Exercices corrigés - MAT 1120

Série 8

Exercice 8.1

a) Pour tout réel $x>0$, $\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 7 = \frac{1}{x^2}(1-3x+7x^2)$.

Or $3x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $7x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc $1-3x+7x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$,

et $\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$, donc $\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 7 \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$.

b) Pour tout réel $x>0$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$.

Or $\frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \ln'(1)=1$, ~~et~~ $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc $x\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{1/x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

(composition de limites). De plus, la fonction $y \mapsto e^y$ est continue au point 1, donc $e^{x\ln(1+1/x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^1 = e$.

Finalement $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} e$.

c) Pour tout $x \geq -4$, $\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+x}+2}$,

don $\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$.

d) Pour tout réel x tel que $3x^2-2x-5 \neq 0$, on a :

$$\frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x-5} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(3x-5)} = \frac{x+1}{3x-5}.$$

Or $x+1 \xrightarrow[x\to -1]{} 0$ et $3x-5 \xrightarrow[x\to -1]{} -8$, donc $\frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x-5} \xrightarrow[x\to -1]{} 0$.

Exercice 8.2

Fait en cours.

Exercice 8.3

On suppose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x + nT$.

Comme f est T-périodique, on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(y_n) = f(x)$, donc $f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

D'autre part, on a $T>0$ donc $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Comme $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$, on en déduit par composition de limites que $f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Par unicité de la limite, on obtient $f(x)=\ell$. Ainsi f est la fonction constante de valeur ℓ.

Exercice 8.4

Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la fonction
$$g : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)/x \end{array}$$
soit décroissante.

Soit $a \in]0,+\infty[$ fixée. La fonction f est croissante sur $]0,a[$ et majorée, sur cet intervalle, par $f(a)$. Elle admet donc, au point a, une limite à gauche ℓ telle que $\ell \leq f(a)$.
On a alors $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x<a}]{} \ell$ et $x \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x<a}]{} a$, donc $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x<a}]{} \dfrac{\ell}{a}$.
Or la fonction g est décroissante sur $]0,+\infty[$ donc, pour tout $x \in]0,a[$, $g(x) \geq g(a)$. Par passage à la limite, on obtient $\dfrac{\ell}{a} \geq g(a) = \dfrac{f(a)}{a}$, d'où $\ell \geq f(a)$ (car $a>0$).
On a obtenu $\ell \leq f(a)$ et $\ell \geq f(a)$, donc $\ell = f(a)$: la fonction f est continue à gauche au point a.
On montre de même que f est continue à droite au point a.
Il en résulte que f est continue en tout point de $]0,+\infty[$.

Exercice 8.5

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $X_f = \{ y \in \mathbb{R} \mid \forall A \in \mathbb{R}, \exists x \geq A, f(x) = y \}$

a) Ici $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Soit $y \in X_f$. En prenant $A = 1$, il existe $x \geq 1$ tel que $f(x) = y$.
Donc $y = 0$. Réciproquement, pour $y = 0$ et pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $x \geq A$ (par exemple $x = A$) tel que $f(x) = 0 = y$.

Ainsi $X_f = \{0\}$.

b) Ici $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. On a $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geq A$, $f(x) \geq y + 1$. La proposition « $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \geq A, f(x) = y$ » est donc fausse, pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc $X_f = \emptyset$.

c) Ici $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Soit $y \in X_f$. Alors il existe $x \geq 1$ tel que $y = \sin x$. Donc $y \in [-1, 1]$.
Réciproquement, soit $y \in [-1, 1]$. Alors il existe $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $y = \sin x$ (en fait $x = \arcsin y$). Soit $A \in \mathbb{R}$ fixé.
Comme $x + 2\pi n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x + 2\pi n \geq A$.
En posant $x' = x + 2\pi n$, on a alors $x' \geq A$ et $y = \sin x'$.
Donc $y \in X_f$. Ceci prouve que $X_f = [-1, 1]$.