## Série 6
# Convergence et divergence des suites réelles

**Exercice 6.1** Donner des exemples de suites divergentes $u$ et $v$ telles que :
**a)** la suite $u+v$ soit convergente ; **b)** la suite $uv$ soit convergente.

**Exercice 6.2** **(vrai/faux)** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$. On suppose de plus que la suite $v$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour chacune des assertions suivantes, dites si elle est nécessairement vrai, ou peut-être fausse (en justifiant votre réponse).
**a)** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$. **b)** La suite $u$ est majorée. **c)** La suite $u$ est convergente.

**Exercice 6.3** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles. On suppose que $u$ est minorée et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Montrer que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

**Exercice 6.4** Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes. Montrer que la suite $u$ est convergente.

**Exercice 6.5** Etudier la convergence et la limite éventuelle des suites définies ci-dessous.

$$u_n = \frac{n+1}{n+\cos(n)} \quad ; \quad v_n = \frac{\lfloor \ln n \rfloor}{\ln n} \quad ; \quad w_n = \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-3}.$$

**Exercice 6.6** Soient $a$ et $b$ fixés dans $\mathbb{R}_{>0}$. Etudier la convergence et la limite éventuelle de la suite $u$ définie par

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}.$$

*Indication : on discutera suivant les valeurs relatives de $a$ et $b$.*

**Exercice 6.7** Exprimer en fonction de $n$ le terme général des suites définies ci-dessous. En déduire leurs limites éventuelles.

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 12 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2v_n - 2^n \end{cases}.$$

**Exercice 6.8** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta}{2^k}$.
**a)** À l'aide de la formule $\sin 2a = 2\sin a \cos a$, donner une expression plus simple de $u_n$ (faire apparaître un produit télescopique).
**b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, et préciser sa limite.
*Indication : on admet que* $\dfrac{\sin x_n}{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ *si* $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

**Exercice 6.9** Soit $u$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sin n$.
**a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\cos(1)u_{n+1} - u_n$. En déduire que, si la suite $u$ est convergente, alors sa limite est nécessairement nulle.
**b)** Montrer que la suite $u$ n'admet pas 0 pour limite. Conclure.

**Exercice 6.10** Soit $u$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 + \sin(\sqrt{n})$.
**a)** En utilisant l'identité $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$, prouver que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En déduire que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
**b)** À l'aide de l'exercice précédent, montrer que la suite $u$ n'a pas de limite.