Exercices corrigés - MAT 1120

Série 6

Exercice 6.1

On peut prendre, pour les deux questions, $u = ((-1)^n)_{n\geq 0}$ et $v = -u$.

Exercice 6.2

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

a) FAUX : prendre, par exemple, $u = v = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$.

b) VRAI : la suite v est convergente donc bornée : il existe $M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq M$, donc u est majorée.

c) FAUX : prendre, par exemple, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 1$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 6.3

La suite u est minorée par un réel m : $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq m$.
(en supposant que u et v sont définies à partir du rang n_0)
De plus $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Soit $A \in \mathbb{R}$ fixé. Alors $A - m \in \mathbb{R}$, donc il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $\forall n \geq n_1$, $v_n \geq A - m$.
Alors, pour tout $n \geq n_1$, on obtient $u_n + v_n \geq m + (A-m) = A$.
Ainsi $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_1 \geq n_0, \forall n \geq n_1, \quad u_n + v_n \geq A$,
c'est-à-dire $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 6.4

On suppose $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$ et $u_{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell''$,
avec ℓ, ℓ', ℓ'' trois réels.

- La suite $(u_{6n})_{n\geq 0}$ est extraite de $(u_{2n})_{n\geq 0}$ grâce à l'extractrice $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto 3n \end{array}$. Donc $u_{6n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

  La suite $(u_{6n})_{n\geq 0}$ est aussi extraite de $(u_{3n})_{n\geq 0}$ grâce à l'extractrice $\varphi' : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto 2n \end{array}$. Donc $u_{6n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell''$.

  Par unicité de la limite, $\ell = \ell''$.

- De même, la suite $(u_{6n+3})_{n\geq 0}$ est extraite à la fois de $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(u_{3n})_{n\geq 0}$, par les extractrice $\varphi : n \longmapsto 3n+1$ et $\varphi' : n \longmapsto 2n+1$. Donc $u_{6n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$ et $u_{6n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell''$, d'où $\ell' = \ell''$.

- On conclut que les suites extraites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont convergentes et de même limite. Par un théorème du cours, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

Exercice 6.5

- Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = \dfrac{1+1/n}{1+\frac{\cos n}{n}}$. Or $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $1+\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. De plus, pour tout $n \geq 1$, $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Comme $-\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on déduit du théorème des gendarmes que $\frac{\cos n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $1+\frac{\cos n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, par le théorème sur la limite d'un quotient.

- Pour tout $n \geq 2$, $\ln n - 1 < \lfloor \ln n \rfloor \leq \ln n$, donc $1 - \frac{1}{\ln n} < v_n \leq 1$. Or $\ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc $1 - \frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Par le théorème des gendarmes, il s'ensuit que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

- Pour tout $n \geq 4$, $v_n = \dfrac{1+1/n}{1} - \dfrac{1}{1-\frac{3}{n}}$. Or $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{3}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

donc, par les règles sur les limites et opérations,

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 6.6

On fixe des réels $a>0$ et $b>0$; on pose $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ pour $n \geq 0$.

- Si $a=b$, alors $\forall n \geq 0$, $u_n = 0$. Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $a>b$, alors $\forall n \geq 0$, $u_n = \dfrac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$. Or $0 < \frac{b}{a} < 1$, donc $\left(\frac{b}{a}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- Si $a<b$, alors $\forall n \geq 0$, $u_n = \dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

  Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.

Exercice 6.7

- $u_0 = 3$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = 4u_n - 12$.

  On remarque que $\forall n \geq 0$, $(u_{n+1} - 4) = 4(u_n - 4)$.

  Donc la suite $(u_n - 4)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison 4.

  Comme $u_0 - 4 = -1$, on en déduit $u_n - 4 = -4^n$ pour tout $n \geq 0$, d'où

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = 4 - 4^n.$$

  Or $4>1$, donc $4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

- $v_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$, $v_{n+1} = 2v_n - 2^n$.

