Série 7
Suites monotones

Exercice 7.1 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante, et $v = \left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite.

a) On suppose que v admet une limite finie ℓ. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

b) On suppose que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Indication : utiliser le critère de convergence des suites monotones.

Exercice 7.2 (Moyenne arithmético-géométrique)
Soient a et b deux réels strictement positifs, tels que $a < b$. On définit deux suites réelles u et v en posant :

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\quad \left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \end{array}\right. .$$

a) Montrer que $a < \sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a+b) < b$.
b) Montrer que les suites u et v admettent une limite commune ℓ, et que $a < \ell < b$.
Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique des réels a et b.
Indication : utiliser le théorème sur la convergence des suites adjacentes.

Exercice 7.3 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$.

a) Étudier la convergence de la suite v si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$.
b) On suppose $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Montrer que la suite $(|v_n|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.
a) Montrer que $|\cos(n\theta)| \not\longrightarrow 1$ (on peut s'inspirer de l'exercice 6.9). En déduire que la suite $(|v_n|)_{n\geqslant 1}$ converge forcément vers 0. Que peut-on en conclure pour la suite v ?

Exercice 7.4 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

a) Montrer que la suite u est convergente, et préciser sa limite.
Indication : on pourra reconnaître une somme télescopique.

b) Majorer la suite v à l'aide de la suite u, et en déduire qu'elle converge. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

Exercice 7.5 ♣ Soit u la suite réelle définie en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Montrer que u est croissante et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

b) Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 7.6 (plus difficile) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non majorée.
Montrer que u admet une suite extraite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$.
Indication : on pourra montrer que $\forall M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geqslant n, u_p \geqslant M$, puis construire par récurrence les entiers $\varphi(k),\ k \in \mathbb{N}$.