.