  En observant les premières valeurs, on devine la formule $v_n = 2^n - n.2^{n-1}$, qu'il est ensuite facile de prouver par récurrence.

  Alors, pour tout $n \geq 0$, on a $v_n = 2^n\left(1 - \frac{n}{2}\right)$. Comme $2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $1 - \frac{n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, on obtient $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Exercice 6.8

$\theta \in \mathbb{R}$ est fixé. $\forall n \geq 1$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\theta}{2^k}$.

a) Pour $n \geq 1$, on a

$$u_n \cdot \sin \frac{\theta}{2^n} = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{4} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{\theta}{2^{n-1}} \cdot \cos \frac{\theta}{2^n} \cdot \sin \frac{\theta}{2^n}.$$

Or $\cos \frac{\theta}{2^n} \cdot \sin \frac{\theta}{2^n} = \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2^{n-1}}$,

puis $\cos \frac{\theta}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2^{n-1}} = \frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2^{n-2}}$,

d'où par récurrence : $u_n \cdot \sin \frac{\theta}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sin \theta$.

Ainsi, $\forall n \geq 1$, $u_n = \dfrac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}}$ (du moins si $\sin \frac{\theta}{2^n} \neq 0$).

Remarquons que, si $\theta \neq 0$, alors $\frac{\theta}{2^n} \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ pour n suffisamment grand. Donc $\sin \frac{\theta}{2^n} \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Si $\theta = 0$, alors $\forall n \geq 1$, $u_n = 1$.

b) On a, pour n assez grand si $\theta \neq 0$,

$$u_n = \frac{\theta / 2^n}{\sin \theta / 2^n} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

Or $\frac{\theta}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc $\dfrac{\theta/2^n}{\sin \theta/2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, et $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{\sin \theta}{\theta}$.

Si $\theta = 0$, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Exercice 6.9

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin n$.

a) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\sin a + \sin b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}$.

Donc, pour $n \geq 0$, $\sin(n+2) + \sin n = 2 \cos 1 \sin(n+1)$,

c'est-à-dire $u_{n+2} = 2 \cos 1 \, u_{n+1} - u_n$.

Supposons $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$. Alors $u_{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ (suite extraite) et $2\cos 1\, u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\cos 1 . \ell - \ell$ (suite extraite, produit, somme). Par unicité de la limite, on obtient

$$\ell = 2\cos 1 . \ell - \ell \quad , \quad \text{puis} \quad 2\ell(1-\cos 1) = 0.$$

Or $\cos 1 \neq 1$, donc $\ell = 0$.

b) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Donc, pour $n \geq 0$, $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$.

Or $\sin 1 \neq 0$, donc $\cos n = \dfrac{\sin(n+1) - \sin n \cos 1}{\sin 1}$.

Si $\sin n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $\sin(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\cos n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Mais alors $\sin^2 n + \cos^2 n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^2 + 0^2 = 0$. Or, pour tout $n \geq 0$, $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$: contradiction.

Donc la suite $u = (\sin n)_{n\geq 0}$ n'a pas de limite réelle (ni de limite infinie, car c'est une suite bornée).

<u>Exercice 6.10</u>

a) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})$

$$= 2\cos\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2} . \sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2},$$

d'où $|u_{n+1} - u_n| \leq 2 \times 1 \times \left|\sin\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right|$.

Or $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \dfrac{(n+1)-n}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \dfrac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$,

donc $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme la fonction sin est continue, $\sin\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(0) = 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(\sqrt{n}) \geq -1$ donc $u_n \geq 1$.

On en déduit $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-1\right| = \frac{|u_{n+1}-u_n|}{u_n} \leq |u_{n+1}-u_n|$.

Or $|u_{n+1}-u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, par le théorème des gendarmes,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

b) On est dans le cas indéterminé du critère de D'Alembert.
Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors $u_{n^2}-2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell-2$ (suite extraite, somme). Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n^2}-2 = \sin n$, et la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite d'après l'exercice 6.9 : contradiction. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite réelle.
De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $u_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$.