Exercices corrigés - MAT 1120

Série 7

Exercice 7.1

$u = (u_n)_{n\geq 0}$ suite croissante, et $v = (u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ suite extraite de u.

D'après le théorème sur les suites croissantes, la suite u admet une limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. D'après le théorème sur les suites extraites, la suite v admet la même limite ℓ.

a) Si v admet une limite finie, c'est que $\ell \in \mathbb{R}$. Donc u admet aussi ℓ pour limite finie.

b) Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, c'est que $\ell = +\infty$. Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 7.2

$0 < a < b$, $\quad \begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$.

a) • On sait que $a < b$. Par croissance de la racine carrée, on en déduit $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ puis, en multipliant par $\sqrt{a} > 0$, on obtient $a < \sqrt{ab}$.

• On sait que $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$ car $\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$.

Alors
$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0 \quad , \text{ d'où } \quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

• Enfin, $a < b$ donc $a + b < 2b$ et $\dfrac{a+b}{2} < b$.

On a prouvé
$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

b) On considère la proposition $P(n)$: "$0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$".

(I) Pour $n = 0$, on a $u_0 < u_1 < v_1 < v_0$ (prouvé à la question a)).

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $P(n)$. On a alors $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$.

D'après la question a), on en déduit $0 < u_{n+1} < \sqrt{u_{n+1}v_{n+1}} < \dfrac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} < v_{n+1}$,

c'est-à-dire $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < v_{n+2} < v_{n+1}$.

On a prouvé $P(n+1)$.

(C) D'après le théorème de la récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vient de prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, et la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ décroissante. De plus, pour tout $n\geqslant 0$, on a :

$$a \leqslant u_n < v_n \leqslant b .$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée par b et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée par a.

Ainsi ces deux suites sont convergentes. Notons $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\beta = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Alors $v_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta$ et $\dfrac{u_n+v_n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$. Par unicité de la limite, on obtient $\beta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, d'où $\alpha=\beta$.

On note $\ell = \alpha = \beta$ cette limite commune. On a

$$a < u_1 \leqslant \ell \leqslant v_1 < b .$$

<u>Exercice 7.3</u>

$\theta\in\mathbb{R}$ fixé. $\forall n\geqslant 1$, $\quad v_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$.

a) Si $\theta = a\pi$ avec $a\in\mathbb{Z}$, alors deux cas sont possibles.

<u>Cas 1</u> a est pair. Alors $\cos(k\theta)=1$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, donc la suite v est constante de valeur 1. Ainsi $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

<u>Cas 2</u> a est impair. Alors $\cos(k\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

On en déduit, par récurrence, $v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n\in 4\mathbb{Z}+3 \text{ ou } n\in 4\mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } n\in 4\mathbb{Z}+1 \text{ ou } n\in 4\mathbb{Z}+2 \end{cases}$

Donc la suite v n'a pas de limite, car

$$v_{4n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1 \quad \text{et} \quad v_{4n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 .$$

b) Supposons $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$|v_{n+1}| = |v_n| . |\cos[(n+1)\theta]| \leqslant |v_n| \quad \text{car } |\cos[(n+1)\theta]| \leqslant 1 .$$

Ainsi la suite $(|v_n|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Elle est de plus minorée par 0, donc convergente.

c) * Supposons $|\cos(n\theta)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Alors $|\sin(n\theta)| = \sqrt{1-\cos^2(n\theta)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

donc $\sin(n\theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\sin((n+1)\theta) = \cos\theta \sin(n\theta) + \sin\theta \cos(n\theta),$$

et $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ donc $\sin\theta \neq 0$. On en déduit

$$|\cos(n\theta)| = \left| \frac{\sin((n+1)\theta) - \cos\theta \sin(n\theta)}{\sin\theta} \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

C'est une contradiction, donc $|\cos(n\theta)| \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

* Si la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ admet une limite non nulle ℓ, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $|v_n| \geq \ell > 0$, et $\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell}{\ell} = 1$, c'est-à-dire $|\cos((n+1)\theta)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On vient de démontrer le contraire, donc $|v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

<u>Exercice 7.4</u>

Pour tout $n\geq 1$, $\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$.

a) Pour tout $n\geq 1$,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Or $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

b) Pour tout entier $k\geq 2$, on a $0 < (k-1)k \leq k^2$, donc $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k}$.

On en déduit $\quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \leq 1 + u_{n-1} \leq 2.$

Or la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante, car $\forall n\geq 1$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.

Elle est de plus majorée par 2, donc elle converge.

Exercice 7.5

Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$: la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

b) Supposons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ majorée. Alors elle converge ; soit ℓ sa limite. On obtient $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, puis

$u_{2n} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell = 0$: contradiction.

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas majorée, et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 7.6

On définit par récurrence des entiers $\varphi(0), \varphi(1), \ldots$

→ On pose $\varphi(0) = 0$.

→ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons avoir choisi $\varphi(n)$.

La suite $(u_k)_{k\geq 0}$ n'est pas majorée, donc la suite $(u_k)_{k \geq \varphi(n)+1}$ n'est pas majorée : en effet, si la suite $(u_k)_{k\geq\varphi(n)+1}$ était majorée, en ajoutant l'ensemble fini de valeurs $u_0, u_1, \ldots, u_{\varphi(n)}$, la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ serait encore majorée.

Le nombre réel $n+1$ ne majore donc pas l'ensemble $\{u_k \,;\, k \geq \varphi(n)+1\}$. Il existe donc un entier $k \geq \varphi(n)+1$ tel que $u_k > n+1$. On pose $\varphi(n+1) = k$.

On a ainsi $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.

On a construit une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. De plus, pour tout $n \geq 1$, $u_{\varphi(n)} > n$.

Or $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc, par le théorème des gendarmes,

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$